Fonctions génératrices de Schur

Si $N \geq 1$, on note $\widehat{\mathrm{U}}_N$ l'ensemble de toutes les partitions d'entiers $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N)$ de longueur plus petite que N ; on convient que $\lambda_j = 0$ si λ est de longueur $\ell < N$ et si $\ell < j \leq N$. Si $\lambda \in \widehat{\mathrm{U}}_N$, sa *mesure de comptage* est la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_+$ donnée par

$$m_\lambda = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{\left(\frac{\lambda_i + N - i}{N}\right)},$$

δ_x étant le Dirac en x. Cette mesure encode la géométrie de λ et est adaptée à l'étude de la convergence de certaines suites de partitions (aléatoires). Si $\lambda \in \widehat{\mathrm{U}}_N$, on rappelle que

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_N) = \frac{a_{\lambda+\rho}(x_1, \ldots, x_N)}{a_\rho(x_1, \ldots, x_N)}$$

avec $\rho = (N-1, N-2, \ldots, 0)$ et $a_\mu(x_1, \ldots, x_N) = \det((x_i)^{\mu_j})_{1 \leq i,j \leq N}$ fonction antisymétrique associée à $\mu \in \widehat{\mathrm{U}}_N$. Le dénominateur de la fonction de Schur est le déterminant de Vandermonde $a_\rho(x_1, \ldots, x_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)$, qu'on notera simplement V_N dans la suite. Soit $\mathbb{P}_N$ une mesure de probabilité à support fini dans $\widehat{\mathrm{U}}_N$. On note

$$\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{\lambda \in \widehat{\mathrm{U}}_N} \mathbb{P}_N[\lambda] \, \frac{s_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_N)}{s_\lambda(1, 1, \ldots, 1)},$$

les dénominateurs mettant en jeu des fonctions de Schur évaluées en une suite $1^{(N)} = (1, 1, \ldots, 1)$ constituée de N valeurs 1 (l'Exemple 5.18 du polycopié implique que $s_\lambda(1^{(N)}) \geq 0$ pour toute partition λ, et on admet que l'inégalité est stricte si $\ell(\lambda) \leq N$). Cette *fonction génératrice de Schur* de la mesure $\mathbb{P}_N$ est un polynôme symétrique en les N variables $x_1, \ldots, x_N$, avec $\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(1, \ldots, 1) = 1$. L'objectif du devoir est de proposer une preuve presque complète du critère de convergence général suivant pour des suites de partitions aléatoires $(\lambda_N)_{N \in \mathbb{N}}$ avec $\lambda_N \in \widehat{\mathrm{U}}_N$ pour tout N.

Théorème. *Soit $(\mathbb{P}_N)_{N \geq 1}$ une suite de mesures de probabilités, chaque $\mathbb{P}_N$ étant à support fini sur $\widehat{\mathrm{U}}_N$. On suppose que pour tout $k \geq 1$,*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\partial_1 \log \mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1, \ldots, x_k, 1^{(N-k)})}{N} = F(x_1),$$

où ∂_i désigne la dérivée partielle par rapport à la variable x_i ; F est une fonction holomorphe ; et la convergence de fonctions est uniforme dans un voisinage complexe de $(x_1, \ldots, x_k) = 1^{(k)}$. Alors, il existe une mesure de probabilité déterministe m sur $\mathbb{R}_+$ avec des moments de tout ordre, telle que les mesures aléatoires m_{λ_N} avec $\lambda_N \sim \mathbb{P}_N$ convergent en probabilité au sens des moments vers m :

$$\forall k \geq 1, \quad \int_{\mathbb{R}_+} x^k \, m_{\lambda_N}(dx) \longrightarrow_{N \to \infty,\ \textit{probabilité}} \int_{\mathbb{R}_+} x^k \, m(dx).$$

1 Formulation différentielle du théorème

Dans tout ce qui suit, on fixe une suite $(\mathbb{P}_N)_{N\geq 1}$ de mesures de probabilité vérifiant les hypothèses de l'énoncé du théorème ; on parlera de suite *adaptée* de mesures. Un exemple important est étudié dans la dernière partie du devoir.

1. Si $(\mathbb{P}_N)_{N\geq 1}$ est une suite adaptée, montrer que pour tout $k \geq 1$ et tous indices $i_1, \ldots, i_k$,
$$\lim_{N\to\infty} \frac{\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} \log \mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1, \ldots, x_N)}{N}\bigg|_{x_1=\cdots=x_N=1}$$
existe et vaut 0 si tous les indices i_j ne sont pas égaux, et vaut $c_k = F^{(k-1)}(1)$ (la $(k-1)$-ième dérivée complexe de F en 1) si tous les indices i_j sont égaux. On pourra utiliser sans démonstration la généralisation en plusieurs variables des résultats usuels de convergence des fonctions holomorphes (par exemple, si une suite de fonctions holomorphes en plusieurs variables converge localement uniformément, alors sa limite est holomorphe et on a également convergence des suites des dérivées partielles).

2. Sous les mêmes hypothèses, notons $U(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k\,(z-1)^k}{k!}$. Justifier de la convergence de $U(z)$ dans un voisinage de $z = 1$, et du caractère holomorphe de cette fonction. On pose
$$T_N(x_1, \ldots, x_N) = \mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1, \ldots, x_N)\ \exp\left(-N \sum_{i=1}^{N} U(x_i)\right).$$
Montrer que pour tout $k \geq 1$ et tous indices $i_1, \ldots, i_{r\geq 1} \in [\![1, k]\!]$ (éventuellement avec des répétitions),
$$\lim_{N\to\infty} \frac{\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_r} T_N(x_1, \ldots, x_k, 1^{(N-k)})}{N\, T_N(x_1, \ldots, x_k, 1^{(N-k)})} = 0$$
uniformément dans un voisinage de $(x_1, \ldots, x_k) = 1^{(k)}$.

Pour $k \geq 1$, on note $\mathscr{D}_k$ l'opérateur différentiel sur les polynômes en N variables défini par
$$(\mathscr{D}_k P)(x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{V_N} \sum_{i=1}^{N} (x_i\, \partial_i)^{\circ k} (V_N\, P(x_1, \ldots, x_N)),$$
où ∂_i est la dérivation partielle par rapport à la variable x_i. Compte tenu du dénominateur $\frac{1}{V_N}$, si $P \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]$, alors $\mathscr{D}_k P$ est a priori une fraction rationnelle.

