TP : Files d'attentes

Les files d'attente sont présentes dans un grand nombre de situations de la vie courante (un guichet desservant des usagers, un serveur recevant des requêtes, etc.). Une file d'attente est modélisée de la façon suivante : les nouveaux clients arrivent de façon aléatoire puis attendent leur tour devant les serveurs, et ces derniers mettent un temps aléatoire pour servir chaque client. Différentes files d'attente peuvent être étudiées suivant le nombre de serveurs, la loi des temps d'arrivée des clients et la loi des temps de service des serveurs.

13 File M/M/1

Dans cette section, nous étudions une file d'attente où les temps d'arrivée et de service suivent des lois exponentielles (donc sans mémoire, ou « markoviennes » d'où le M) et où il n'y a qu'un seul serveur (d'où le 1). On suppose que la file d'attente étudiée est telle que :

(a) Les temps entre les arrivées de deux clients successifs sont indépendants, distribués selon une loi exponentielle de paramètre λ.

(b) Les temps de service sont indépendants, indépendants des instants d'arrivée, et suivent une loi exponentielle de paramètre μ.

On note $(T_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des instants où le nombre de personnes présents dans la file change (avec par convention $T_0 = 0$), et Z_n le nombre de personnes dans la file juste après le n-ième changement. On peut alors modéliser la file en définissant (Z_n, T_n) par récurrence :

(a) Si $Z_n = 0$, $T_{n+1} - T_n$ suit une loi exponentielle de paramètre λ et $Z_{n+1} = 1$.

(b) Sinon, on tire X et Y indépendants entre eux et indépendants de ce qu'on a construit jusqu'ici, avec X de loi exponentielle de paramètre λ et Y de loi exponentielle de paramètre μ. Puis on pose $T_{n+1} - T_n = \min(X, Y)$.

   (a) Si $X \leqslant Y$ alors $Z_{n+1} = Z_n + 1$.

   (b) Si $X > Y$ alors $Z_{n+1} = Z_n - 1$.

On note N_t le nombre de personnes dans la file d'attente au temps t ; ainsi, $N_t = Z_n$ si $T_n \leqslant t < T_{n+1}$. Dans ce qui suit, on supposera $Z_0 = 0$ (pas de clients dans la file d'attente au moment où elle s'ouvre).

1. Comment s'interprètent les variables X et Y ? Justifier la modélisation.

2. Quelle est la loi de $\min(X, Y)$? Quelle est la probabilité de $X \leqslant Y$?

3. Écrire une fonction permettant de simuler l'évolution du nombre de gens dans la file d'attente. La fonction aura pour paramètres λ, μ et n, et doit renvoyer 2 vecteurs : le vecteur $(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)$ et le vecteur $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$.

4. Tracer sur 3 graphiques différents la fonction $k \mapsto Z_k$ pour k dans $\{0; 1; \ldots; 100\}$. Sur le premier graphique pour les valeurs $(\lambda, \mu) = (1, 2)$, pour le second $(\lambda, \mu) = (1, 1)$ et pour le troisième $(\lambda, \mu) = (2, 1)$.

5. Écrire un algorithme qui dépend de λ, μ et T (l'instant final de l'étude) et qui renvoie 2 vecteurs : le vecteur $(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)$ et le vecteur $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$, où n est le plus grand entier tel que $T_n < T$.

6. Tracer sur 3 graphiques différents la fonction $t \mapsto N_t$ pour t dans $[0; T = 100]$: sur le premier graphique pour les valeurs $(\lambda, \mu) = (1, 2)$, pour le second $(\lambda, \mu) = (1, 1)$ et pour le troisième $(\lambda, \mu) = (2, 1)$. À partir de ses simulations, décrire le comportement de la file d'attente dans les cas $\lambda < \mu$, $\lambda = \mu$ et $\lambda > \mu$.

7. Si X suit une loi exponentielle de paramètre μ, quelle est la loi de aX ? En déduire qu'on peut toujours ramener l'étude au cas où $\mu = 1$.

8. On se place dans cette question dans le cas où $\lambda > \mu$.

   i) Déterminer expérimentalement la limite $l_{\lambda,\mu}$ de N_t/t lorsque t tend vers l'infini. Vérifier votre conjecture sur $l_{\lambda,\mu}$ avec des exemples.

   ii) Tracer des réalisations de la fonction
   $$t \mapsto \frac{N_t - t\, l_{\lambda,\mu}}{\sqrt{t}}$$

   iii) Représenter pour des t grands fixés la loi approchée de $\frac{N_t - t\, l_{\lambda,\mu}}{\sqrt{t}}$ (on prendra un échantillon et on représentera la fonction de répartition empirique).

9. On se place dans cette question dans le cas où $\lambda < \mu$.

   i) Expérimentalement, est-ce que la file redevient vide ou est-ce qu'elle explose ?

   ii) On s'intéresse au temps passé en 0 défini par $L(T) = \int_0^T \mathbf{1}_{(N_t=0)}\, dt$. Est-ce que $L(T)$ tend vers l'infini ? À quelle vitesse ?

   iii) Est-ce que N_t converge en loi lorsque t tend vers l'infini ? Si oui, essayer de deviner de quelle loi il s'agit (c'est une loi très classique). Comparer sur un même graphe la loi approchée de N_t et la loi limite que vous conjecturez (en représentant leurs diagrammes en bâton).

10. On se place dans cette question dans le cas où $\lambda = \mu$. Est ce que la file redevient vide, ou est-ce qu'elle explose ? Quelle est le comportement de $L(T)$? Que dire de la loi de N_t lorsque t tend vers l'infini ?

14 Autres Files

1. Une file D/M/1 est comme la file précédente mais cette fois les temps d'arrivée ne sont pas aléatoires mais déterministes : un client arrive tous les temps $\frac{1}{\lambda}$. Reprendre les questions précédentes dans ce cadre et étudier s'il y a encore une transition de phase autour de $\lambda = \mu$ (c'est-à-dire un changement de comportement).

2. Dans une file M/D/1, ce sont cette fois les temps de sortie qui sont déterministes : un client (s'il y en a un dans la file) met un temps $\frac{1}{\mu}$ à être servi. Reprendre les questions précédentes dans ce cadre et étudier s'il y a encore une transition de phase autour de $\lambda = \mu$.

3. Dans une file M/M/c, il y a $c \geq 1$ guichets, et donc $d = \min(Z_n, c)$ guichets occupés à la n-ième étape. On tire $X, Y_1, \ldots, Y_d$ indépendants entre eux et de ce qu'on a construit jusqu'ici, avec X de loi exponentielle de paramètre λ et les Y_i de loi exponentielle de paramètre μ. Puis on pose $T_{n+1} - T_n = \min(X, Y_1, \ldots, Y_d)$ et

   (a) Si $X \leqslant \min(Y_1, \ldots, Y_d)$, alors $Z_{n+1} = Z_n + 1$.

   (b) Sinon $Z_{n+1} = Z_n - 1$.

   Étudier une file M/M/2 et déterminer expérimentalement où se trouve la transition de phase.