Intégration et probabilités

USTC

Cours 1

26/02/2024

S. Nonnenmacher

Stéphane ↪ WeChat : (33) 666382005.

- Pourquoi un cours sur l'intégration ?

→ Equation différentielle : $u'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

↳ fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

inconnue $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

→ solution : $u(x) = u(0) + \underbrace{\int_0^x f(t)\,dt}_{\text{intégrale de } f \text{ entre } 0 \text{ et } x}$

$x \geq 0$

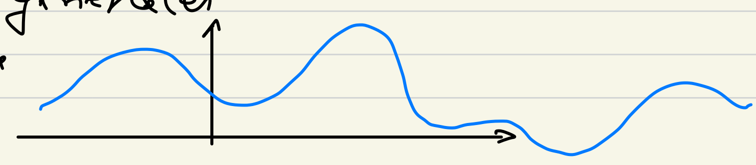
constante arbitraire

au début = f fonction explicites (polynômes, fonctions rationnelles, sinus, exponentielles)

→ chercher des formules explicites pour la primitive $u(x)$.

1850 : classes fonctions f plus générales

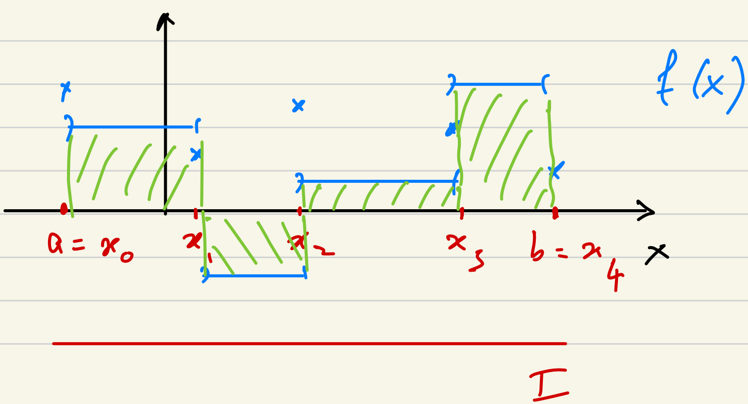
ex : f fonction continue



⇝ intégrale de Bernhardt Riemann : approcher la fonction f par des <u>fonctions en escalier.</u>

<u>Déf :</u> $I = [a,b]$, avec $a < b$. $f : I \to \mathbb{R}$.

La fonction f est une fonction en escalier (= fonction constante par morceaux) si $\exists$ suite finie
$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_K = b,$$
telle que f est constante sur chaque sous-intervalle $]x_{k-1}, x_k[= I_k$, $k = 1, \dots, K$ (et les valeurs $f(x_k)$ sont arbitraires).



$$\int f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{K} a_k (x_k - x_{k-1})$$
$$= \sum_k a_k \underbrace{|I_k|}_{\text{longueur de } I_k}$$

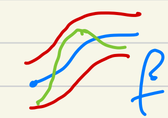
fonctions en escalier $\rightsquigarrow$ fonctions réglées sur I.

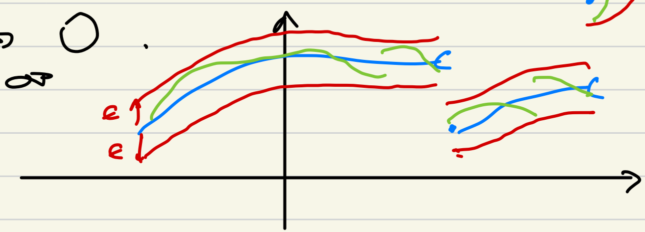
. Convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur I.

Norme sup : $\|f\|_{sup} = \sup\limits_{x\in I} |f(x)|$.

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ ssi :

$$\|f - f_n\|_{sup} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$





$\forall \epsilon > 0,\ \exists n(\epsilon),\ \forall n \geq n(\epsilon)$

$$\|f(x) - f_n(x)\|_{sup} \leq \varepsilon .$$

Def : Fonction réglée.