3. Montrer que si $P \in \mathrm{Sym}(N)$ est un polynôme symétrique en N variables, alors $\mathscr{D}_k P$ est encore un polynôme symétrique en N variables. Montrer également que pour toute partition $\lambda \in \widehat{\mathrm{U}}_N$,
$$\mathscr{D}_k s_\lambda = \left(\sum_{i=1}^{N} (\lambda_i + N - i)^k\right) s_\lambda.$$

4. Soit $\mathbb{P}_N$ une mesure de probabilité à support fini dans $\widehat{\mathrm{U}}_N$. Montrer que pour tout $k, l \geq 1$,
$$\mathbb{E}_N\left[\left(\int_{\mathbb{R}_+} x^k\, m_\lambda(dx)\right)^l\right] = \frac{1}{N^{l(k+1)}} \left((\mathscr{D}_k)^{\circ l} \mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}\right)_{|x_1=x_2=\cdots=x_N=1}.$$

5. Soit $(\mathbb{P}_N)_{N\geq 1}$ une suite adaptée de mesures de probabilité. Pour établir le théorème, montrer qu'il suffit d'établir l'existence de constantes $M_{k\geq 1}$ telles que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{k+1}} \left(\lim_{x_1,\ldots,x_N\to 1} \frac{(\mathscr{D}_k \mathcal{S}_{\mathbb{P}_N})(x_1,\ldots,x_N)}{\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)} \right) = M_k;$$
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{2(k+1)}} \left(\lim_{x_1,\ldots,x_N\to 1} \frac{((\mathscr{D}_k)^{\circ 2} \mathcal{S}_{\mathbb{P}_N})(x_1,\ldots,x_N)}{\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)} \right) = (M_k)^2,$$

et telles que $|M_k| \leq k!\, C^k$ pour une certaine constante $C > 0$.

6. On verra plus loin que les limites M_k de la question précédente s'écrivent

$$M_k = \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!\,(l+1)!\,(k-l)!} \;\left(z^k\,(F(z))^{k-l}\right)^{(l)}\Big|_{z=1}.$$

Montrer alors qu'il existe effectivement une constante $C > 0$ telle que $|M_k| \leq k!\, C^k$ pour tout $k \geq 1$ (indication : utiliser les règles de Leibniz de dérivation des produits).

2 Symétrisation de fractions rationnelles

Soit $F(x_1,\ldots,x_n)$ une fonction en n variables holomorphe sur un voisinage du point $1^{(n)}$. On fixe un ensemble $\Pi = \{(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots,(a_r,b_r)\}$ de paires toutes distinctes (a_i,b_i), avec $1 \leq a_i < b_i \leq n$ pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, et on note

$$F_\Pi(x_1,\ldots,x_n) = Sym\left(\frac{F(x_1,\ldots,x_n)}{\prod_{(a,b)\in\Pi}(x_a - x_b)}\right) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(n)} \frac{F(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})}{\prod_{(a,b)\in\Pi}(x_{\sigma(a)} - x_{\sigma(b)})}.$$

A priori, F_Π n'est bien définie que pour des x_i tous distincts.

7. On suppose que F est un polynôme en les variables $x_1,\ldots,x_n$. Montrer que dans ce cas, F_Π est un polynôme symétrique en les variables $x_1,\ldots,x_n$. On pourra considérer $F_\Pi\, V_n$ et utiliser l'isomorphisme $P \mapsto P\,V_n$ entre polynômes symétriques et antisymétriques en n variables.

On admet l'extension suivante du résultat de la question 7 : si F est holomorphe (au lieu de polynomiale) au voisinage de $1^{(n)}$, alors F_Π est bien définie, holomorphe et symétrique au voisinage de $1^{(n)}$. De plus, $F \mapsto F_\Pi$ est continue pour la topologie de la convergence localement uniforme au voisinage de $1^{(n)}$ (topologie de Montel sur les fonctions holomorphes).

8. On considère l'ensemble de paires $\Pi = \{(1,2),(1,3),\ldots,(1,n)\}$, et $F(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1)$ avec f holomorphe au voisinage de 1. Montrer que

$$\begin{aligned}&\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to 1^{(n)}} (n\, F_\Pi(x_1,\ldots,x_n)) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{f(z_1)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)\cdots(z_1-z_n)} + \frac{f(z_2)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)\cdots(z_2-z_n)}\right. \\ &\qquad \left. + \cdots + \frac{f(z_n)}{(z_n-z_1)(z_n-z_2)\cdots(z_n-z_{n-1})}\right)\end{aligned}$$

avec $z_i = 1 + \varepsilon(i-1)$. En développant f en série au voisinage de 1, montrer que le second membre de cette équation vaut

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{n-i}\,(i-1)^k\, f^{(k)}(1)}{k!\,(i-1)!\,(n-i)!}\, \varepsilon^{k-(n-1)} + O(\varepsilon).$$

9. En considérant les dérivées d'ordre $k \in [\![0, n-1]\!]$ de $(z-1)^{n-1}$ en $z=1$, calculer

$$\sum_{j=0}^{n-1} j^k\, \frac{(-1)^{n-1-j}}{j!\,(n-1-j)!}$$

pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ (indication : utiliser une relation de changement de base entre les polynômes j^k et les polynômes $j^{\downarrow k} = j(j-1)\cdots(j-k+1)$). En déduire que la limite de la question précédente vaut

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to 1^{(n)}} (n\, F_\Pi(x_1,\ldots,x_n)) = \frac{f^{(n-1)}(1)}{(n-1)!}.$$

3 Analyse asymptotique de la fonction génératrice

Dans cette section, on démontre le théorème en utilisant le critère suffisant de la question 5, et en démontrant la formule de la question 6.

10. Soit $k, l \geq 1$ et $(\mathbb{P}_N)_{N\geq 1}$ une suite adaptée de mesures. Montrer que $(\mathscr{D}_k)^{\circ l}\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}$ est une somme signée $\sum \pm\, t(a_1,\ldots,a_\alpha,b_1,\ldots,b_\beta,g_1,\ldots,g_\gamma,\Pi)$ de termes de la forme

$$\frac{x_{g_1}x_{g_2}\cdots x_{g_\gamma}}{\prod_{(a,b)\in\Pi}(x_a-x_b)} \times \left(\partial_{a_1}\cdots\partial_{a_\alpha}\left(\exp\left(N\sum_{i=1}^{N}U(x_i)\right)\right)\right) \times \left(\partial_{b_1}\cdots\partial_{b_\beta}T_N(x_1,\ldots,x_N)\right)$$

avec :

- Π ensemble de paires d'indices $1 \leq a < b \leq N$;
- $\{g_1,\ldots,g_\gamma\} \subset \{a_1,\ldots,a_\alpha,b_1,\ldots,b_\beta\} \cup \Pi^*$, Π^* désignant l'ensemble des indices a ou b intervenant dans une paire $(a,b)\in\Pi$;
- $\mathrm{card}(\{a_1,\ldots,a_\alpha,b_1,\ldots,b_\beta\}) \leq l$;
- $\alpha+\beta+\mathrm{card}(\Pi) \leq kl$, $\gamma \leq kl$.

On pourra traiter d'abord le cas $l=1$.

