
Convergence de mesures, processus de Poisson et de Lévy - Examen 16-12-16

Durée : 3 heures. Tous les documents sont autorisés. Sont interdits : calculatrice, téléphone, ordinateur ou objet apparenté. Toutes les réponses doivent être justifiées, et la rédaction sera prise en compte.

Règle du jeu. Toutes les questions doivent être traitées en utilisant seulement les résultats du cours (il faut donc démontrer tout ce qui n'y serait pas). Cependant, les résultats de questions précédentes peuvent être utilisés même si ces questions n'ont pas été traitées.

Exercice 1. Soit \mathfrak{X} un espace polonais, et μ et ν deux mesures de probabilité boréliennes sur \mathfrak{X} . Un couplage de μ et ν est une mesure de probabilité M sur $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, dont les marginales respectives sont μ et ν : si $Z = (X, Y)$ est une variable aléatoire qui suit la loi M , alors X suit la loi μ et Y suit la loi ν .

On note $\mathcal{C}(\mu, \nu)$ l'ensemble des couplages de μ et ν . Montrer que c'est une partie compacte dans l'ensemble des mesures de probabilité $\mathcal{M}^1(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$ (pour la topologie de la convergence en loi).

Exercice 2. Si $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$, on note $\widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \mu(dx)$ sa transformée de Fourier, et on rappelle qu'on a l'inégalité

$$\mu \left(\left[-\frac{2}{\delta}, \frac{2}{\delta} \right]^c \right) \leq \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (1 - \widehat{\mu}(\xi)) d\xi,$$

où A^c désigne le complémentaire d'une partie A .

1. (★) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^1(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ \mu &\mapsto \widehat{\mu} \end{aligned}$$

est continue pour la topologie de la convergence en loi sur $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$, et la topologie de la convergence uniforme sur tout compact sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

2. Soit $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ une famille de mesures de probabilité sur \mathbb{R} , et $\widehat{\mathcal{N}} = \{\widehat{\mu} \mid \mu \in \mathcal{N}\}$. Montrer que \mathcal{N} est relativement compacte dans $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ si et seulement si $\widehat{\mathcal{N}}$ est équicontinue en 0, c'est-à-dire que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\sup_{f \in \widehat{\mathcal{N}}} \sup_{|\xi| < \delta} |f(\xi) - f(0)| \right) = 0.$$

Exercice 3. Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} , et $F_{\mu}(x) = \mu((-\infty, x])$ sa fonction de répartition.

1. Montrer que F_{μ} est une fonction continue à droite et avec limites à gauche sur \mathbb{R} .

On note $F_\mu(x_-) = \lim_{t \rightarrow x, t < x} F_\mu(t)$, et on introduit le graphe complété de la fonction F_μ :

$$\Gamma_\mu = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F_\mu(x_-) \leq y \leq F_\mu(x)\}.$$

2. Dessiner Γ_μ lorsque $\mu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$. Dans le cas général, montrer que toute droite $D_a = \{y = a - x\}$ de pente -1 coupe Γ_μ en un seul point, qu'on notera $I_{\mu,a}$.

Soit ν une autre mesure de probabilité sur \mathbb{R} . On définit la distance de Lévy entre μ et ν par :

$$d_L(\mu, \nu) = \sup_{a \in \mathbb{R}} d(I_{\mu,a}, I_{\nu,a}),$$

où d est la distance euclidienne dans le plan.

3. Montrer que d_L est une distance sur l'ensemble des mesures de probabilité $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$. Si $a, b \in \mathbb{R}$, que vaut $d_L(\delta_a, \delta_b)$?
4. (★) Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilité sur \mathbb{R} . Montrer que $d_L(\mu_n, \mu)$ tend vers 0 si et seulement si $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend en loi vers μ .

Exercice 4. Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus de Lévy d'exposant de Lévy-Khintchine

$$\psi_X(\xi) = \log \mathbb{E}[e^{i\xi X_1}] = ia\xi - \frac{\sigma^2 \xi^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi x} - 1 - 1_{|x| < 1} i\xi x) \nu(dx)$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et ν mesure sans atome en 0 et intégrant $\min(1, x^2)$. On se donne par ailleurs un subordonateur $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ indépendant de $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ et d'exposant

$$\psi_T(\xi) = \log \mathbb{E}[e^{i\xi T_1}] = im\xi + \int_{\mathbb{R}_+} (e^{i\xi t} - 1) \pi(dt)$$

avec $m \in \mathbb{R}_+$ et π supportée par \mathbb{R}_+^* et intégrant $\min(1, x)$.

1. Montrer que le processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ défini par $Y_t = X_{T_t}$ est un processus de Lévy.
2. Exprimer en fonction de a, m, σ^2, ν, π et des lois μ_t des variables X_t le triplet de l'exposant de Lévy-Khintchine de $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Corrigé exercice 1. On note $\pi_1 : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ et $\pi_2 : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ les deux projections coordonnées. Par définition,

$$\mathcal{C}(\mu, \nu) = \{M \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{X}^2) \mid (\pi_1)_*(M) = \mu \text{ et } (\pi_2)_*(M) = \nu\},$$

où $(\pi_1)_*(M) = M \circ (\pi_1)^{-1}$, et de même pour $(\pi_2)_*(M)$. Comme π_1 et π_2 sont continues, $(\pi_1)_*$ et $(\pi_2)_*$ sont des applications continues de $\mathcal{M}^1(\mathfrak{X}^2)$ vers $\mathcal{M}^1(\mathfrak{X})$, donc $\mathcal{C}(\mu, \nu)$ est l'intersection d'images réciproques par des applications continues des fermés $\{\mu\}$ et $\{\nu\}$; c'est donc une partie fermée de $\mathcal{M}^1(\mathfrak{X}^2)$. Il reste à montrer que $\mathcal{C}(\mu, \nu)$ est relativement compacte, ce qui est équivalent à tendue. Soit $\varepsilon > 0$. Comme \mathfrak{X} est polonais, μ et ν sont tendues et il existe des compacts K_ε et L_ε tels que

$$\mu(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon \quad ; \quad \nu(L_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon.$$

