Durée : 3 heures. Les documents sont autorisés, mais sont interdits : livres, calculatrices, téléphones, ordinateurs ou objets apparentés. Toutes les réponses doivent être justifiées, et la rédaction sera prise en compte. Les exercices sont totalement indépendants. Au sein d'un exercice, sauf si le contraire est explicitement mentionné, il est permis d'utiliser tout résultat qui apparaît dans le cours ou qui a été énoncé dans une question précédente, même si cette question n'a pas été traitée.

Exercice 1. Des processus de Poisson au mouvement brownien. Soit $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus de Poisson d'intensité 1. On pose :

$$W_t^{(n)} = \frac{N_{nt} - nt}{\sqrt{n}}.$$

Montrer que les processus renormalisés $(W^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ vers un mouvement brownien standard.

Exercice 2. Lois infiniment divisibles sur $\mathbb{N}$. Dans tout l'exercice, μ est une loi sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, et infiniment divisible *sur cet ensemble* : pour tout $n \geq 1$, il existe une loi ρ_n également supportée par $\mathbb{N}$ et telle que $\mu = (\rho_n)^{*n}$.

1. On note $(X_t)_{t\geq 0}$ le processus de Lévy associé à μ. Montrer que ce processus prend presque sûrement ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

2. Soit (a, σ^2, ν) le triplet de Lévy–Khinchine de μ. Que valent a et σ^2 ? Montrer que la mesure de Lévy ν est une mesure de masse finie supportée par $\mathbb{N}^*$.

3. Montrer que pour tout $s \in [0, 1)$, on a

$$\log\left(\int_{\mathbb{R}} s^x\, \mu(dx)\right) = \sum_{a=1}^{\infty} (s^a - 1)\, \nu(\{a\}).$$

L'objectif de la suite de l'exercice est de retrouver cette identité de façon élémentaire, sans utiliser la formule de Lévy–Khintchine et la théorie des processus de Lévy.

4. Montrer que la suite de mesures positives $(n\, \rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue sur $\mathbb{N}$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} n\, \rho_n(\{M, M+1, M+2, \ldots\}) \leq \varepsilon.$$

   Les mesures $n\, \rho_n$ ne sont pas des mesures de probabilité, mais on pourra :
   - adapter les arguments utilisés dans la preuve du théorème de Lévy, en particulier l'inégalité reliant la queue d'une distribution et sa transformée de Fourier.
   - utiliser l'inégalité $|\mathrm{e}^z - 1| \leq |z|\, \mathrm{e}^{|z|}$, valable pour tout nombre complexe z.

5. Montrer qu'il existe une mesure ν de masse finie sur $\mathbb{N}$ et une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, telles que pour toute partie $A \subset \mathbb{N}$,

$$\lim_{k\to\infty} n_k\, \rho_{n_k}(A) = \nu(A).$$

6. Retrouver la formule de la question 2., et montrer (sans utiliser les résultats du cours) que la mesure ν apparaissant dans cette formule est unique.

Exercice 3. Convergence de lois ID et de processus de Lévy. Dans tout l'exercice, on note (a, σ^2, ν) le triplet de Lévy–Khintchine associé à une loi infiniment divisible μ :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\, \mu(dx) = \exp\left(\mathrm{i}a\xi - \frac{\sigma^2\xi^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} - 1 - 1_{(-1,1)}(x)\,\mathrm{i}x\xi)\,\nu(dx)\right).$$

On a montré en cours le critère de convergence en loi suivant : étant fixée une fonction de coupure $c(x)$ continue, égale à 1 au voisinage de 0 et à 0 en dehors de $(-1,1)$, une suite de lois infiniment divisibles $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de triplets $(a_k, \sigma_k^2, \nu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers μ de triplet (a, σ^2, ν) si et seulement si :

— $a_k \to_{k\to\infty} a$;

— $\sigma_k^2 + \int_{\mathbb{R}} c(x)\, x^2\, \nu_k(dx) = \widetilde{\sigma}_k^2 \to_{k\to\infty} \widetilde{\sigma}^2 = \sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} c(x)\, x^2\, \nu(dx)$;

— si g est continue, bornée et s'annule en 0, $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2)\, g(x)\, \nu_k(dx) \to_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2)\, g(x)\, \nu(dx)$.