11. On appelle *support* d'un terme $t = t(a_1,\ldots,a_\alpha,b_1,\ldots,b_\beta,g_1,\ldots,g_\gamma,\Pi)$ de $(\mathscr{D}_k)^{\circ l}\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}$ l'ensemble d'indices $S = \{a_1,\ldots,a_\alpha,b_1,\ldots,b_\beta\}\cup\Pi^*$. On dira que deux termes

$$t(a_1,\ldots,a_\alpha,b_1,\ldots,b_\beta,g_1,\ldots,g_\gamma,\Pi)$$
$$\text{et } t(a'_1,\ldots,a'_{\alpha'},b'_1,\ldots,b'_{\beta'},g_1,\ldots,g'_{\gamma'},\Pi')$$

ont même *type* si $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$, $\mathrm{card}(\Pi)=\mathrm{card}(\Pi')$ et s'il existe une permutation $\sigma\in\mathrm{Sym}(N)$ qui envoie les indices a_i, b_j, g_k et les paires de Π sur les indices a'_i, b'_j, g'_k et les paires de Π'. On utilisera la lettre majuscule $T = T(t)$ pour dénoter le type (classe d'équivalence) d'un terme t, et on notera $|T|$ le nombre d'éléments du support d'un terme t de type T. Si

$k, l \geq 1$ sont fixés et N est assez grand, expliquer pourquoi le nombre de types possibles ne dépend pas de N, et exprimer en fonction de N et $|T|$ le nombre de termes de type T. Un support S et un type T étant fixés, montrer que la contribution des termes correspondants dans $\lim_{x_1,\ldots,x_N\to 1} \frac{(\mathscr{D}_k)^{\circ l}\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)}{\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)}$ s'écrit

$$\begin{cases} C(T)\, N^{\alpha} + O(N^{\alpha-1}) & \text{si } \beta = 0, \\ o(N^{\alpha+1}) & \text{si } \beta \geq 1, \end{cases}$$

où $C(T)$ est une constante ne dépendant que du type T. En déduire l'ordre de la contribution de tous les termes avec un type T fixé.

12. Montrer que

$$\lim_{x_1,\ldots,x_N\to 1} \frac{(\mathscr{D}_k)^{\circ l}\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)}{\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)} = O(N^{l(k+1)}),$$

et que si un type T de termes donne une contribution de cet ordre, alors $\beta = 0$.

13. Lorsque $l = 1$, montrer que

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{k+1}} \left(\lim_{x_1,\ldots,x_N\to 1} \frac{(\mathscr{D}_k\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N})(x_1,\ldots,x_N)}{\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)} \right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{k+1}} \left(\lim_{x_1,\ldots,x_N\to 1} \frac{1}{V_N\, \exp(N\sum_{i=1}^N U(x_i))} \sum_{t=1}^{N} (x_t\partial_t)^k \left(V_N\, \exp\left(N \sum_{i=1}^{N} U(x_i) \right)\right)\right) \\ &= M_k \end{aligned}$$

avec M_k donné par la formule de la question 6.

L'étude du cas $l = 2$ est similaire et achève la preuve du théorème (question bonus : traiter aussi ce cas).

4 Mesures de Schur–Weyl

14. Soit $n, N \geq 1$ deux entiers positifs. Si λ est une partition de taille n et de longueur plus petite que N, on note $\dim\lambda$ la dimension de la représentation irréductible de $\mathfrak{S}(n)$ associée à λ. En utilisant la formule de Frobenius–Schur, montrer que

$$\mathbb{P}_{N,n}[\lambda] = \frac{(\dim\lambda)\, s_\lambda(1^{(N)})}{N^n}$$

définit une mesure de probabilité sur $\{\lambda \in \widehat{\mathrm{U}}_N \mid |\lambda| = n\}$. C'est la *mesure de Schur–Weyl* de paramètres N et n.

15. On suppose que $n = \lfloor cN^2 \rfloor$ pour une certaine constante $c > 0$. Montrer que les mesures aléatoires m_{λ_N} avec $\lambda_N \sim \mathbb{P}_{N,n}$ convergent en probabilité vers une mesure limite m_c, dont on donnera une expression pour les moments.

Corrigé

1. Remarquons d'abord que par symétrie des fonctions $\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)$ en leurs variables, pour tous indices distincts $j_1,\ldots,j_r$ fixés,
$$\lim_{N\to\infty} \frac{\partial_{j_1} \log \mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(1,\ldots,1,x_{j_1},1,\ldots,1,x_{j_2},1,\ldots)}{N} = F(x_{j_1}),$$
la convergence étant uniforme dans un voisinage de $(x_{j_1},\ldots,x_{j_r}) = 1^{(r)}$. Les deux membres de cette équation sont des fonctions holomorphes en les variables $(x_{j_1},\ldots,x_{j_r})$, donc on a également convergence localement uniforme de toutes les dérivées (dans un voisinage de $1^{(r)}$). Envisageons alors un k-uplet d'indices $i_1,\ldots,i_k$ tel que $k \geq r$ et $\{i_1,\ldots,i_k\} = \{j_1,\ldots,j_r\}$: les indices j_b sont tous distincts, tandis que des indices i_a et $i_{a'}$ peuvent être égaux. À symétrie près, on peut supposer $i_1 = j_1$. Alors,
$$\lim_{N\to\infty} \frac{\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k} \log \mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(1,\ldots,1,x_{j_1},1,\ldots,1,x_{j_2},1,\ldots)}{N} = \partial_{i_2}\cdots\partial_{i_k} F(x_{i_1})$$
uniformément dans un voisinage de $1^{(r)}$, donc, en particulier,
$$\lim_{N\to\infty} \left.\frac{\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k} \log \mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(1,\ldots,1,x_{j_1},1,\ldots,1,x_{j_2},1,\ldots)}{N}\right|_{x_{j_1}=\cdots=x_{j_r}=1} = 1_{(i_1=i_2=\cdots=i_k)}\, F^{(k-1)}(1).$$
Or, le terme de gauche est bien la limite lorsque N tend vers l'infini de l'évaluation en $x_1 = \cdots = x_N = 1$ de la dérivée partielle $\frac{1}{N}\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k} \log \mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)$.

2. Le développement en série au voisinage de 1 de F est $F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!}\,(z-1)^{k-1}$. Puisque cette série a un rayon de convergence R non nul,
$$0 < R = \liminf_{k\to\infty} \left(\frac{(k-1)!}{|c_k|}\right)^{\frac{1}{k}} = \liminf_{k\to\infty} \left(\frac{k}{\mathrm{e}\,|c_k|^{\frac{1}{k}}}\right).$$
La suite $(\frac{|c_k|}{k!})^{\frac{1}{k}}$ a la même limite inférieure, donc $U(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k!}\,(z-1)^k$ converge sur le même disque $D_{(1,R)}$ et est holomorphe. De plus, les règles usuelles de dérivation des fonctions holomorphes montrent que $U'(z) = F(z)$.

