ATTENTION ! IL Y A BEAUCOUP DE DEMONSTRATIONS A REVOIR OU CORRIGER

TD7. | (1) si f est intégrable, $\int_E f\,d\nu < \infty$,

$I_n = n\int_E \ln(1+\frac{f}{n})\,d\nu \leq n\int_E \frac{f}{n} \leq \int_E f < \infty$

JUSTIFIER

~~et $\lim_{n\to\infty} n\ln(1+\frac{f}{n}) = f$ (universa normal~~

et pour $\forall x \in E$, $\lim_{n\to\infty} n\ln(1+\frac{f(x)}{n}) = f(x)$. (parce que $f(x) > 0$)

donc $\lim_{n\to\infty}\int_E n\ln(1+\frac{f}{n})\,d\nu \overset{\text{convergence } \cancel{\text{en mesure}}}{=\!=\!=} \int_E \lim_{n\to\infty} n\ln(1+\frac{f}{n})\,d\nu$

DOMINEE

$= \int_E f\,d\nu$.

(2) si $\int_E f\,d\nu = \infty$,

$E_n = \{x\in E \mid f(x) \leq n(e-1)\}$

ERREUR DE CALCUL

$\lim_{n\to\infty} E_n = E$, $x \in E_n$, $n\ln(1+\frac{f}{n}) \geq n\frac{\cancel{1+}\frac{f}{n}}{e} = \frac{\cancel{n+}f}{e}$.

donc $\int_{E_n} n\ln(1+\frac{f}{n})\,d\nu \geq \int_{E_n}\frac{\cancel{n+}f}{e}\,d\nu > \int_{E_n}\frac{f}{e}\,d\nu$

$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} n\ln(1+\frac{f}{n}) \geq \lim_{n\to\infty}\int_{E_n}\frac{f}{e}\,d\nu = \infty$.

OK (MALGRE ERREUR DE CALCUL)

2. $I_n = J_n + l_n$, $J_n = \int_{]0,1[}\frac{\sin(x^n)}{x^n(1+x)}\,dx$

$l_n = \int_{[1,\infty[}\frac{\sin(x^n)}{x^n(1+x)}\,dx$

$|l_n| \leq \int_{[1,\infty[}\left|\frac{\sin(x^n)}{x^n(1+x)}\right|dx < \int_{[1,\infty[}\frac{1}{x^n(1+x)}\,dx$

$< \int_{[1,\infty[}\frac{1}{x^{n+1}}\,dx$ donc $\lim_{n\to\infty}|l_n| = 0$

EXPLIQUER POURQUOI (CALCUL EXACT)

et $x\in]0,1[$, $\frac{\sin(x^n)}{x^n(1+x)} \geq 0$.

$$J_n = \int_{]0,1[} \frac{\sin(x^n)}{x^n(1+x)}\, dx$$

IL FAUT DIRE QUE SIN(X^N) EST POSITIF SUR L'INTERVALLE [0,1]

$$J_{n,m}^0 = \int_{]0,1-\frac{1}{m}[} \frac{\sin(x^n)}{x^n(1+x)}\, dx \leq J_n \quad \text{pour tout } m>1$$

et $x \in]0,1-\frac{1}{m}[$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x^n}{x^n(1+x)} = \frac{1}{1+x}$

$$\frac{\sin(x^n)}{x^n(1+x)} \leq \frac{x^n}{x^n(1+x)} = \frac{1}{1+x}$$

$$\int_{]0,1-\frac{1}{m}[} \frac{1}{1+x}\, dx = \ln(1+x)\Big|_0^{1-\frac{1}{m}} < \infty,$$

donc par convergence ~~en mesure~~.

DOMINEE

$$\lim_{n\to\infty} J_{n,m} = \int_{]0,1-\frac{1}{m}[} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n(1+x)}\, dx$$

$$= \int_{]0,1-\frac{1}{m}[} \frac{1}{1+x}\, dx$$

et pour tout $m>1$, $J_{n,m} \leq J_n$,

donc $\lim_{n\to\infty} J_n \geq \int_{]0,1[} \frac{1}{1+x}\, dx$

et $J_n = \int_{]0,1[} \frac{\sin(x^n)}{x^n(1+x)} \leq \int_{]0,1[} \frac{1}{1+x}\, dx$.

donc $J_n = \int_{]0,1[} \frac{1}{1+x}\, dx = \ln 2$ OK

et $\lim_{n\to\infty} I_n = \ln 2$.