1. Montrer qu'une suite de lois infiniment divisibles $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de triplets $(a_k, \sigma_k^2, \nu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers μ de triplet (a, σ^2, ν) si et seulement si :

$$a_k \to_{k\to\infty} a \qquad \text{et} \qquad \sigma_k^2\, \delta_0 + (1 \wedge x^2)\, \nu_k(dx) \rightharpoonup_{k\to\infty} \sigma^2\, \delta_0 + (1 \wedge x^2)\, \nu(dx),$$

   où la flèche $\rho_k \rightharpoonup_{k\to\infty} \rho$ indique que $\rho_k(f) \to_{k\to\infty} \rho(f)$ pour toute fonction f continue bornée (c'est la même définition que pour la convergence en loi des mesures de probabilités, mais ici avec des mesures positives finies qui n'ont pas forcément masse 1).

Dans la suite de l'exercice et jusqu'à la fin de la question 4., toutes les mesures infiniment divisibles μ_k ou μ avec lesquelles on travaillera auront des mesures de Lévy ν_k ou ν supportées par le segment $[-1, 1]$.

2. Soit ρ une mesure positive finie et de support borné, et $(M_t)_{t\geq 0}$ le processus de Poisson composé d'intensité ρ. Donner en fonction des moments de ρ les valeurs de

$$\mathbb{E}[M_t],\ \mathbb{E}[(M_t - \mathbb{E}[M_t])^2] \text{ et } \mathbb{E}[(M_t - \mathbb{E}[M_t])^4].$$

   On pourra utiliser sans démonstation le fait que si X est une variable aléatoire avec des moments d'ordre 4, alors on a le développement de Taylor

$$\log \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi X}] = \mathrm{i}\xi\, \mathbb{E}[X] - \frac{\xi^2}{2}\, \mathbb{E}[\overline{X}^2] + \frac{(\mathrm{i}\xi)^3}{6}\, \mathbb{E}[\overline{X}^3] + \frac{\xi^4}{24}\left(\mathbb{E}[\overline{X}^4] - 3(\mathbb{E}[\overline{X}^2])^2)\right) + o(\xi^4)$$

   avec $\overline{X} = X - \mathbb{E}[X]$.

3. Soit μ infiniment divisible de triplet (a, σ^2, ν) avec $\nu(\mathbb{R} \setminus [-1, 1]) = 0$. On note $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy tel que X_1 ait pour loi μ. En utilisant la décomposition de Lévy–Itô, montrer que

$$\mathbb{E}[(X_t)^2]$$

   est un polynôme de degré 2 en t dont on précisera les termes en fonction de a, σ^2 et ν. On pourra utiliser le fait que la série correspondant aux petits sauts dans la décomposition de Lévy–Itô converge p.s. et dans tous les espaces $\mathscr{L}^p$ pour $p \geq 2$.

4. Soit $(\mu^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de lois infiniment divisibles avec des mesures de Lévy supportées par $[-1,1]$. On note μ une autre telle loi infiniment divisible, et $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et X les processus de Lévy associés : $X_1^{(k)}$ a loi $\mu^{(k)}$ et X_1 a loi μ. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   - On a la convergence faible $\mu^{(k)} \rightharpoonup_{k\to\infty} \mu$.
   - On a convergence en loi de $X^{(k)}$ vers X dans l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ des processus càdlàg.

   Si besoin, on pourra traiter la question en remplaçant $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ par $\mathcal{D}([0,1])$ (le même nombre de points sera attribué le cas échéant).

Pour cette dernière question, on ne suppose plus que les mesures de Lévy ν_k ou ν sont supportées par $[-1,1]$. Par ailleurs, des points pourront être accordés pour des arguments partiels et pas entièrement justifiés.

5. Expliquer comment retirer l'hypothèse des mesures de Lévy supportées par $[-1,1]$ dans le résultat de la question précédente. En déduire un homémorphisme naturel entre les deux parties fermées suivantes :
   - l'ensemble **ID** des lois infiniment divisibles, qui est une partie de $\mathscr{M}^1(\mathbb{R})$;
   - l'ensemble **Lévy** des lois de processus de Lévy, qui est une partie de $\mathscr{M}^1(\mathcal{D}(\mathbb{R}_+))$.

