Probabilités et Statistiques - Partiel - 4 avril 2016 S6 Polytech

Tous les documents sont autorisés, mais aucune calculatrice, téléphone, ordinateur ou objet apparenté. Toutes les réponses doivent être justifiées, et la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire discrète, dont la loi est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}[X=k]$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	a	$\frac{1}{3}$

1) On suppose que X prend ses valeurs dans $\{0,1,2,3\}$ avec probabilité 1. Calculer a.
2) Calculer l'espérance de X.
3) Calculer la variance de X.

Exercice 2. Un joueur d'arcade entame une partie d'un jeu de plateforme avec 3 vies pour son personnage. On suppose que pour chaque niveau du jeu, le joueur a une probabilité $(1-p)$ de passer le niveau (et donc, s'il était au niveau $k \geq 1$, de passer au niveau $k+1$), et une probabilité p d'échouer et donc de perdre une vie. On suppose que les niveaux sont indépendants. Lorsque le joueur échoue au niveau $k \geq 1$,

— s'il avait 2 ou 3 vies en réserve, il recommence au même niveau k avec une vie en moins.

— s'il avait une seule vie en réserve, la partie s'achève à ce niveau k.

1) On note X le numéro du niveau auquel le joueur échoue pour la première fois. Quelle loi classique suit la variable aléatoire X ?
2) En déduire l'espérance et la variance de X. Calculer ces quantités lorsque $p = \frac{1}{3}$.
3) On note Y le numéro du niveau où la partie s'achève. Montrer que pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}[Y=k] = \binom{k+1}{2} (1-p)^{k-1}\, p^3.$$

   On pourra éventuellement commencer par les cas $k=1$ et $k=2$.
4) Question facultative : on suppose maintenant que le joueur commence avec r vies, $r \geq 1$. Donner en fonction de r et de p la loi de la variable Z, qui est le numéro du niveau où la partie s'achève sachant que le joueur commence avec r vies.

Exercice 3. On rappelle que le *cardinal* d'un ensemble E, noté $\operatorname{card} E$, est son nombre d'éléments. Dans tout l'exercice, on fixe un ensemble E fini de cardinal $\operatorname{card} E = p+q$, où p et q sont deux entiers positifs. On fixe également un entier $n \leq p+q$, et on rappelle qu'une *partie* $A \subset E$ *de cardinal* n est un ensemble $\{a_1, \ldots, a_n\}$ avec tous les a_i différents et dans E. Par exemple, si $E = [\![1,10]\!] = \{1,2,\ldots,10\}$, alors $A = \{2,5,6,8\}$ est une partie de E de cardinal $n=4$.

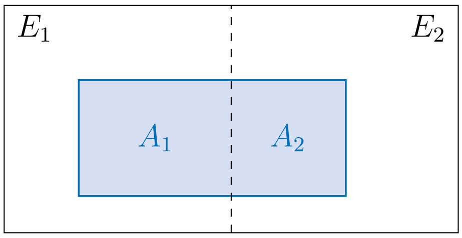
1) Exprimer en fonction de p, q et n le nombre de parties $A \subset E$ telles que $\operatorname{card} A = n$.

2) Calculer ce nombre de parties $A \subset E$ de cardinal n lorsque $p = q = 5$ et $n = 4$.

3) On sépare E en deux parties E_1 et E_2, qui sont disjointes ($E_1 \cap E_2 = \emptyset$) et avec $\operatorname{card} E_1 = p$. Que vaut $\operatorname{card} E_2$?

4) On considère une partie $A \subset E$, de cardinal n, et on pose

$$A_1 = A \cap E_1 \qquad ; \qquad A_2 = A \cap E_2.$$



Si $\operatorname{card} A = n$ et $\operatorname{card} A_1 = k$, montrer que $\operatorname{card} A_2 = n - k$. Quelles sont les valeurs possibles pour $\operatorname{card} A_1$?

5) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Combien y a-t-il de paires de parties (A_1, A_2) avec $A_1 \subset E_1$, $A_2 \subset E_2$, $\operatorname{card} A_1 = k$ et $\operatorname{card} A_2 = n - k$? En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

6) Vérifier la formule de la question précédente lorsque $p = q = 5$ et $n = 4$.

Corrigé exercice 1. On a $a = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$, puis

$$\mathbb{E}[X] = 0 \times \frac{1}{12} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{5}{12} + 3 \times \frac{1}{3} = 2.$$

On calcule ensuite

$$\mathbb{E}[X^2] = 0 \times \frac{1}{12} + 1 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{5}{12} + 9 \times \frac{1}{3} = \frac{29}{6},$$

d'où $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{29}{6} - 4 = \frac{5}{6}$.