POUR APPLIQUER LE THME DE CONVERGENCE DOMINEE, IL N'ETAIT PAS NECESSAIRE D'ENLEVER L'INTERVALLE [1-1/M,1]
ON A BIEN SIN(X^N) / X^N CONVERGE VERS 1 PRESQUE PARTOUT SUR [0,1]

EXPLIQUE QUE TU FAIS UNE PREUVE PAR L'ABSURDE (OU PAR CONTRADICTION)

3.(a) si f_n n'est pas convergence f en mesure

et il y a $\varepsilon > 0$, $\exists a$, $\mu(x \in E, |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon) \not\to 0$,

donc pour $\forall N$, $\exists n_0 > N$, $\mu(A_{n_0}) = \mu(x \in E, |f(x) - f_{n_0}(x)| \geq \varepsilon) \geq a$

et $\int_E |f - f_{n_0}| d\mu \geq \int_{A_n} |f - f_{n_0}| d\mu \geq \int_A \varepsilon = a\varepsilon > 0$.

IL FAUT DEFINIR L'ENSEMBLE A_N

donc $\int_E |f - f_n| d\mu \not\to 0$.

c'est dit que $f_n \to f$ en mesure.

OK

on a. $E =]0,1[$, μ ~~normal~~,

MESURE DE LEBESGUE ?

~~$f_n = \mathbb{1}_{]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[}$ $f = 0$.~~ $f_n = \frac{1}{nx}$

~~$\int_{\mathbb{R}} |f - f_n| d\mu = \frac{2}{n}$~~ $f = 0$.

$\int_{]0,1[} |f_n - f| d\mu = \infty$. pour tout n.

mais $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) = \mu(\frac{1}{nx} > \varepsilon)$

$= \mu(x < \frac{1}{n\varepsilon}) \to 0$. pour tout $\varepsilon > 0$. OK

~~(b), si $f_n \to f$ μ-p.p.~~

~~donc pour tout ε, $\lim_{n\to\infty} \mu(|f_n - f| < \varepsilon) \to 0$~~

~~il y a un A, $\mu(E \setminus A) = 0$~~

~~$f_n \to f$ dans A, $\Rightarrow$ pour $\forall x \in A$~~

~~$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ donc~~

$A_N = (x \in E, |f(x) - f_N(x)| > \varepsilon$ OK, VOILA LA DEFINITION

(b). si $f_n \to f$ μ.p.p, il y a un B,

$\mu(E \setminus B) = 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in B$,

pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$B_N = (x \in E, |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N)$

$B_N \subset B_{N+1}$, $\bigcup_{N \in \mathbb{Z}_+} B_N = B$. OK

et $B_{N+1} \cap (x \in E, |f(x) - f_N(x)| > \varepsilon) = B_{N+1} \setminus B_N$.

QUEL EST LE RAPPORT ENTRE B_N ET A_N ?

parce que $\mu(E) = \mu(B) < \infty$ mais $\mu(B_{N+1}) \to \mu(E)$

$\lim_{N\to\infty} \mu(B_{N+1} \setminus B_N) \to 0$. EXPLIQUER POURQUOI donc $\mu(A_N) \to 0$.

MIEUX EXPLIQUER

$\cancel{E =]0,1[, \quad f = 0}$

$\cancel{f_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{2^{n-m}} \mathbb{1}_{]\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}[}}$

$f_n = \begin{cases} \mathbb{1}_{]\{n\sqrt{2}\} - \frac{1}{n}, \{n\sqrt{2}\}[} & \cancel{(\text{si } \{n\sqrt{2}\} \geq \frac{1}{n})} \\ \mathbb{1}_{]0, \{n\sqrt{2}\}[} & \text{si } n\sqrt{2} < \frac{1}{n}, \end{cases}$

$\cancel{\text{donc } \mu(x \in E, |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon) \leq \frac{1}{n} \ (\text{pour tout } \varepsilon < 1)}$

mais pour $\forall x \in E$,

$\cancel{\lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq 0, \text{ parce que pour } \forall x \in]0,1[\ \forall N}$

$\cancel{\exists \ n > N \ \{n\sqrt{2} - x\} < \frac{1}{n}}$

$E =]0,1[$

~~$f_{n,m}$~~ $f = 0$

$$f_{\frac{n(n-1)}{2}+m} = 1_{]\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}[} \quad m < n \quad , m, n \in \mathbb{Z}$$

~~...~~ $\mu(x \in E \mid f_n(x) - f(x) \mid < \varepsilon) < \frac{1}{\sqrt{n}}$ ~~...~~ $(\forall \varepsilon \leq 1)$

~~...~~ $\lim_{n \to \infty} \mu(x \in E, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \to 0$.

mais pour $\forall x \in]0,1[$, $\forall N$,

$\exists\ n > N$, $x \in f_n$, (parce que $\sum_{m=0} f_{\frac{n(n-1)}{2}+m} = 1_{]0,1[}$

QUE VEUT DIRE CELA?