Corrigé de l'exercice 1. On va appliquer le critère de Kolmogorov discontinu pour vérifier la tension des processus $W^{(n)}$; notons que ce critère peut s'appliquer indifféremment dans un espace $\mathcal{D}([0,T])$ et dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. En remarquant que les processus $W^{(n)}$ sont tous à accroissements indépendants et stationnaires, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[(W_t^{(n)}-W_s^{(n)})^2(W_s^{(n)}-W_r^{(n)})^2\Big] &= \mathbb{E}\Big[(W_t^{(n)}-W_s^{(n)})^2\Big]\ \mathbb{E}\big[(W_s^{(n)}-W_r^{(n)})^2\big] \\ &= \frac{1}{n^2}\operatorname{var}(\mathcal{P}(n(t-s)))\operatorname{var}(\mathcal{P}(n(s-r))) \\ &= (t-s)(s-r) \leq (t-r)^2\end{aligned}$$

pour tous temps $r \leq s \leq t$. L'exposant du dernier terme est $b = 2 > 1$, donc le critère s'applique bien et $(W^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires tendue dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. Il reste à vérifier la convergence des lois fini-dimensionnelles vers celles d'un mouvement brownien. Comme les $W^{(n)}$ et le mouvement brownien W sont à accroissements indépendants et stationnaires, il suffit de vérifier que $W_t^{(n)}$ tend en loi vers un gaussienne $\mathcal{N}(0,t)$ pour tout temps t. C'est un résultat bien connu pour les grandes variables de Poisson, qu'on peut par exemple reprouver en calculant les transformées de Fourier :

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi W_t^{(n)}}] = \mathrm{e}^{nt\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\xi}{\sqrt{n}}}-1-\mathrm{i}\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)} \to_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t\xi^2}{2}}.$$

Corrigé de l'exercice 2.

1. Si $t = \frac{p}{q}$ est rationnel, alors la loi de X_t est $(\rho_q)^{*p}$, donc c'est une puissance convolée d'une mesure sur $\mathbb{N}$ et elle est supportée par $\mathbb{N}$. On en déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{Q}_+,\ \ \mathbb{P}[X_t \in \mathbb{N}] = 1$$

et puisque les rationnels sont dénombrables, on peut échanger la place du quantificateur :

$$\mathbb{P}[\forall t \in \mathbb{Q}_+,\ \ X_t \in \mathbb{N}] = 1.$$

Maintenant, $\mathbb{N}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}_+$, et $(X_t)_{t\geq 0}$ est càdlàg, donc l'événement ci-dessus implique (par exemple en utilisant la continuité à droite) que $X_t \in \mathbb{N}$ pour tout temps t dans $\mathbb{R}_+$. Ainsi,

$$\mathbb{P}[\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \ X_t \in \mathbb{N}] = 1.$$

2. Comme μ est infiniment divisible (sur $\mathbb{N}$, donc *a fortiori* au sens usuel sur $\mathbb{R}$) et supportée par une partie de $\mathbb{R}_+$, on est dans le cadre de la théorie des subordinateurs et on sait que $a \in \mathbb{R}_+$, $\sigma^2 = 0$, et ν est supportée par $\mathbb{R}_+^*$ et intègre $\min(1,x)$. Ensuite, on sait que les sauts de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ forment un processus ponctuel de Poisson d'intensité ν. Or, d'après la question précédente, tous ces sauts sont des sauts entiers, donc ν est supportée par $\mathbb{N}^*$. La condition "intégrer $\min(1,x)$" devient pour une mesure supportée par une partie ne contenant pas de voisinage de 0 "être de masse finie". Finalement, la loi du nombre de sauts de $(X_t)_{t\geq 0}$ dans l'intervalle $[0,1]$ est maintenant connue : c'est une loi de Poisson de paramètre $\nu(\mathbb{N}^*)$. En particulier, il y a une probabilité non nulle qu'il n'y ait aucun saut dans cet intervalle, et ceci force $a = 0$, car sur cet événement $X_t = at$, mais on doit aussi rester presque sûrement sur des valeurs entières. Conclusion : $a = \sigma^2 = 0$ et ν est une mesure finie sur $\mathbb{N}^*$. De plus, $(X_t)_{t\geq 0}$ est le processus de Poisson composé d'intensité ν.

3. Si $X = X_1$, alors on a la représentation en loi $X = \sum_{i=1}^N S_i$, où N est une variable de Poisson de paramètre $\nu(\mathbb{N}^*)$, et où les S_i sont les sauts de $(X_t)_{t\geq 0}$ sur l'intervalle de temps $[0,1]$ et sont des variables de Poisson de loi ν_{norm}. Alors, un calcul par conditionnement donne :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[s^X] &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[s^{\sum_{i=1}^N S_i}\,|\,N\Big]\Big] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{a=1}^\infty s^a\,\nu_{\mathrm{norm}}(a)\right)^N\right]\\ &= \exp\left(\nu(\mathbb{N}^*)\left(\sum_{a=1}^\infty s^a\,\nu_{\mathrm{norm}}(a)-1\right)\right) = \exp\left(\sum_{a=1}^\infty (s^a-1)\,\nu(a)\right).\end{aligned}$$