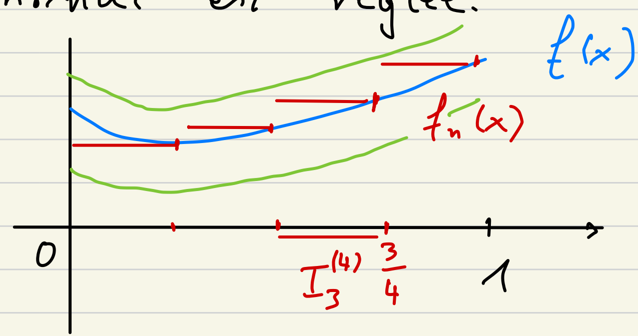
Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction réglée s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier, qui converge uniformément vers f, lorsque $n \to \infty$.

Rem : pour chaque fonction f_n, on a une partition de I,

$$I = \bigcup_{k=1}^{K(n)} I_k^{(n)}.$$ A priori, ces partitions peuvent être différentes les unes des autres.

Ex : une fonction f en escalier est une fonction réglée : on peut prendre $f_n = f$, $\forall n \geq 0$.

<u>Prop</u> : Toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue est réglée.



Preuve : ex : $I = [0, 1]$.

Partitions régulières ?

$$n \geq 1, \quad I = \bigcup_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]}_{I_k^{(n)},\ k = 1, \dots, n}$$

Définissons la fonction en escalier $f_n(x) = f\left(\frac{k}{n}\right)$ sur $I_k^{(n)}$

Montrons que la suite (f_n) converge uniformément vers f.

- On utilise le théorème de Heine : toute fonction continue définie sur un intervalle compact est <u>uniformément</u> continue.

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \quad \forall x, y \in I, \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Si n est tel que $\frac{1}{n} < \delta \Rightarrow \forall x, y \in I_k^{(n)} \Rightarrow |x-y| \leq \frac{1}{n} < \delta$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

En particulier, $y = \frac{k}{n}$,

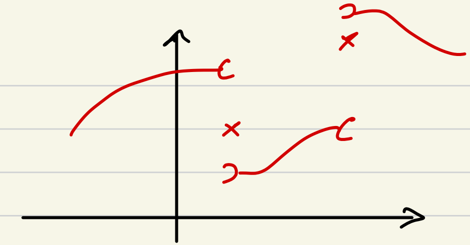
$$\forall x \in I_k^{(n)}, \quad |f(x) - \underbrace{f(\tfrac{k}{n})}_{=f_n(x)}| \leq \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \forall x \in I_k^{(n)} \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Vrai $\forall k = 1 .. n \Rightarrow \forall x \in I, \ |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$

$\Rightarrow$ on a montré que $f_n \longrightarrow f$ uniformément. □

- <u>Propᵉ</u> : $f : I \to \mathbb{R}$ est réglée ssi elle admet, en tout point $x \in I$, une limite à droite et une limite à gauche.



Intégrale d'une fonction en escalier :

$$I = \bigcup_{k=1}^{K} I_k \cup \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$$

ouverts.

Sur I_k, $f(x) = a_k$, $k = 1, \dots, N$.

Alors l'intégrale de f sur I est définie par :

$$\int_I f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{K} a_k (x_k - x_{k-1})$$

= somme algébrique des surfaces des rectangles compris entre l'axe réel et le graphe de f.

Exercice : montrer que l'intégrale de 2 fonctions en escalier est une opération linéaire.

f, g 2 fonctions en escalier sur I

$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \longrightarrow (\alpha f + \beta g)$ est aussi une fonction en escalier.

(trouver une partition adaptée à cette fonction).

. Montrer que $\displaystyle\int_I (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_I f(x)\,dx + \beta \int_I g(x)\,dx$

l'intégrale est linéaire

. Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ fonction réglée, et qui est approchée par une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions en escalier. Alors la suite des intégrales $S_n = \displaystyle\int_I f_n(x)\,dx$ admet une limite lorsque $n \to \infty$. Cette limite est indépendante du choix de la suite

(f_n) convergeant vers f.