   Pour la seconde partie de la question, remarquons que
$$\begin{aligned}\frac{\partial_1 \log T_N(x_1,\ldots,x_k,1^{(N-k)})}{N} &= \frac{\partial_1 \log \mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_k,1^{(N-k)})}{N} - \partial_1\left(\sum_{i=1}^{N} U(x_i)\right)\\ &= \frac{\partial_1 \log \mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_k,1^{(N-k)})}{N} - F(x_1) \to_{N\to\infty} 0\end{aligned}$$
localement uniformément. Pour les mêmes raisons que dans la question précédente (symétrie, convergence des fonctions holomorphes et de leurs dérivées), ceci implique
$$\frac{\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_r} \log T_N(x_1,\ldots,x_k,1^{(N-k)})}{N} \to_{N\to\infty} 0$$
pour toute famille d'indices $1 \leq i_1,\ldots,i_r \leq k$ avec $r \geq 1$. Voyons pourquoi ceci implique le résultat annoncé avec les rapports
$$\frac{\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_r} T_N(x_1,\ldots,x_k,1^{(N-k)})}{N\,T_N(x_1,\ldots,x_k,1^{(N-k)})}.$$

Si $r=1$, c'est clair, car

$$\frac{\partial_{i_1} \log T_N(x_1,\ldots,x_k,1^{(N-k)})}{N} = \frac{\partial_{i_1} T_N(x_1,\ldots,x_k,1^{(N-k)})}{N\,T_N(x_1,\ldots,x_k,1^{(N-k)})}.$$

Supposons le résultat établi jusqu'au rang $r-1$. Alors, la fonction symétrique en k variables et holomorphe

$$\frac{\partial_{i_2}\cdots\partial_{i_r} T_N(x_1,\ldots,x_k,1^{(N-k)})}{N\,T_N(x_1,\ldots,x_k,1^{(N-k)})}$$

tend vers 0 uniformément sur un voisinage de $1^{(k)}$, donc, puisqu'on peut encore échanger limite et dérivation dans ce contexte,

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{N\to\infty} \partial_{i_1}\left(\frac{\partial_{i_2}\cdots\partial_{i_r} T_N(x_1,\ldots,x_k,1^{(N-k)})}{N\,T_N(x_1,\ldots,x_k,1^{(N-k)})}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{\partial_{i_1}\partial_{i_2}\cdots\partial_{i_r} T_N}{N\,T_N} - \frac{\partial_{i_2}\cdots\partial_{i_r} T_N}{N\,T_N}\,\frac{\partial_{i_1} T_N}{T_N}\right),
\end{aligned}$$

toutes les fonctions étant évaluées en $(x_1,\ldots,x_k,1^{(N-k)})$ sur la seconde ligne. Dans un voisinage de $1^{(k)}$, le rapport $\frac{\partial_{i_1} T_N}{T_N}$ est une fonction bornée, donc le second membre de la différence tend vers 0 par hypothèse de récurrence. Ainsi,

$$0 = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{\partial_{i_1}\partial_{i_2}\cdots\partial_{i_r} T_N}{N\,T_N}\right)$$

localement uniformément, et le résultat est encore vrai au rang r.

3. Les polynômes de Schur $s_\lambda(x_1,\ldots,x_N)$ avec $\ell(\lambda)\leq N$ forment une base linéaire de $\mathrm{Sym}(N)$ (voir le Théorème 2.12 du polycopié), donc la seconde partie de la question implique la première partie : $\mathscr{D}_k(\mathrm{Sym}(N))\subset \mathrm{Sym}(N)$. Fixons donc $\lambda\in\widehat{\mathrm{U}}_N$, et calculons $\mathscr{D}_k s_\lambda$. On a :

$$(\mathscr{D}_k s_\lambda)(x_1,\ldots,x_N) = \frac{1}{V_N}\left(\sum_{t=1}^N (x_t\,\partial_t)^{\circ k}\right)\big(\det((x_i)^{\mu_j})_{1\leq i,j\leq N}\big),$$

et pour tout $t\in[\![1,N]\!]$,

$$\begin{aligned}
(x_t\,\partial_t)^{\circ k}\big(\det((x_i)^{\mu_j})_{1\leq i,j\leq N}\big) &= (x_t\,\partial_t)^{\circ k}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(N)}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^N (x_i)^{\mu_{\sigma(i)}} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(N)}\varepsilon(\sigma)\,(\mu_{\sigma(t)})^k\prod_{i=1}^N (x_i)^{\mu_{\sigma(i)}}.
\end{aligned}$$

Pour toute permutation σ, $\sum_{t=1}^N(\mu_{\sigma(t)})^k = \sum_{t=1}^N(\mu_t)^k$. Ainsi, on a bien

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{t=1}^N (x_t\,\partial_t)^{\circ k}\right)\big(\det((x_i)^{\mu_j})_{1\leq i,j\leq N}\big) &= \left(\sum_{t=1}^N (\mu_t)^k\right)\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(N)}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^N (x_i)^{\mu_{\sigma(i)}} \\
&= \left(\sum_{t=1}^N (\mu_t)^k\right)\big(\det((x_i)^{\mu_j})_{1\leq i,j\leq N}\big)
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$(\mathscr{D}_k s_\lambda)(x_1,\dots,x_N) = \left(\sum_{t=1}^N (\mu_t)^k\right) \frac{\det((x_i)^{\mu_j})_{1\leq i,j\leq N}}{V_N} = \left(\sum_{t=1}^N (\mu_t)^k\right) s_\lambda(x_1,\dots,x_N).$$

4. Partant du terme de droite de l'identité, on écrit :

$$\begin{aligned}((\mathscr{D}_k)^{\circ l}\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N})(x_1,\dots,x_N) &= \sum_{\lambda\in\widehat{\mathrm{U}}_N} \mathbb{P}_N[\lambda]\,\frac{((\mathscr{D}_k)^{\circ l}s_\lambda)(x_1,\dots,x_N)}{s_\lambda(1,\dots,1)}\\ &= \sum_{\lambda\in\widehat{\mathrm{U}}_N} \mathbb{P}_N[\lambda]\,\left(\sum_{i=1}^N (\lambda_i+N-i)^k\right)^l \frac{s_\lambda(x_1,\dots,x_N)}{s_\lambda(1,\dots,1)};\\ \frac{1}{N^{l(k+1)}}\left((\mathscr{D}_k)^{\circ l}\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}\right)_{x_1=\cdots=x_N=1} &= \sum_{\lambda\in\widehat{\mathrm{U}}_N} \mathbb{P}_N[\lambda]\,\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\left(\frac{\lambda_i+N-i}{N}\right)^k\right)^l\\ &= \sum_{\lambda\in\widehat{\mathrm{U}}_N} \mathbb{P}_N[\lambda]\,\left(\int_{\mathbb{R}_+} x^k\,m_\lambda(dx)\right)^l = \mathbb{E}_N\left[\left(\int_{\mathbb{R}_+} x^k\,m_\lambda(dx)\right)^l\right].\end{aligned}$$