4. On utilise comme dans la preuve du théorème de Lévy l'inégalité
$$1_{|\delta x|>2} \leq \frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} (1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi})\,d\xi.$$
En intégrant ceci contre la mesure positive ρ_n, et en posant $\delta = \frac{2}{M}$, on obtient
$$n\,\rho_n([\![M,+\infty]\!]) \leq \frac{Mn}{2}\int_{-\frac{2}{M}}^{\frac{2}{M}} (1-\widehat{\rho_n}(\xi))\,d\xi = \frac{M}{2}\int_{-\frac{2}{M}}^{\frac{2}{M}} n\left(1-(\widehat{\mu}(\xi))^{\frac{1}{n}}\right)\,d\xi.$$
Fixons M suffisamment grand tel que $\widehat{\mu}$ reste proche de $\widehat{\mu}(0)=1$ sur tout l'intervalle $[-\frac{2}{M},\frac{2}{M}]$; c'est possible car $\xi \mapsto \widehat{\mu}(\xi)$ est continue. On peut alors utiliser sans ambiguïté le logarithme complexe de $\widehat{\mu}(\xi)$, et écrire
$$n\left|(\widehat{\mu}(\xi))^{\frac{1}{n}}-1\right| = n\,\left|\mathrm{e}^{\frac{\log\widehat{\mu}(\xi)}{n}}-1\right| \leq |\log\widehat{\mu}(\xi)|\;\mathrm{e}^{\frac{|\log\widehat{\mu}(\xi)|}{n}} \leq C\;|\log\widehat{\mu}(\xi)|\,,$$
où C est une constante (dépendant de μ et du choix d'un seuil M_0 tel que $M\geq M_0$). Ainsi,
$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(n\,\rho_n([\![M,+\infty]\!])\right) \leq 2C \sup_{\xi\in[-\frac{2}{M},\frac{2}{M}]} |\log\widehat{\mu}(\xi)|\,.$$
Le terme de droite tend vers 0 lorsque M tend vers l'infini, donc on a bien tension de la suite de mesures positives $(n\,\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. La question précédente implique en particulier que les suites $(n\,\rho_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a\in\mathbb{N}$ sont toutes bornées ; par extraction diagonale, on peut donc extraire une sous-suite $(n_k\,\rho_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge en tout singleton $\{a\}$. Fixons maintenant une partie $A\subset\mathbb{N}$. Pour tout $\varepsilon>0$, si M est choisi comme dans la question précédente, alors
$$|n_k\,\rho_{n_k}(A)-n_j\,\rho_{n_j}(A)| \leq \sum_{\substack{a\leq M\\ a\in A}} |n_k\,\rho_{n_k}(a)-n_j\,\rho_{n_j}(a)| + 2\varepsilon.$$
On a une somme finie dans le terme de droite de cette inégalité, et les termes de cette somme sont des différences de termes de suites convergentes. Par conséquent, $(n_k\,\rho_{n_k}(A))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc elle admet une limite. Notant $\nu(a) = \lim_{k\to\infty} n_k\,\rho_{n_k}(a)$ et $\nu(A) = \sum_{a\in A}\nu(a)$, le même argument montre que $\nu(A) = \lim_{k\to\infty} n_k\,\rho_{n_k}(A)$:
$$|n_k\,\rho_{n_k}(A)-\nu(A)| \leq \sum_{\substack{a\leq M\\ a\in A}} |n_k\,\rho_{n_k}(a)-\nu(a)| + 2\varepsilon \leq \sum_{a=0}^M |n_k\,\rho_{n_k}(a)-\nu(a)| + 2\varepsilon.$$
La suite de mesures positives $(n_k\,\rho_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc vers une mesure positive ν, et l'inégalité ci-dessus montre que ν est de masse finie, et aussi que $\sup_{A\subset\mathbb{N}} |n_k\,\rho_{n_k}(A)-\nu(A)| \to_{k\to\infty} 0$.