Cette limite $\lim_{n\to\infty} S_n$ définit l'intégrale de la fonction f.

Preuve : $f_n \to f$ uniformément :

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists n(\epsilon), \ \forall n \geq n(\epsilon), \quad \| f - f_n \|_{sup} \leq \varepsilon.$$

inégalité triangulaire pour $\| \ \|_{sup}$ $\overset{\forall n,m \geq n(\epsilon)}{\Longrightarrow}$ $\| f_n - f_m \|_{sup} \leq \| f_n - f \|_{sup} + \| f - f_m \|_{sup} \leq 2\varepsilon.$

$$\forall x, \ \underbrace{|f_n(x) - f_m(x)|}_{\text{fonction en escalier}} \leq 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_I |f_n(x) - f_m(x)| \, dx \leq 2\varepsilon \, |I|.$$

$$\left.\begin{array}{l} S_n = \int f_n(x)\,dx \\ S_m = \int f_m(x)\,dx \end{array}\right\} |S_n - S_m| = \left| \int (f_n(x) - f_m(x))\,dx \right|$$

$$\overset{\text{inégalité } \Delta}{\leq} \int |f_n(x) - f_m(x)| \, dx$$

Si $g(x) = a_k$ sur I_k $\Rightarrow$ $\int g(x)\,dx = \sum_k a_k\,|I_k|$

$|g(x)| = |a_k|$ sur I_k $\Rightarrow$ $\int |g(x)|\,dx = \sum_k |a_k|\,|I_k|$

$$\Rightarrow \left|\sum_k a_k\,|I_k|\right| \leq \sum_k |a_k|\,|I_k|$$

Si tous les $|a_k| \leq 2\varepsilon$ $\Rightarrow$ $\int |g(x)|\,dx \leq 2\varepsilon \underbrace{\sum_{k=1}^{K} |I_k|}$

$$\leq 2\varepsilon\,|I|.$$

$\Rightarrow \forall n,m \geq n(\varepsilon),\quad |S_n - S_m| \leq 2\varepsilon\,|I|$

$\Rightarrow$ la suite de nombres réels $(S_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R} \text{ existe}.$$

- Si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une autre suite de fonctions en escalier convergeant vers f, alors $\tilde{S}_n = \int \tilde{f}_n(x)\,dx$ ont une limite $\tilde{S} = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_n$.

Montrons que $\tilde{S} = S$.

. $f_n - \tilde{f}_n$ sont des fonctions en escalier.

$$\left.\begin{array}{l} f_n \to f \text{ uniformément} \\ \tilde{f}_n \to f \text{ uniformément} \end{array}\right\} \Rightarrow \forall \epsilon, \exists n(\epsilon), \forall n \geq n(\epsilon) \quad \begin{array}{l} \|f_n - f\|_{sup} \leq \epsilon \\ \|\tilde{f}_n - f\|_{sup} \leq \epsilon. \end{array}$$

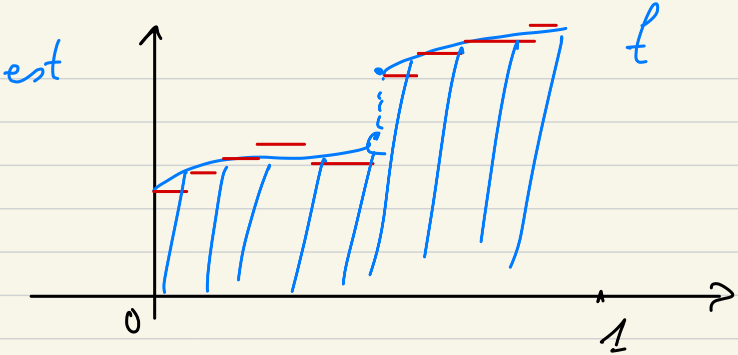
$\Rightarrow \forall n \geq n(\epsilon), \quad \|f_n - \tilde{f}_n\|_{sup} \leq 2\varepsilon.$

$$\Rightarrow \underbrace{|S_n}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ S}} - \underbrace{\tilde{S}_n|}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ \tilde{S}}} \leq \int |f_n - \tilde{f}_n|(x)\,dx \leq 2\varepsilon |I|.$$

$\Rightarrow$ obligatoirement $S = \tilde{S}$.