5. Compte tenu de la question précédente et par l'inégalité de Bienaymé–Chebyshev, sous les hypothèses de cette question, chaque moment aléatoire $M_{k,N} = \int_{\mathbb{R}_+} x^k\,m_{\lambda_N}(dx)$ converge en probabilité vers M_k. Supposons donné un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ sur lequel toutes les partitions aléatoires λ_N sont définies (comme fonctions de Ω vers $\widehat{\mathrm{U}}(N)$), de sorte qu'on ait la convergence *presque sûre* $M_{k,N} \to_{N\to\infty} M_k$. Alors, presque sûrement, la suite de mesures aléatoires $(m_{\lambda_N})_{N\geq 1}$ est tendue, car la suite des seconds moments $(M_{2,N})_{N\geq 1}$ est bornée. Soit $(m_{\lambda_{N_n}})_{n\geq 1}$ une sous-suite convergente en loi vers une mesure limite m. Cette mesure limite a tous ses moments, et $\int_{\mathbb{R}_+} x^k\,m(dx) = M_k$ pour tout $k\geq 1$. En effet, si X_n suit la loi $m_{\lambda_{N_n}}$ et X suit la loi m, alors $X_n \rightharpoonup_{n\to\infty} X$, donc $(X_n)^k \rightharpoonup_{n\to\infty} X^k$, et le caractère borné de la suite $(M_{2k,N})_{N\geq 1}$ implique que la suite $((X_n)^k)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable, et donc que la convergence en loi de $(X_n)^k$ a aussi lieu dans $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Ainsi, X^k est intégrable et

$$\int_{\mathbb{R}_+} x^k\,m(dx) = \mathbb{E}[X^k] = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[(X_n)^k] = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}_+} x^k m_{\lambda_{N_n}}(dx)\right) = M_k.$$

L'inégalité $|M_k|\leq k!\,C^k$ implique que la transformée de Laplace de m a un rayon de convergence non nul, et donc que m est l'unique mesure de probabilité avec pour moments les M_k. Comme on a unicité de la limite en loi d'une sous-suite convergente, la suite $(m_{\lambda_N})_{N\geq 1}$ converge en loi et en moments vers m (sans qu'on ait besoin d'extraire une sous-suite). Finalement, par le critère classique des sous-suites, on peut remplacer la convergence *presque sûre* $M_{k,N}\to_{N\to\infty} M_k$ des moments par une convergence *en probabilité*. On conclut donc qu'il existe une mesure m déterminée uniquement par les moments M_k, telle que $(m_{\lambda_N})_{N\geq 1}$ converge en probabilité (en loi, ainsi qu'en moments) vers m.

6. Puisque F est holomorphe autour de $z=1$, il existe une constante $A>0$ telle que $|F^{(k)}(1)|\leq k!\,A^{k+1}$ pour tout $k\geq 0$. Par la formule de Leibniz,

$$(z^k\,(F(z))^{k-l})^{(l)}\big|_{z=1} = \sum_{m=0}^{l}\binom{l}{m}\,k^{\downarrow m}\,\left((F(z))^{k-l})^{(l-m)}\right|_{z=1},$$

et

$$
\begin{aligned}
((F(z))^{k-l})^{(l-m)}\big|_{z=1} &= \sum_{\substack{l-m=u_1+\cdots+u_{k-l}\\ u_1,\ldots,u_{k-l}\geq 0}} \frac{(l-m)!}{u_1!\cdots u_{k-l}!} \prod_{i=1}^{k-l} F^{(u_i)}(1);\\
\big|((F(z))^{k-l})^{(l-m)}\big|_{z=1}\big| &\leq (l-m)!\,A^{k-m}\,\mathrm{card}\big(\{(u_1,\ldots,u_{k-l})\mid l-m=u_1+\cdots+u_{k-l}\}\big)\\
&\leq \frac{(k-m-1)!}{(k-l-1)!}\,A^{k-m} \leq \frac{(k-m)!}{(k-l)!}\,A^{k-m},
\end{aligned}
$$

le cardinal de l'ensemble des décompositions de $l-m$ en somme de $k-l$ entiers positifs ou nuls étant le coefficient binomial $\binom{k-m-1}{k-l-1}$. Par conséquent,

$$\big|(z^k\,(F(z))^{k-l})^{(l)}\big|_{z=1}\big| \leq k^{\downarrow l}\,A^k \sum_{m=0}^{l}\binom{l}{m}A^{-m} = k^{\downarrow l}\,A^{k-l}\,(A+1)^l.$$

On conclut que

$$|M_k| \leq \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\frac{k^{\downarrow l}}{(l+1)!}\,A^{k-l}\,(A+1)^l \leq k!\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\,A^{k-l}\,(A+1)^l = k!\,(2A+1)^k.$$

Remarquons qu'on peut en fait être un peu plus précis dans la dernière inégalité :

$$|M_k| \leq \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\frac{k^{\downarrow l}}{(l+1)!}\,A^{k-l}\,(A+1)^l \leq (A+1)^k\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}^2 = (A+1)^k\binom{2k}{k} \leq (4(A+1))^k$$

en utilisant la formule de Vandermonde pour la somme des carrés des coefficients binomiaux. Cette inégalité sans facteur $k!$ implique que la mesure limite m a un support *compact* inclus dans $[0,4(A+1)]$.

7. Le produit $F_\Pi\,V_n$ est un polynôme antisymétrique en n variables, car

$$
\begin{aligned}
F_\Pi\,V_n &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(n)} \frac{F(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})}{\prod_{(a,b)\in\Pi}(x_{\sigma(a)}-x_{\sigma(b)})}\prod_{a<b}(x_a-x_b)\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma)\,\frac{F(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})}{\prod_{(a,b)\in\Pi}(x_{\sigma(a)}-x_{\sigma(b)})}\prod_{a<b}(x_{\sigma(a)}-x_{\sigma(b)})\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma)\,F(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})\prod_{(a,b)\notin\Pi}(x_{\sigma(a)}-x_{\sigma(b)})
\end{aligned}
$$

est l'antisymétrisé du polynôme $F(x_1,\ldots,x_n)\prod_{(a,b)\notin\Pi}(x_a-x_b)$. Ceci implique que F_Π est un polynôme symétrique, puisque $P\mapsto P\,V_n$ est un isomorphisme entre l'espace des polynômes symétriques en n variables, et celui des polynômes antisymétriques.

8. On a par définition

$$F_\Pi(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(n)}\frac{f(x_{\sigma(1)})}{\prod_{j=2}^{n}(x_{\sigma(1)}-x_{\sigma(j)})}.$$

Chaque terme ne dépend que de l'image $i = \sigma(1)$, et pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, il y a $(n-1)!$ permutations σ telles que $i = \sigma(1)$. Toutes ces permutations donnent la même fraction $\frac{f(x_i)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$, donc

$$n\, F_\Pi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_n)}.$$

D'après la généralisation admise de la question 7, cette quantité est holomorphe au voisinage de $1^{(n)}$, donc la limite lorsque $(x_1, \ldots, x_n)$ tend vers $1^{(n)}$ ne dépend pas du choix de la suite, et on peut par exemple prendre $x_i = 1 + \varepsilon(i-1)$ avec $\varepsilon \to 0$. On écrit alors :

$$f(x_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}\,(i-1)^k\,\varepsilon^k + O(\varepsilon^n);$$

$$\prod_{j \neq i}(x_i - x_j) = \prod_{j=1}^{i-1}(\varepsilon(i-j)) \prod_{j=i+1}^{n}(\varepsilon(i-j)) = \varepsilon^{n-1}\,(i-1)!\,(n-i)!\,(-1)^{n-i},$$

d'où la formule recherchée.