6. Pour tout réel $s \in [0,1)$, on a $\int_{\mathbb{R}} s^x \rho_n(dx) = \left(\int_{\mathbb{R}} s^x \mu(dx)\right)^{\frac{1}{n}}$, ces deux termes étant des réels dans $[0,1]$. Par conséquent,

$$n_k \exp\left(\frac{1}{n_k}\log\left(\int_{\mathbb{R}} s^x \mu(dx)\right)\right) = \sum_{a=0}^{\infty} s^a\, n_k\, \rho_{n_k}(a);$$
$$n_k\left(\exp\left(\frac{1}{n_k}\log\left(\int_{\mathbb{R}} s^x \mu(dx)\right)\right) - 1\right) = \sum_{a=0}^{\infty}(s^a - 1)\, n_k\, \rho_{n_k}(a)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. La limite du terme de gauche est la transformée log-Laplace de μ, tandis qu'à droite on peut utiliser la convergence *uniforme* de $n_k\, \rho_{n_k}$ vers ν pour voir qu'on obtient bien $\sum_{a=0}^{\infty}(s^a - 1)\,\nu(a)$. Finalement, l'unicité est évidente car on récupère les coefficients $\nu(a)$ en dérivant en 0 la série entière $F(s) = \sum_{a=0}^{\infty}(s^a - 1)\,\nu(a)$:

$$\nu(a) = \frac{1}{a!}\left.\frac{\partial^a F(s)}{\partial s^a}\right|_{s=0}.$$

Corrigé de l'exercice 3.

1. Supposons $\mu_k \rightharpoonup \mu$; on sait d'après l'énoncé que $a_k \to a$, et il reste à montrer la convergence faible de $\sigma_k^2\,\delta_0 + (1 \wedge x^2)\,\nu_k(dx)$ vers $\sigma^2\,\delta_0 + (1 \wedge x^2)\,\nu(dx)$. Soit h continue bornée, et $g(x) = h(x) - h(0)\,c(x)$. La fonction g est continue bornée et s'annule en 0, donc, d'après le critère rappelé,

$$\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)\,g(x)\,\nu_k(dx) = \int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)\,h(x)\,\nu_k(dx) - h(0)\int_{\mathbb{R}} c(x)\,x^2\,\nu_k(dx)$$

converge vers la même expression sans les indices k lorsque k tend vers l'infini. C'est aussi le cas pour

$$h(0)\,\widetilde{\sigma}_k^2 = \int_{\mathbb{R}} h(x)\,\sigma_k^2\,\delta_0(dx) + h(0)\int_{\mathbb{R}} c(x)\,x^2\,\nu_k(dx).$$

En additionnant les deux suites, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\,(\sigma_k^2\,\delta_0(dx) + (1 \wedge x^2)\,\nu_k(dx)) \to \int_{\mathbb{R}} h(x)\,(\sigma^2\,\delta_0(dx) + (1 \wedge x^2)\,\nu(dx)),$$

d'où la convergence faible $\sigma_k^2\,\delta_0(dx) + (1 \wedge x^2)\,\nu_k(dx) \rightharpoonup \sigma^2\,\delta_0(dx) + (1 \wedge x^2)\,\nu(dx)$.

Supposons réciproquement cette convergence faible. En l'appliquant à la fonction de coupure $c(x)$, on obtient

$$\widetilde{\sigma}_k^2 = \int_{\mathbb{R}} c(x)\,(\sigma_k^2\,\delta_0(dx) + (1 \wedge x^2)\,\nu_k(dx)) \to_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} c(x)\,(\sigma^2\,\delta_0(dx) + (1 \wedge x^2)\,\nu(dx)) = \widetilde{\sigma}^2.$$

Considérons par ailleurs une fonction g continue bornée et qui s'annule en 0. La convergence faible contre cette fonction test donne

$$\int (1 \wedge x^2)\,g(x)\,\nu_k(dx) \to \int (1 \wedge x^2)\,g(x)\,\nu(dx),$$

puisque $\delta_0(g) = 0$. On retrouve donc les critères de la convergence faible de lois infiniment divisibles $\mu_k \rightharpoonup_{k\to\infty} \rho$.

2. Si $(M_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson composé compensé d'intensité ρ avec ρ mesure finie et bornée, alors sa transformée de Fourier est

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi M_t}] = \exp\left(\int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} - 1)\, t\rho(dx)\right).$$

Le logarithme du terme de gauche est une série en ξ dont les premiers termes sont :

$$\mathrm{i}\xi\, \mathbb{E}[M_t] - \frac{\xi^2}{2}\, \mathbb{E}[\overline{M}_t^2] + \frac{(\mathrm{i}\xi)^3}{6}\, \mathbb{E}[\overline{M}_t^3] + \frac{\xi^4}{24}\left(\mathbb{E}[\overline{M}_t^4] - 3(\mathbb{E}[\overline{M}_t^2])^2\right) + o(\xi^4).$$