$\square$

Graphiquement, $\int_I f(x)\,dx$ est égale à l'aire algébrique entre l'axe réel et le graphe de f au-dessus de I.



→ on a défini l'intégrale de Riemann d'une fonction réglée réglée.

Important: on a besoin d'une convergence <u>uniforme</u> des (f_n) vers f.

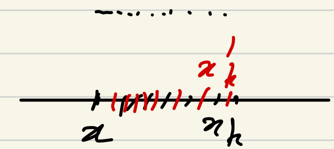
- Que faire pour une fonction f qui n'est pas réglée ?

Ex: $I = [0,1]$, on considère la fonction caractéristique des nombres rationnels, $f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap I}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}\cap I \\ 0 & \text{si } x \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap I. \end{cases}$

$\forall x \in I$, soit $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = 1$, mais on peut construire des suites (x_k) et (x'_k) avec

$x_k \geq x$, $x'_k \geq x$, $\quad x_k \underset{k \to \infty}{\searrow} x$

$x_k \in \mathbb{Q} \qquad x'_k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$



$$\left.\begin{array}{ll} f(x_k) = 1, & \forall k \\ f(x'_k) = 0, & \forall k \end{array}\right\} \Rightarrow$$ je n'ai pas de limite à droite au point x.

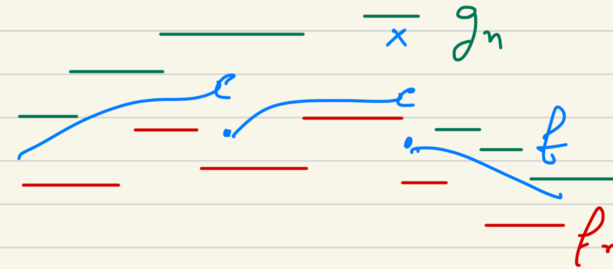
Cette fonction n'admet pas de limite à droite, ni à gauche, en tout point $x \in I$.

$\Rightarrow f$ n'est pas réglée. Elle ne peut pas être approchée uniformément par des fonctions en escalier.

· Généralisation de l'intégrale de Riemann:

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ bornée. On considère l'ensemble des fonctions en escalier qui <u>minorent</u> f : $\forall x,\ \underline{f_n(x) \leq f(x)}$

et la famille des fonctions en escalier g_n qui majorent f.



$$S_-(f) := \sup_{f_n \leq f} \underbrace{\int_I f_n(x)\,dx}_{\text{réels bornés}}$$

↖ nombre réel

$\Rightarrow \sup\{\text{famille de réels bornés}\}$ existe, et $< \infty$.

De même, on définit :

$$S_+(f) := \inf_{g_n \geq f} \underbrace{\int g_n(x)\,dx}_{\text{réels bornés inférieurement}}$$

$\Rightarrow$ admettent un infimum fini

Facile : $S_-(f) \leq S_+(f)$

(Si f, g sont en escalier et $f(x) \leq g(x)$, $\forall x$
$\Rightarrow \int f(x)\,dx \leq \int g(x)\,dx$.)

<u>Défⁿ</u> : Si f est telle que $S_+(f) = S_-(f)$, alors f est dite <u>Riemann-intégrable</u>.
Cette classe généralise la famille des fonctions réglées.
On peut définir l'intégrale d'une telle fonction par

$$S(f) := S_+(f) = S_-(f).$$

Remarque : on n'a pas exigé que $f_n \to f$ uniformément
ou $g_n \to f$ " " .
$S_+(f)$ et $S_-(f)$ sont définies de façon <u>variationnelle</u>, par un sup (ou inf.) sur une classe de fonctions.