9. On remarque que

$$g(z) = \frac{(z-1)^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}\,\frac{z^j}{j!\,(n-1-j)!}$$

a toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $k = n-2$ nulles en $z = 1$, et que $g^{(n-1)}(1) = 1$. Or,

$$g^{(k)}(1) = \sum_{j=0}^{n-1} j^{\downarrow k}\,\frac{(-1)^{n-1-j}}{j!\,(n-1-j)!}.$$

La somme à droite est presque égale à celle recherchée, mais il y a une factorielle décroissante $j^{\downarrow k} = j(j-1)\cdots(j-k+1)$ au lieu d'une puissance j^k. On peut néanmoins réaliser un changement de base triangulaire dans l'espace des polynômes de degré inférieur à $n-1$:

$$j^k = j^{\downarrow k} + \text{combinaison linéaire de } j^{\downarrow k'} \text{ avec } k' < k.$$

Ceci implique que $\sum_{j=0}^{n-1} j^k\,\frac{(-1)^{n-1-j}}{j!\,(n-1-j)!} = 0$ si $k \leq n-2$, et

$$\sum_{j=0}^{n-1} j^{n-1}\,\frac{(-1)^{n-1-j}}{j!\,(n-1-j)!} = \sum_{j=0}^{n-1} j^{\downarrow(n-1)}\,\frac{(-1)^{n-1-j}}{j!\,(n-1-j)!} = g^{(n-1)}(1) = 1.$$

Or, la limite de la question précédente est celle lorsque ε vers 0 de

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}\left(\sum_{j=0}^{n-1} j^k\,\frac{(-1)^{n-1-j}}{j!\,(n-1-j)!}\right)\varepsilon^{k-(n-1)} + O(\varepsilon).$$

Tous les termes de la somme s'annulent sauf celui d'indice $k = n-1$, donc la limite est simplement $\frac{f^{(n-1)}(1)}{(n-1)!}$.

10. Traitons d'abord le cas $l=1$. Puisque $\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)=\exp(N\sum_{i=1}^N U(x_i))\,T_N(x_1,\ldots,x_N)$,

$$\mathscr{D}_k\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)=\frac{1}{V_N}\sum_{t=1}^N (x_t\,\partial_t)^k\left(V_N\,T_N\,\exp\left(N\sum_{i=1}^N U(x_i)\right)\right).$$

Lorsqu'on applique un opérateur $(x_t\,\partial_t)^k$ à $V_N\,T_N\,\exp(N\sum_{i=1}^N U(x_i))$, on obtient une somme de termes de la forme

$$(x_t)^{k-D_t}\,(\partial_t^{C_t}V_N)\,(\partial_t^{B_t}T_N)\,\left(\partial_t^{A_t}\exp\left(N\sum_{i=1}^N U(x_i)\right)\right)$$

avec $A_t+B_t+C_t+D_t=k$ et $D_t\leq k-1$. Le terme $\partial_t^{C_t}V_N$ est une somme signée de termes $\prod_{(a,b)\notin\Pi_t}(x_a-x_b)$, où Π_t est un ensemble de taille C_t de paires de la forme (s,t) avec $s<t$, ou de la forme (t,u) avec $t<u$. En redivisant par V_N, on obtient dont :

$$\mathscr{D}_k\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)=\sum\pm\frac{(x_t)^{k-D_t}}{\prod_{(a,b)\in\Pi_t}(x_a-x_b)}\,(\partial_t^{B_t}T_N)\,\left(\partial_t^{A_t}\exp\left(N\sum_{i=1}^N U(x_i)\right)\right).$$

Supposons maintenant que l'on applique $l\geq 1$ fois l'opérateur $\mathscr{D}_k$ à la fonction génératrice de Schur. Alors, on obtient une somme signée de termes de la forme

$$\frac{(x_{t_1})^{k-D_{t_1}}\cdots(x_{t_l})^{k-D_{t_l}}}{\prod_{(a,b)\in\Pi}(x_a-x_b)}\,(\partial_{t_1}^{B_{t_1}}\cdots\partial_{t_l}^{B_{t_l}}T_N)\,\left(\partial_{t_1}^{A_{t_1}}\cdots\partial_{t_l}^{A_{t_l}}\exp\left(N\sum_{i=1}^N U(x_i)\right)\right)$$

avec éventuellement des répétitions dans l'ensemble $\{t_1,\ldots,t_l\}$, et Π ensemble de paires (a,b) tel que chaque paire contient l'un des indices t_i. De plus, $\mathrm{card}(\Pi)+\sum_{i=1}^l(D_{t_i}+B_{t_i}+A_{t_i})=kl$. En renommant les indices, ceci démontre la forme recherchée pour $(\mathscr{D}_k)^{\circ l}\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}$. Le seul point à préciser est pourquoi si une variable x_{g_i} apparaît, alors l'indice g_i appartient aussi à l'ensemble $\{a_1,\ldots,a_\alpha,b_1,\ldots,b_\beta\}\cup\Pi^*$. C'est parce que $D_t\leq k-1$ dans le cas $l=1$, ce qui implique que A_t, B_t ou C_t est positif.

11. Fixer un type T revient à fixer les entiers α,β,γ et $|\Pi|$ ainsi que les éventuelles identités d'indices. Comme tous ces entiers sont bornés, on n'a qu'un nombre fini de possibilités pour T, et le nombre de termes correspondants est alors égal à $N^{\downarrow|T|}$. Fixons maintenant un support S et un type T, et examinons la contribution correspondante dans $\lim_{x_1,\ldots,x_N\to 1}\frac{(\mathscr{D}_k)^{\circ l}\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)}{\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)}$. On a :

$$\begin{aligned}&\frac{(\mathscr{D}_k)^{\circ l}\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)}{\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)}\\&=\sum\pm\frac{x_{g_1}\cdots x_{g_\gamma}}{\prod_{(a,b)\in\Pi}(x_a-x_b)}\,\frac{\partial_{a_1}\cdots\partial_{a_\alpha}\exp(N\sum_{i=1}^N U(x_i))}{\exp(N\sum_{i=1}^N U(x_i))}\,\frac{\partial_{b_1}\cdots\partial_{b_\beta}T_N(x_1,\ldots,x_N)}{T_N(x_1,\ldots,x_N)}.\end{aligned}$$

Si le support S d'un terme t est fixé, alors dans le calcul de $\lim_{x_1,\ldots,x_N\to 1}\frac{(\mathscr{D}_k)^{\circ l}\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)}{\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)}$, on peut d'abord faire tendre vers 1 toutes les variables x_i avec $i\notin S$, pour obtenir :

$$\lim_{x_{i\in S}\to 1}\frac{x_{g_1}\cdots x_{g_\gamma}}{\prod_{(a,b)\in\Pi}(x_a-x_b)}\,\frac{\partial_{a_1}\cdots\partial_{a_\alpha}\exp(N\sum_{i\in S}U(x_i))}{\exp(N\sum_{i\in S}U(x_i))}\,\frac{\partial_{b_1}\cdots\partial_{b_\beta}T_N(x_{i\in S},1^{(N-|T|)})}{T_N(x_{i\in S},1^{(N-|T|)})}.$$