D'autre part, le logarithme du terme de droite se développe évidemment en

$$\mathrm{i}\xi t \int_{\mathbb{R}} x\, \rho(dx) - \frac{\xi^2}{2}\, t \int_{\mathbb{R}} x^2\, \rho(dx) + \frac{(\mathrm{i}\xi)^3}{6}\, t \int_{\mathbb{R}} x^3\, \rho(dx) + \frac{\xi^4}{24}\, t \int_{\mathbb{R}} x^4\, \rho(dx) + o(\xi^4).$$

Par identification, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_t] &= t \int_{\mathbb{R}} x\, \rho(dx);\\
\mathbb{E}[\overline{M}_t^2] &= \mathrm{Var}(M_t) = t \int_{\mathbb{R}} x^2\, \rho(dx);\\
\mathbb{E}[\overline{M}_t^4] &= t \int_{\mathbb{R}} x^4\, \rho(dx) + 3t^2 \left(\int_{\mathbb{R}} x^2\, \rho(dx)\right)^2.
\end{aligned}$$

3. On rappelle qu'on peut écrire

$$X_t = at + \sigma\, W_t + \sum_{m=1}^{\infty} P_t^{(m)},$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard, et où chaque $(P_t^{(m)})_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson composé compensé :

$$\begin{aligned}
P_t^{(m)} &= \mathrm{PPC}(\nu_{|[-\frac{1}{m},-\frac{1}{m+1})\sqcup(\frac{1}{m+1},\frac{1}{m}]})_t - \mathbb{E}\left[\mathrm{PPC}(\nu_{|[-\frac{1}{m},-\frac{1}{m+1})\sqcup(\frac{1}{m+1},\frac{1}{m}]})_t\right]\\
&= \mathrm{PPC}(\nu_{|[-\frac{1}{m},-\frac{1}{m+1})\sqcup(\frac{1}{m+1},\frac{1}{m}]})_t - t \int_{[-\frac{1}{m},-\frac{1}{m+1})\sqcup(\frac{1}{m+1},\frac{1}{m}]} x\, \nu(dx).
\end{aligned}$$

La série converge presque sûrement, et aussi en norme $\mathscr{L}^p$ pour tout $p \geq 2$. On peut en particulier calculer le moment d'ordre 2 en décomposant terme à terme, et en utilisant le fait que W_t et les $P_t^{(m)}$ sont centrés, ce qui fait s'annuler tous les termes croisés :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_t)^2] &= t^2a^2 + t\sigma^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Var}\left(\mathrm{PPC}(\nu_{|[-\frac{1}{m},-\frac{1}{m+1})\sqcup(\frac{1}{m+1},\frac{1}{m}]})_t\right)\\
&= t^2a^2 + t\sigma^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{[-\frac{1}{m},-\frac{1}{m+1})\sqcup(\frac{1}{m+1},\frac{1}{m}]} t\, x^2\, \nu(dx)\right) = t^2a^2 + t\left(\sigma^2 + \int_{-1}^{1} x^2\, \nu(dx)\right).
\end{aligned}$$

4. On notera dans ce qui suit $\mu_t^{(k)}$ (respectivement, $M^{(k)}$) la loi marginale du processus $X^{(k)}$ au temps t (respectivement, la loi de $X^{(k)}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$) ; par hypothèse, $\mu_1^{(k)} = \mu^{(k)}$. Supposons

d'abord qu'on ait convergence en loi de $X^{(k)}$ vers X. Comme X est un processus càdlàg, on sait que l'ensemble

$$D_X = \{t \in \mathbb{R}_+ \,|\, \mathbb{P}[X_t \neq X_{t-}] > 0\}$$

est dénombrable (voir la proposition 3.25 dans le polycopié). Si t n'est pas D, alors $s \mapsto X_s$ est presque sûrement continue en t. Soit $\pi_t : X \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+) \mapsto X_t \in \mathbb{R}$. L'application π_t est mesurable, et elle est continue sur le support du processus X (voir la proposition 3.24 du polycopié). On a alors vu en cours que ceci impliquait $(\pi_t)_* : \mathscr{M}^1(\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)) \to \mathscr{M}^1(\mathbb{R})$ était continue en M :

$$\mu_t^{(k)} = (\pi_t)_*(M^{(k)}) \rightharpoonup_{k\to\infty} (\pi_t)_*(M) = \mu_t.$$