JE NE COMPRENDS PAS

donc f_n n'est pas converg~~ente~~ence f ppN.

(c). ~~par (b), $A_N = B_{N+1} \setminus B_N$,~~

~~On vous $\mu(\bigcup_{N \in \mathbb{Z}} A_N) \geq \mu(E)$~~

par (b), $\lim_{N \to \infty} \mu(A_N) = 12$.

on a $(A'_N) \subset (A_N)$, $\mu(A'_N) < \frac{1}{2^N}$,

OK

donc $\sum_{N=1}^{\infty} \mu(A'_N) < \infty$.

par lemme de Borel-Cantelli, pour tout ε, ~~pour toute~~

$\lim\sup_{n \to \infty} \mu(A'_N) = 0$, $\Rightarrow$ $(f_{N'})$ est une suite $\xrightarrow{N.P.P} f$.

ATTENTION! NE PAS CONFONDRE LIMSUP A'_N (QUI EST UN ENSEMBLE) ET LIMSUP MU(A'_N) (QUI EST UN NOMBRE

4. si $|f| \leq 2$ n'est pa μ-p.p.

il y a. $\mu(B) > 0$, $x \in B$, $|f(x)| > 2$.

$\int_{E} |1_{A_n} - f| d\mu \geq \int_B |1_{A_n} - f| d\mu > \mu(B) > 0$

OK

×.

puis, $C = \{x \in E, f(x) \neq 0, 1\}$ CET ENSEMBLE EST-IL MESURABLE?

~~donc $|1_{A_n} - f(x)| \neq 0$ pour tout $x \in C$, tout A_n~~

~~si $\mu(C) > 0$, $\int_E |1_{A_n} - f| d\mu \to \int$~~

donc $|1_{A_N} - f(x)| \neq 0$, ~~$g(x) = \min(f(x), 1 - f(x)) \neq 0$~~

pour tout $x \in C$, tout A_n

$g(x) = \min(f(x), 1 - f(x))$. ATTENTION ! LA FONCTION G(X) POURRAIT ETRE NEGATIVE. IL FAUT METTRE DES VALEURS ABSOLUES

$\int_E |1_{A_n} - f| d\mu \geq \int_C |1_{A_n} - f| d\mu \geq \int_C g(x)$

si $\mu(C) \neq 0$. EXPLIQUER POURQUOI $\int_C g(x) > 0$. ×.

donc $\mu(C) = 0$, et $f \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$.

donc $\exists A = E \setminus C$, $A \in \mathcal{A}$, $f = 1_A$ P.P. (C N'ES PAS FORCEMENT VIDE)

si $\sum_{n \geq 1} \mu(A_n \Delta A) < \infty$, $\limsup \mu(A_n \Delta A) = 0$

donc $1_{A_n} \to 1_A$ μ p.p. MEME PROBLEME QUE CI-DESSUS

IL FAUT MIEUX EXPLIQUER L'ARGUMENT

SOUS-SUITE

5 (a). par 3(c). on a une suite de (f_n) : $(f_{n'})$
$(f_{n'}) \to f$. ν.p.p.
et $|f_{n'}| \le g$ ν.p.p. donc $|f| \le g$ ν-p.p. OK

(b). pour tout $\varepsilon > 0$. par la continuité uniforme de l'intégrale. , ~~pour tout~~
$\exists\ \eta > 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$, et $\nu(A) < \eta$. $\int_A g\,d\nu < \frac{\varepsilon}{4}$.

pour $\delta = \frac{\varepsilon}{2\nu(E)}$. METTRE DELTA AU DEBUT (AVANT ETA)

IL MANQUE QQ CHOSE ICI

$\exists N > 0$, $\forall n > N$; $\nu(\{x \in E, |f_n(x) - f(x)|\}) < \eta$.

soit $B_1 = \{x \in E, |f(x) - f_n(x)| > \eta\}$ ATTENTION, TU UTILISES ETA DEUX FOIS POUR DES CHOSES DIFFERENTES $B_2 = E \setminus B_1$.

$$\int_E |f_n - f|\,d\nu = \int_{B_1} |f_n - f|\,d\nu + \int_{B_2} |f_n - f|\,d\nu$$
$$\le \int_{B_1} 2g\,d\nu + \int_{B_2} \delta\,d\nu.$$
$$\le 2 \times \frac{\varepsilon}{4} + \delta\,\nu(E) = \varepsilon.$$ donc $\lim_{n\to\infty} \int_E |f - f_n| = 0$ OK