Supposons d'abord $\beta = 0$, de sorte que le dernier terme de cet expression disparaît. Alors,

$$\begin{aligned}\frac{\partial_{a_1}\cdots\partial_{a_\alpha}\exp(N\sum_{i\in S}U(x_i))}{\exp(N\sum_{i\in S}U(x_i))} &= N^\alpha\, U'(x_{a_1})\cdots U'(x_{a_\alpha}) + O(N^{\alpha-1})\\ &= N^\alpha\, F(x_{a_1})\cdots F(x_{a_\alpha}) + O(N^{\alpha-1}).\end{aligned}$$

Par ailleurs, si l'on considère tous les termes de support S et de type T fixé, alors la limite lorsque $x_{i\in S} \to 1$ des sommes des termes $\frac{x_{g_1}\cdots x_{g_\gamma}}{\prod_{(a,b)\in\Pi}(x_a - x_b)}$ est la limite d'une fonction du type $F_\Pi(x_{i\in S})$ en $1^{|T|}$, donc elle existe par la question 7 et ne dépend que du type T. On obtient donc bien l'estimée souhaitée lorsque $\beta = 0$. Supposons maintenant $\beta \geq 1$; alors, les mêmes raisonnements tiennent, mais avec le facteur additionnel

$$\frac{\partial_{b_1}\cdots\partial_{b_\beta}T_N(x_{i\in S}, 1^{(N-|T|)})}{T_N(x_{i\in S}, 1^{(N-|T|)})} = o(N)$$

d'après la question 2. On en déduit une estimée d'ordre $o(N^{\alpha+1})$ dans ce cas. En multipliant par $N^{\downarrow|T|}$, on en déduit que dans $\lim_{x_1,\ldots,x_N\to 1}\frac{(\mathscr{D}_k)^{\circ l}\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)}{\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)}$, la contribution des termes avec type T fixé s'écrit

$$\begin{cases} C(T)\,N^{\alpha+|T|} + O(N^{\alpha+|T|-1}) & \text{si } \beta = 0,\\ o(N^{\alpha+|T|+1}) & \text{si } \beta \geq 1,\end{cases}.$$

12. Estimons d'abord la taille du support d'un terme de type T. En examinant la solution de la question 10, on voit que le support d'un terme contient $\{a_1,\ldots,a_\alpha,b_1,\ldots,b_\beta\}$, plus éventuellement un terme par paire dans Π, car chaque paire dans Π doit intersecter l'ensemble d'indices $\{t_1,\ldots,t_l\}$. On a donc

$$|T| \leq \mathrm{card}(\Pi) + \mathrm{card}(\{a_1,\ldots,a_\alpha,b_1,\ldots,b_\beta\}) \leq \mathrm{card}(\Pi) + l.$$

Supposons maintenent $\beta \geq 1$. Alors,

$$\alpha + |T| + 1 \leq \mathrm{card}(\Pi) + \alpha + \beta + l \leq kl + l = (k+1)l.$$

car $\mathrm{card}(\Pi) + \alpha + \beta + (kl - \gamma) = kl$ (avec $0 \leq \gamma \leq kl$). D'après la question précédente, les contributions correspondantes donnent donc un $o(N^{(k+1)l})$. Examinons maintenant le cas $\beta = 0$. On a dans ce cas une contribution d'ordre $O(N^{\alpha+|T|})$, et

$$\alpha + |T| \leq \alpha + \mathrm{card}(\Pi) + l \leq kl + l = (k+1)l.$$

Ceci implique bien l'estimée globale $O(N^{(k+1)l})$, et les termes importants sont ceux pour lesquels $\beta = 0$.

13. Si l'on conserve seulement les termes avec $\beta = 0$, alors ceci revient à effacer le facteur T_N, donc pour tous $k, l \geq 1$,

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^{(k+1)l}}\left(\lim_{x_1,\ldots,x_N\to 1}\frac{(\mathscr{D}_k)^{\circ l}\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)}{\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)}\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^{(k+1)l}}\left(\lim_{x_1,\ldots,x_N\to 1}\frac{(\mathscr{D}_k)^{\circ l}(\exp(N\sum_{i=1}^N U(x_i)))}{\exp(N\sum_{i=1}^N U(x_i))}\right).\end{aligned}$$

Regardons maintenant en détail le cas $l = 1$. On a :

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}_k \left(\exp\left(N \sum_{i=1}^N U(x_i) \right) \right) \\
&= \frac{1}{V_N} \sum_{t=1}^N (x_t \partial_t)^k \left(V_N \exp\left(N \sum_{i=1}^N U(x_i) \right) \right) \\
&= \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1<k}} \frac{C(k,k_1)\, k!}{k_2!\, k_3!} \, (x_t)^{k-k_1} \, \frac{((\partial_t)^{k_2} V_N)}{V_N} \left((\partial_t)^{k_3} \left(\exp\left(N \sum_{i=1}^N U(x_i) \right) \right) \right),
\end{aligned}$$

où $C(k,k_1)$ est un certain facteur combinatoire positif correspondant aux produits d'entiers apparaissant lorsqu'on dérive des puissances de x_t ; nous aurons seulement besoin de la valeur $C(k,0) = 1$. On a

$$\frac{(\partial_t)^{k_2} V_N}{V_N} = \sum_{t \neq t_1 \neq t_2 \neq \cdots \neq t_{k_2}} \frac{1}{(x_t - x_{t_1})(x_t - x_{t_2}) \cdots (x_t - x_{t_{k_2}})},$$

tandis que la contribution principale des dérivées de l'exponentielle est

$$N^{k_3} \, (F(x_t))^{k_3} \, \exp\left(N \sum_{i=1}^N U(x_i) \right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{k+1}} \left(\lim_{x_1,\ldots,x_N \to 1} \frac{(\mathscr{D}_k)^{\circ l} \mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)}{\mathcal{S}_{\mathbb{P}_N}(x_1,\ldots,x_N)} \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{k+1}} \left(\sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1<k}} \sum_{t \neq t_1 \neq t_2 \neq \cdots \neq t_{k_2}} N^{k_3} \frac{C(k,k_1)\, k!}{k_2!\, k_3!} \lim_{x_t, x_{t_1}, \ldots, x_{t_{k_2}} \to 1} \frac{(x_t)^{k-k_1} \, (F(x_t))^{k_3}}{\prod_{i=1}^{k_2} (x_t - x_{t_i})} \right).
\end{aligned}$$

Par les questions 8 et 9, si l'on fixe des indices $t, t_1, \ldots, t_{k_2}$ tous distincts, alors la limite de

$$Sym\left(\frac{(x_t)^{k-k_1} \, (F(x_t))^{k_3}}{\prod_{i=1}^{k_2} (x_t - x_{t_i})} \right)$$

lorsque tous les paramètres tendent vers 1 est $\left.\frac{(x^{k-k_1}\,(F(x))^{k_3})^{(k_2)}}{(k_2+1)!}\right|_{x=1}$. L'expression que l'on manipule est bien symétrique en les variables $x_t, x_{t_1}, \ldots, x_{t_{k_2}}$, donc on peut bien utiliser cette valeur limite, et en comptant les $N^{\downarrow(k_2+1)}$ possibilités pour les indices $t, t_1, \ldots, t_{k_2}$, on voit donc que la limite recherchée est :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{k+1}} \left(\sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1<k}} N^{k_2+k_3+1} \frac{C(k,k_1)\, k!}{k_2!\, (k_2+1)!\, k_3!} \, \left.(x^{k-k_1} \, (F(x))^{k_3})^{(k_2)}\right|_{x=1} \right).$$

Seuls les termes pour lesquels $k_2 + k_3 = k$ subsistent, donc avec $k_1 = 0$. En notant $l = k_2$ et $k - l = k_3$, on obtient bien l'expression annoncée pour M_k.