Si ceci est vrai pour un paramètre $t > 0$, alors ça l'est en fait pour tous les paramètres t, compte tenu du critère démontré dans la question 1 :

$$\begin{aligned}
&\left(\mu_t^{(k)} \rightharpoonup_{k\to\infty} \mu_t\right)\\
&\iff \left(ta^{(k)} \to_{k\to\infty} ta \text{ et } t(\sigma_k^2\,\delta_0 + (1\wedge x^2)\,\nu_k(dx)) \rightharpoonup_{k\to\infty} t(\sigma^2\,\delta_0 + (1\wedge x^2)\,\nu(dx))\right)\\
&\iff \left(a^{(k)} \to_{k\to\infty} a \text{ et } (\sigma_k^2\,\delta_0 + (1\wedge x^2)\,\nu_k(dx)) \rightharpoonup_{k\to\infty} (\sigma^2\,\delta_0 + (1\wedge x^2)\,\nu(dx))\right)\\
&\iff \left(\mu^{(k)} \rightharpoonup_{k\to\infty} \mu\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, $M^{(k)} \rightharpoonup_{k\to\infty} M$ implique $\mu^{(k)} \rightharpoonup_{k\to\infty} \mu$.

Réciproquement, si $\mu^{(k)} \rightharpoonup_{k\to\infty} \mu$, alors par l'argument donné précédemment on a également $\mu_t^{(k)} \rightharpoonup_{k\to\infty} \mu_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et comme les accroissement des processus de Lévy sont indépendants, ceci implique la convergence en lois fini-dimensionnelles de $X^{(k)}$ vers X. Pour démontrer la convergence $M^{(k)} \rightharpoonup_{k\to\infty} M$, il suffit maintenant d'avoir la tension des lois, et pour cela on va utiliser le critère de Kolmogorov discontinu. On voit facilement qu'on peut se ramener au cas où $a^{(k)} = a = 0$ en retranchant aux processus leurs parties affines ; on fait cette hypothèse dans la suite. On va contrôler pour $r < s < t$ le moment

$$\mathbb{E}[|X_s^{(k)} - X_r^{(k)}|^2\,|X_t^{(k)} - X_s^{(k)}|^2] = (s-r)(t-s)\,\left(\sigma_k^2 + \int_{-1}^1 x^2\,\nu_k(dx)\right)^2.$$

Le terme entre parenthèses est plus petit que

$$(\sigma_k^2\,\delta_0 + (1\wedge x^2)\,\nu_k(dx))(f)$$

pour une fonction f positive, à support compact, continue et égale à 1 sur $[-1,1]$. Puisque $\sigma_k^2\,\delta_0 + (1\wedge x^2)\,\nu_k(dx) \rightharpoonup_{k\to\infty} \sigma^2\,\delta_0 + (1\wedge x^2)\,\nu(dx)$, ces termes sont donc uniformément bornés, et il existe une constante C telle que

$$\mathbb{E}[|X_s^{(k)} - X_r^{(k)}|^2\,|X_t^{(k)} - X_s^{(k)}|^2] \leq C(s-r)(t-s) \leq C(t-r)^2.$$

Le critère de Kolmogorov discontinu garantit alors la tension, et on a bien $M^{(k)} \rightharpoonup_{k\to\infty} M$.

5. Notons que la preuve de $(M^{(k)} \rightharpoonup_{k\to\infty} M) \Rightarrow (\mu^{(k)} \rightharpoonup_{k\to\infty} \mu)$ donnée à la question précédente est encore valable si les mesures de Lévy ne sont pas supportées par $[-1,1]$; c'est l'autre implication qui demande un certain travail. On raisonnera sur un intervalle de temps fini $[0,T]$, l'extension à $\mathbb{R}_+$ reposant sur des arguments standards. Sans perte de généralité, on peut également supposer que la mesure de Lévy ν n'a pas d'atome en ± 1 : en effet, ν a une quantité

dénombrable d'atomes, donc quitte à utiliser une transformation affine $x \mapsto \lambda x$, on peut supposer que ± 1 n'en font pas partie. Cette hypothèse implique que $\nu^{(k)}_{|\mathbb{R}\setminus(-1,1)} \rightharpoonup \nu_{|\mathbb{R}\setminus(-1,1)}$ au sens de la convergence contre toute fonction continue bornée sur $\mathbb{R} \setminus (-1,1)$.

