Partiel Mag 372 – Modélisation en probabilités 16-02-2023

1. Le sujet comporte 2 exercices indépendants.
2. Vous ne pouvez pas vous connecter à votre session personnelle, vous vous connectez à la session `mathens` avec le mot de passe `mathens`. Tous vos fichiers devront être enregistrés dans le dossier "`remise_copie`" présent sur le bureau. Il faut impérativement inclure votre nom dans le nom des fichiers.
3. L'idéal est de transmettre l'exportation en pdf de votre feuille Jupyter.
4. La réponse aux questions théoriques doit être sur les copies papier.
5. Les graphes doivent avoir un titre et être légendés (les graphes doivent être présents, le code qui les génère ne suffit pas).
6. Pour toutes les questions qui demandent d'écrire un programme, on demande en plus du programme écrit une exécution du dit programme avec des paramètres convenablement choisis. On rappelle par ailleurs les commandes d'import des bibliothèques adéquates :

```python
import math
import numpy as np
import scipy.stats as scs
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as random
```

Exercice 1.

On se propose de simuler et d'étudier des dés équilibrés à 6 faces mais dont la valeur des faces n'est pas nécessairement $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. Écrire un programme `simuleDeClassique()` qui simule le résultat du jet d'un dé classique équilibré à 6 faces dont les faces sont $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. Soient X et Y les résultats obtenus lors de deux jets de dés classiques (indépendants). Quelle est la loi de $X + Y$? Écrire un programme qui représente le diagramme en bâton de cette loi.
3. Écrire un programme `simuleDe(faces)` qui, si `faces` est une liste de 6 nombres, simule le résultat du jet d'un dé équilibré à 6 faces dont ce sont les valeurs des faces.
4. On considère deux dés équilibrés à 6 faces indépendants. Le premier a pour valeur sur ces faces les entiers $\{1, 2, 2, 3, 3, 4\}$, et le second les entiers $\{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$. On note A le résultat du premier, B le résultat du second et $Z = A + B$ leur somme. Écrire un programme `sommeEmpiriqueSicherman(N)` qui simule N réalisations indépendantes de Z et qui trace le diagramme en bâton de la loi empirique correspondante.
5. Tester le programme pour $N = 10, 100, 1000$ puis 10000. Qu'observez-vous ? À votre avis, quelle est la loi de Z ? Refaire ces simulations en les juxtaposant sur le même diagramme avec cette loi.

Exercice 2. Loi binomiale négative.

Soit p un réel entre 0 et 1 (exclus), et $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p : $\mathbb{P}[X_n = 1] = 1 - \mathbb{P}[X_n = 0] = p$. On note

$$N_1 = \inf(\{n \geq 1 \,|\, X_n = 1\}),$$

et on définit ensuite par récurrence pour $r \geq 2$:

$$N_r = \inf(\{n \geq N_{r-1} + 1 \,|\, X_n = 1\}).$$

L'entier N_r est l'indice du r-ième succès dans la suite d'expériences de Bernoulli.

1. Montrer que $\mathbb{P}[N_1 = k+1] = (1-p)^k p$ pour tout $k \geq 0$. Comment s'appelle cette loi discrète ?
2. On fixe $r \geq 2$. Quelles sont les valeurs possibles pour N_r ? Montrer qu'on a la relation de récurrence :
$$\mathbb{P}[N_r = k + r] = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}[N_{r-1} = i + r - 1]\, \mathbb{P}[N_1 = k + 1 - i].$$
3. Déduire de la question précédente la formule suivante pour la loi de N_2 :
$$\mathbb{P}[N_2 = k + 2] = (k + 1)\,(1 - p)^k\, p^2$$
pour tout $k \geq 0$.
4. Écrire un programme `BN2_theorique(p, m)` qui dessine le diagramme en bâtons de la loi de N_2, restreinte à l'intervalle $[\![2, m + 2]\!]$ (on pourra prendre pour cette question et la suivante $p = 0.2$ et $m = 20$ lorsqu'on exécute les programmes).
5. Écrire un programme `BN2_empirique(p, m, M)` qui réalise M simulations $N_{2,1}, N_{2,2}, \dots, N_{2,M}$ indépendantes de la variable N_2, et qui dessine l'histogramme des fréquences de ces simulations sur l'intervalle $[\![2, m + 2]\!]$: en face de chaque entier k de cet intervalle, le programme dessine une barre de hauteur
$$\frac{\mathrm{card}\,(\{i \,|\, 1 \leq i \leq M,\ N_{2,i} = k\})}{M}.$$
6. Pour $p = 0.2$ et $m = 20$, superposer sur un même graphe le diagramme en bâtons de la loi de N_2, et l'histogramme empirique pour $M = 1000$ simulations, puis pour $M = 10000$. Commenter ces dessins.
7. On rappelle que $\sum_{k=0}^{m} z^{k+1} = \frac{z - z^{m+2}}{1 - z}$. En dérivant cette formule, montrer que la fonction de répartition de N_2 s'écrit :
$$\mathbb{P}[N_2 \leq m + 2] = 1 - (m + 2)(1 - p)^{m+1} + (m + 1)(1 - p)^{m+2}.$$