14. La formule de Frobenius–Schur appliquée à la fonction $(p_1)^n$ donne :

$$(p_1(X))^n = \sum_{|\lambda|=n}^{\lambda} (1^{(n)})\, s_\lambda(X) = \sum_{|\lambda|=n} (\dim \lambda)\, s_\lambda(X).$$

En remplaçant l'alphabet de variables X par $1^{(N)}$, on obtient :

$$N^n = \sum_{|\lambda|=n} (\dim \lambda)\, s_\lambda(1^{(N)}),$$

et l'énoncé indique que tous les termes de la somme sont nuls. Il reste à voir pourquoi si $\ell(\lambda) > N$, alors $s_\lambda(1^{(N)}) = 0$; dans ce cas, la somme portera bien sur les partitions de taille n et de longueur plus petite que N. Voici un argument reposant uniquement sur le contenu du cours (il y a d'autres preuves plus naturelles si l'on en sait plus sur les fonctions de Schur). Si $\ell = \ell(\lambda) > N$, alors

$$s_\lambda(1^{(N)}) = s_\lambda(1^{(N)}, 0^{(\ell-N)}) = \lim_{x_1,\ldots,x_N \to 1,\ \eta \to 0} \frac{a_{\lambda+\rho}(x_1,\ldots,x_N,\eta^{\ell-N},\eta^{\ell-N-1},\ldots,\eta)}{a_\rho(x_1,\ldots,x_N,\eta^{\ell-N},\eta^{\ell-N-1},\ldots,\eta)}$$

avec $\rho = (\ell-1,\ell-2,\ldots,0)$. Comme la fonction de Schur est un polynôme, on peut choisir arbitrairement la façon dont $x_1,\ldots,x_N$ tendent vers 1 dans cette expression. Remarquons maintenant que pour toute partition μ avec toutes ses parts distinctes et de longueur ℓ,

$$\begin{aligned}
a_\mu(x_1,\ldots,x_N,\eta^{\ell-N},\ldots,\eta) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(\ell)} \varepsilon(\sigma)\, (x_1)^{\mu_{\sigma(1)}} \cdots (x_N)^{\mu_{\sigma(N)}}\, \eta^{\sum_{N<j\leq \ell}(1+\ell-j)\mu_{\sigma(j)}} \\
&= \sum_{d \geq (\ell-N)\mu_{N+1}+(\ell-N-1)\mu_{N+2}+\cdots+\mu_\ell} \eta^d\, A_{d,\mu}(x_1,\ldots,x_N),
\end{aligned}$$

où les $A_{d,\mu}$ sont des polynômes antisymétriques en les variables $x_1,\ldots,x_N$. En effet, la puissance minimale de η qui peut apparaître est obtenue uniquement lorsque la permutation σ est l'identité sur $[\![N+1,\ell]\!]$. Si les x_i restent bornés, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
&a_\mu(x_1,\ldots,x_N,\eta^{\ell-N},\ldots,\eta) \\
&= a_{(\mu_1,\ldots,\mu_N)}(x_1,\ldots,x_N)\, \eta^{(\ell-N)\mu_{N+1}+\cdots+\mu_\ell} + O(\eta^{(\ell-N)\mu_{N+1}+\cdots+\mu_\ell+1}).
\end{aligned}$$

On choisit des x_i proches de 1 mais de sorte que $a_{(\ell-1,\ldots,\ell-N)}(x_1,\ldots,x_N) \neq 0$: par exemple, si l'on prend $x_i = q^i$ avec q proche de 1, alors la fonction antisymétrique est un déterminant de Vandermonde non nul. On obtient maintenant :

$$\begin{aligned}
s_\lambda(1^{(N)}) &= \lim_{x_1,\ldots,x_N \to 1,\ \eta \to 0} \frac{a_{(\lambda_1+\ell-1,\ldots,\lambda_N+\ell-N)}(x_1,\ldots,x_N)}{a_{(\ell-1,\ldots,\ell-N)}(x_1,\ldots,x_N)}\, \eta^{(\ell-N)\lambda_{N+1}+\cdots+\lambda_\ell} \\
&= \lim_{x_1,\ldots,x_N \to 1,\ \eta \to 0} s_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)}(x_1,\ldots,x_N)\, \eta^{(\ell-N)\lambda_{N+1}+\cdots+\lambda_\ell} \\
&= s_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)}(1^{(N)}) \left(\lim_{\eta \to 0} \eta^{(\ell-N)\lambda_{N+1}+\cdots+\lambda_\ell} \right) = 0,
\end{aligned}$$

puisque l'une des parts $\lambda_{N+1},\ldots,\lambda_\ell$ est non nulle par hypothèse. En fait, exactement avec le même argument, on montre que $s_\lambda(x_1,\ldots,x_N)$ est le polynôme nul si $\ell(\lambda) > N$.

15. La fonction génératrice de la mesure de Schur–Weyl $\mathbb{P}_{N,n}$ s'écrit

$$\mathcal{S}_{\mathbb{P}_{N,n}}(x_1,\ldots,x_N) = \frac{1}{N^n} \sum_{|\lambda|=n} (\dim \lambda)\, s_\lambda(x_1,\ldots,x_N) = \left(\frac{p_1(x_1,\ldots,x_N)}{N}\right)^n.$$

Alors,

$$\frac{\log \mathcal{S}_{\mathbb{P}_{N,n}}(x_1,\ldots,x_k,1^{N-k})}{N} = \frac{n}{N}\,\log\left(1+\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i-1}{N}\right);$$
$$\frac{\partial_1 \log \mathcal{S}_{\mathbb{P}_{N,n}}(x_1,\ldots,x_k,1^{N-k})}{N} = \frac{n}{N^2}\,\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i-1}{N}}.$$

Lorsque $n \simeq cN^2$, les hypothèses du théorème sont donc vérifiées avec la fonction holomorphe limite $F(z) = c$ (fonction constante). On en déduit que m_{λ_N} converge vers une mesure limite m_c sur $\mathbb{R}_+$, qui est caractérisée par les moments

$$M_k = \int_{\mathbb{R}_+} x^k\, m_c(dx) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l}^2 \frac{c^{k-l}}{l+1}.$$