Considérons une fonction de coupure continue $c : \mathbb{R} \to [0,1]$ qui est paire, telle que $c = 1$ sur un voisinage $[-(1-\varepsilon), 1-\varepsilon]$ de 0, et telle que $c(x) = 0$ si et seulement si $|x| > 1$. Si f est une fonction càdlàg sur $\mathbb{R}_+$, on note $\Gamma_c(f)$ la fonction obtenue en multipliant les sauts de taille x de f par la fonction $c(x)$. Ceci a un sens, car une fonction càdlàg f n'a sur chaque intervalle fini qu'un nombre fini de discontinuités de taille plus grande que $1-\varepsilon$ en module. Il n'est pas très difficile de voir que $f \mapsto \Gamma_c(f)$ est une application continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ (la preuve est un peu fastidieuse, et requiert la continuité de la fonction de coupure c). De plus, au niveau des lois infiniment divisibles et des processus de Lévy, si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de Lévy associée à une loi μ de triplet (a, σ^2, ν), alors $(\Gamma_c(X_t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de Lévy associée à une loi infiniment divisible $\Gamma_c(\mu)$ de triplet $(a, \sigma^2, (\gamma_c)_* \nu_{|(-1,1)})$, où $\gamma_c(x) = c(x)\,x$. Notons que si $\mu^{(k)} \rightharpoonup_{k\to\infty} \mu$, alors $\Gamma_c(\mu^{(k)}) \rightharpoonup_{k\to\infty} \Gamma_c(\mu)$ d'après le critère de la question 1. Donc, d'après la question précédente, on a convergence en loi de $\Gamma_c(X^{(k)})$ vers $\Gamma_c(X)$ si $X^{(k)}$ (respectivement, X) est le processus de Lévy associé à $\mu^{(k)}$ (respectivement, à μ). Notons maintenant $P^{(k)}$ le processus défini comme suit :

$$P^{(k)}_t = \sum_{\substack{s\leq t \\ |\Delta X^{(k)}_s| = |X^{(k)}_s - X^{(k)}_{s-}| \geq 1}} (\Delta X^{(k)})_s.$$

On définit de même P à partir de X. Comme les sauts d'un processus de Lévy forment un processus ponctuel de Poisson d'intensité la mesure de Lévy, $P^{(k)}_t$ est un processus de Poisson composé d'intensité $\nu^{(k)}_{|\mathbb{R}\setminus(-1,1)}$. De plus, $P^{(k)}$ est indépendant de $\Gamma_c(X^{(k)})$: en effet, si $N^{(k)}$ est la mesure aléatoire de Poisson à paramètre temporel encodant les sauts de $X^{(k)}$, alors $P^{(k)}$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par $N^{(k)}_{(\mathbb{R}\setminus(-1,1))\times\mathbb{R}_+}$, tandis que $\Gamma_c(X^{(k)})$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par $N^{(k)}_{[-1,1]\times\mathbb{R}_+}$ et par la partie brownienne (continue) du processus $X^{(k)}$; l'indépendance découle alors du fait que les mesures aléatoires de Poisson sont considérées sur des boréliens disjoints.

Supposons établi le résultat de convergence suivant : $P^{(k)} \rightharpoonup_{k\to\infty} P$ dans l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. Alors, bien que l'addition ne soit pas une fonction continue sur l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, on a également $\Gamma_c(X^{(k)}) + P^{(k)} \rightharpoonup_{k\to\infty} \Gamma_c(X) + P$. En effet, sur le support de la limite $(\Gamma_c(X), P)$, l'addition est bien continue, car avec probabilité 1, les deux processus $\Gamma_c(X)$ et P ont tous leurs sauts à des instants distincts ; on peut dès lors utiliser le résultat vu en cours qui affirme qu'on peut dans cadre composer par une fonction une convergence en loi. Il reste alors à voir que pour ε choisi suffisamment petit, on a avec très grande probabilité

$$\Gamma_c(X^{(k)}) + P^{(k)} = X^{(k)} \qquad ; \qquad \Gamma_c(X) + P = X.$$

En effet, en prenant ε petit, sous l'hypothèse $\mu^{(k)} \rightharpoonup \mu$, on peut rendre simultanément les masses $\nu^{(k)}([-1,-1+\varepsilon]) + \nu^{(k)}([1-\varepsilon,1])$ et $\nu([-1,-1+\varepsilon]) + \nu([1-\varepsilon,1])$ arbitrairement petites, et ceci implique qu'avec grande probabilité, $X^{(k)}$ et X n'ont pas de sauts de taille comprise entre $1-\varepsilon$ et 1 sur l'intervalle de temps $[0,T]$.

Finalement, comme $\nu^{(k)}_{|\mathbb{R}\setminus(-1,1)} \rightharpoonup \nu_{|\mathbb{R}\setminus(-1,1)}$, on a immédiatement la convergence en lois fini-dimensionnelles de $P^{(k)}$ vers P. Il reste à vérifier la tension, et pour cela on peut comme dans le cours vérifier que les nombres de sauts de $P^{(k)}$ sur $[0,T]$ suivent une famille de lois tendues.