Ex : Montrer que, pour f fonction réglée, $S_-(f) = S_+(f) = S$.

définition antérieure

⟶ construire des fonctions en escalier qui convergent uniformément vers f, et qui sont

- soit partout $\leq f$ $\rightsquigarrow$ $S_+ \leq S$
- soit partout $\geq f$. $\rightsquigarrow$ $S_- \geq S$

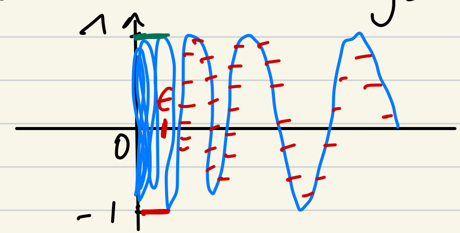
Or $S_- \leq S_+$

$\Bigg\}$ $S_+ = S = S_-$.

• Ex de fonction Riemann-intégrable mais non réglée :

f : $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $[0, 1]$.

$0 \longmapsto 0$



$\Rightarrow$ x n'a pas de limite lorsque $x \to 0$

f n'est pas réglée, mais on peut montrer que $S_+(f) = S_-(f)$.

Preuve : $\forall \epsilon > 0$, on peut approcher $\sin(\frac{1}{x})$ par des fonctions en escalier sur l'intervalle $[\epsilon, 1]$.

sur $[0, \epsilon]$, $|f(x)| \leq 1$

$$-1 \leq f(x) \leq 1$$

$\rightarrow$ on définit des g_n et f_n telles que

$g_n \geq f$ sur I,

$g_n \longrightarrow f$ uniformément sur $[\epsilon, 1]$.

$g_n(x) = 1$ sur $[0, \epsilon]$.

$\Rightarrow \int g_n(x)\,dx$ a une limite lorsque $n \to \infty$

$$= \int \mathbb{1}_{[\epsilon, 1]}(x) \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx + \underbrace{\int \mathbb{1}_{[0, \epsilon]} \times 1 \, dx}_{\epsilon} \geq S_1$$

Idem pour des fonctions

$f_n \leq f$, $f_n \longrightarrow f$ unif^{t} sur $[\epsilon, 1]$, $f_n(x) = -1$ sur $[0, \epsilon]$

$$\int f_n(x)\,dx \longrightarrow \int \mathbb{1}_{[\epsilon,1]}(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx - \epsilon \quad \le S_-$$

Ensuite, on prend $\epsilon \searrow 0 \Rightarrow S_+(f) = S_-(f)$

$$\Rightarrow S_+ - S_- \le 2\epsilon.$$

$$\Rightarrow S_+ = S_-.$$

Contre-exemple :

$f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap I}(x)$ n'est pas Riemann-intégrable.

$\forall f_n$ en escalier, $f_n(x) \le f(x) \Rightarrow$ sur tout intervalle I_k associé à f_n,

$\Rightarrow f_n \le 0$ sur I_k

$\forall g_n$ en escalier, telle que $g_n(x) \ge f(x) \quad \forall x$

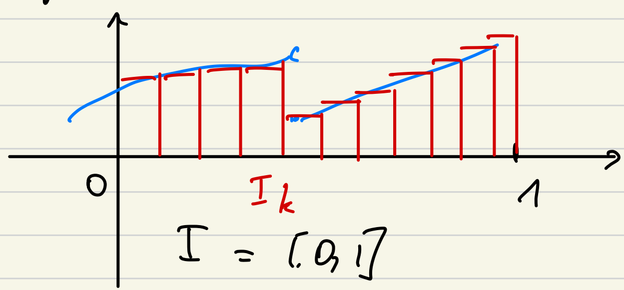
$\Rightarrow$ sur tout intervalle I_k associé à g_n, $g_n(x) \ge 1$.