Corrigé exercice 2. La variable X est le numéro de la première réussite ($B_k = 1$) dans une suite d'expériences de Bernoulli $(B_1, B_2, \ldots)$ de paramètre p. Elle suit donc une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$:

$$\mathbb{P}[X = k] = (1-p)^{k-1} p.$$

L'espérance de X est $\frac{1}{p}$, et la variance de X est $\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)$. Lorsque $p = \frac{1}{3}$, on obtient $\mathbb{E}[X] = 3$ et $\mathrm{var}(X) = 6$.

Pour calculer $\mathbb{P}[Y = k]$, on remarque que l'événement $Y = k$ veut dire que le joueur a joué $k+2$ parties, et qu'il a échoué exactement 3 fois parmi ces $k+2$ parties, dont la dernière partie. Notons les résultats de ces $k+2$ niveaux $X_1, \ldots, X_{k+2}$, avec $X_i = 1$ si le joueur réussit et $X_i = 0$ si le joueur échoue. La probabilité d'une suite $(X_1, \ldots, X_{k+2})$ avec 3 échecs et $k-1$ réussites est

$$p^3\,(1-p)^{k-1}.$$

De plus, si une telle suite se termine par un échec $X_{k+2} = 0$, alors il reste à choisir les deux premiers échecs X_i et X_j avec $\{i, j\} \subset \{1, 2, \ldots, k+1\}$, et il y a $\binom{k+1}{2}$ possibilités pour ce choix. On conclut que

$$\mathbb{P}[Y = k] = \binom{k+1}{2} p^3 (1-p)^{k-1}.$$

Si l'on commence avec $r \geq 1$ vies, alors l'événement $Z = k$ veut dire que le joueur a joué $k + r - 1$ parties, et qu'il a échoué exactement r fois parmi ces parties, dont la dernière partie. Le même raisonnement que précédemment donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Z = k] &= (\text{nombre de choix des } r-1 \text{ premiers échecs}) \times p^r (1-p)^{k-1} \\ &= \binom{k+r-2}{r-1} p^r (1-p)^{k-1}.\end{aligned}$$

Corrigé exercice 3. Le nombre de parties de A de cardinal n est le coefficient binomial

$$\binom{p+q}{n} = \frac{(p+q)!}{n!\,(p+q-n)!}.$$

Si $p = q = 5$ et $n = 4$, on obtient

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210.$$

Si $E = E_1 \sqcup E_2$, alors $\operatorname{card} E = \operatorname{card} E_1 + \operatorname{card} E_2$, donc $\operatorname{card} E_2 = q$. Si $A \subset E$, alors $A_1 = A \cap E_1$ est une partie de A et de E_1, donc son cardinal est plus petit que les deux cardinaux :

$$k = \operatorname{card} A_1 \leq \min(\operatorname{card} A, \operatorname{card} E_1) = \min(n, p).$$

D'autre part, A_1 et A_2 sont des parties disjointes, car $A_1 \cap A_2 = A \cap E_1 \cap E_2 = A \cap \emptyset = \emptyset$. De plus, $A_1 \cup A_2 = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) = A \cap (E_1 \cup E_2) = A$. Donc, $\operatorname{card} A = \operatorname{card} A_1 + \operatorname{card} A_2$, et $\operatorname{card} A_2 = n - k$. Alors, comme A_2 est une partie de A et de E_2, son cardinal est plus petit que les deux cardinaux de ces parties, donc

$$n - k = \operatorname{card} A_1 \leq \min(\operatorname{card} A, \operatorname{card} E_2) = \min(n, q).$$

Par conséquent, $k \geq n - \min(n, q) = \max(0, n - q)$. On en déduit que les valeurs autorisées pour k sont :

$$\max(0, n - q) \leq k \leq \min(n, p).$$

Le nombre de parties $A_1 \subset E_1$ avec $\operatorname{card} A_1 = k$ est $\binom{p}{k}$, et le nombre de parties $A_2 \subset E_2$ avec $\operatorname{card} A_2 = n - k$ est $\binom{q}{n-k}$, donc le nombre de paires de parties (A_1, A_2) vérifiant ces conditions est $\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$. Maintenant, à toute partie $A \subset E$ de cardinal n, on peut associer un entier $k = \operatorname{card}(A \cap E_1)$ et deux parties A_1, A_2 vérifiant les conditions ci-dessus, et réciproquement. On a donc :

$$\begin{aligned}
\binom{p+q}{n} &= \text{nombre de parties } A \subset E \text{ de cardinal } n \\
&= \sum_{k=\max(0,n-q)}^{\min(n,p)} \text{nombre de paires } (A_1 \subset E_1, A_2 \subset E_2) \text{ de cardinaux } k \text{ et } n-k \\
&= \sum_{k=\max(0,n-q)}^{\min(n,p)} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}.
\end{aligned}$$

On peut même prendre la somme pour k allant de 0 à n, quitte à rajouter des termes nuls. Lorsque $p = q = 5$ et $n = 4$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{4} \binom{5}{k}\binom{5}{n-k} = 1 \times 5 + 5 \times 10 + 10 \times 10 + 10 \times 5 + 5 \times 1 = 210.$$