$\Rightarrow \quad S_+(f) \geq 1 \times |I| = 1$ et $\quad S_-(f) \leq 0 \times |I| = 0$

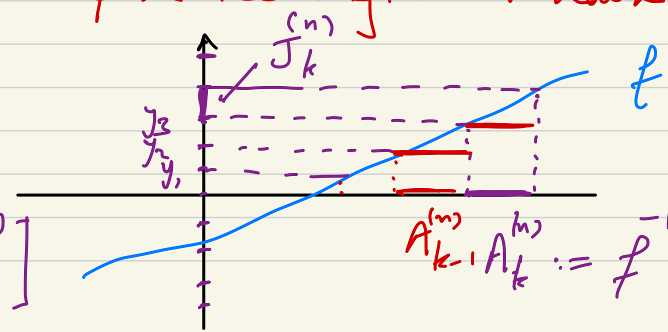
$\Rightarrow \quad S_+ \geq 1 \;,\; S_- \leq 0$, donc f n'est pas Riemann-intégrable.

- <u>Approche de Lebesgue de l'intégrale</u> :

Au lieu de découper I en petits intervalles et utiliser des fonctions en escalier, on va découper <u>l'axe image</u> :



découpage de $I \times \mathbb{R}$ en petits rectangles verticaux.



Intervalles verticaux $J_k^{(n)} = [y_{k-1}^{(n)}, y_k^{(n)}]$

$A_{k-1}^{(n)} \; A_k^{(n)} := f^{-1}(J_k^{(n)}) \subset I$

On découpe l'axe vertical $\mathbb{R} = \bigcup J_k^{(n)}$, et on considère les images réciproques

$$A_k^{(n)} = f^{-1}(J_k^{(n)}).$$

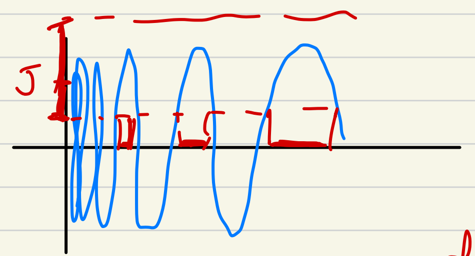
On définit une fonction g_n, tq. $g_n(x) = y_{k-1}^{(n)}$ sur $A_k^{(n)}$.

$\Rightarrow g_n$ est constante sur chaque ensemble $A_k^{(n)}$.

g_n est appelée une fonction <u>étagée</u>, généralise les fonctions en escalier.

⚠ Les ensembles $A_k^{(n)}$ peuvent être plus complexes que des intervalles.

ex : $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$



$J = \left[\frac{1}{3}, 2\right]$

$f^{-1}(J) =$ union infinie disjo d'intervalles fermés l'ensemble pré-image $A = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{3}, 2\right]\right)$ est une union infinie d'intervalles.

$\forall J_k^{(n)}$, si $J_k^{(n)} \subset]-1, 1[$

alors $f^{-1}(J_k^{(n)})$ est aussi une union infinie de sous-intervalles.

$\Rightarrow$ la fonction g_n obtenue n'est pas une fonction en escalier : elle saute une infinité de fois d'une valeur à une autre.

g_n prend un nombre fini de valeurs, mais elle a un nombre infini de points de discontinuité.

Néanmoins, on peut définir son intégrale :

$$\int g_n(x)\, dx = \sum_k \underbrace{y_{k-1}^{(n)}}_{\text{valeur de } g_n} \times \underbrace{|A_k^{(n)}|}_{\text{longueur}}$$

→ il faut pouvoir définir (ou calculer) la longueur de $A_k^{(n)}$, même si $A_k^{(n)}$ est un ensemble plus compliqué qu'un intervalle.

- Objectif : trouver les conditions sur la fonction f, telles que les ensembles réciproques $A = f^{-1}(J)$, J intervalle de $\mathbb{R}$, sont "mesurable".
  ("ont une longueur bien définie").

→ de tels sous-ensemble $A \subset I$ seront dits "mesurables".

→ de telles fonctions f sont appelées fonctions mesurables.

→ g_n, $\int g_n(x)\,dx$ sont bien définies

→ on pourra approcher f par des g_n pour essayer de définir $\int f(x)\,dx$

⚠ On n'aura pas besoin de convergence uniforme de $g_n \to f$, mais seulement de convergence simple :

$\forall x \in I,\ g_n(x) \to f(x)$.