Considérons alors $K = K_\varepsilon \times L_\varepsilon$, qui est un compact de \mathfrak{X}^2 . Si $M \in \mathcal{C}(\mu, \nu)$, alors

$$M(K^c) \leq M((K_\varepsilon)^c \times \mathfrak{X}) + M(\mathfrak{X} \times (L_\varepsilon)^c) = \mu((K_\varepsilon)^c) + \nu((L_\varepsilon)^c) \leq 2\varepsilon.$$

Donc, $\mathcal{C}(\mu, \nu)$ est une famille tendue de mesures de probabilité, et c'est une partie compacte.

Corrigé exercice 2.

1. Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilité telle que $\mu_n \rightarrow \mu$. On va montrer que $\widehat{\mu}_n$ converge uniformément vers $\widehat{\mu}$ sur tout intervalle $[-L, L]$; c'est équivalent à la convergence uniforme sur tout compact de \mathbb{R} . Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, c'est une famille tendue de mesures de probabilité, et il existe un intervalle $[-K, K)$ tel que $\mu_n([-K, K)^c) \leq \varepsilon$ pour tout n , et de même pour la mesure μ . Alors,

$$\begin{aligned} |\widehat{\mu}_n(\xi) - \widehat{\mu}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \mu_n(dx) - \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \mu(dx) \right| \\ &\leq \left| \int_{[-K, K)} e^{i\xi x} \mu_n(dx) - \int_{[-K, K)} e^{i\xi x} \mu(dx) \right| + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Quitte à augmenter la valeur de K , on peut supposer que $-K$ et K ne sont pas des atomes de μ . On peut alors trouver une subdivision $-K = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_k = K$ de l'intervalle $[-K, K)$ avec les deux propriétés suivantes :

- (a) Aucun des x_i n'est un atome de μ ;
- (b) Pour tout i , $x_i - x_{i-1} \leq \frac{\varepsilon}{L}$.

En effet, μ a au plus un ensemble dénombrable d'atomes. La première propriété assure que $\mu_n([x_{i-1}, x_i]) \rightarrow \mu([x_{i-1}, x_i])$ pour tout i , puisque $\mu_n \rightarrow \mu$ et $[x_{i-1}, x_i]$ est un borélien dont la frontière a μ -mesure nulle. Pour $n \geq n_0$ assez grand, on a donc

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad |\mu_n([x_{i-1}, x_i]) - \mu([x_{i-1}, x_i])| \leq \frac{\varepsilon}{k}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{[-K,K]} e^{i\xi x} \mu_n(dx) - \int_{[-K,K]} e^{i\xi x} \mu(dx) \right| \leq \sum_{i=1}^k \left| \int_{[x_{i-1}, x_i]} e^{i\xi x} (\mu_n - \mu)(dx) \right| \\
& \leq \sum_{i=1}^k \left| e^{i\xi x_i} \int_{[x_{i-1}, x_i]} (\mu_n - \mu)(dx) \right| + \int_{[x_{i-1}, x_i]} |e^{i\xi x} - e^{i\xi x_i}| (\mu_n(dx) + \mu(dx)) \\
& \leq \sum_{i=1}^k |\mu_n([x_{i-1}, x_i]) - \mu([x_{i-1}, x_i])| + L \int_{[x_{i-1}, x_i]} |x - x_i| (\mu_n(dx) + \mu(dx))
\end{aligned}$$

puisque la fonction $x \mapsto e^{i\xi x}$ est $|\xi|$ -lipschitzienne. Par conséquent, pour $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{[-K,K]} e^{i\xi x} \mu_n(dx) - \int_{[-K,K]} e^{i\xi x} \mu(dx) \right| & \leq \sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon}{k} + \int_{[x_{i-1}, x_i]} \varepsilon (\mu_n(dx) + \mu(dx)) \\
& \leq \varepsilon + 2\varepsilon \leq 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

donc $|\widehat{\mu}_n(\xi) - \widehat{\mu}(\xi)| \leq 4\varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$ et tout $\xi \in [-L, L]$. Ceci démontre que $\widehat{\mu}_n \rightarrow \widehat{\mu}$ uniformément sur tout compact de \mathbb{R} .

2. Supposons $\widehat{\mathcal{N}}$ équicontinue en 0, et fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute fonction $f \in \widehat{\mathcal{N}}$, et tout $|\xi| \leq \delta$,

$$|f(\xi) - f(0)| = |f(\xi) - 1| \leq \varepsilon.$$

Alors, d'après l'inégalité de l'énoncé, si $\mu \in \mathcal{N}$ et $f = \widehat{\mu}$, on a :

$$\mu \left(\left[-\frac{2}{\delta}, \frac{2}{\delta} \right]^c \right) \leq \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (1 - f(\xi)) d\xi \leq 2\varepsilon.$$

Donc, \mathcal{N} est une famille tendue de mesures de probabilité sur \mathbb{R} , et elle est donc relativement compacte par le théorème de Prohorov. Réciproquement, supposons \mathcal{N} relativement compacte dans $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$, et montrons que $\widehat{\mathcal{N}}$ est équicontinue en 0. D'après la question 1.,

$$\{f_{[-1,1]} \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C}) \mid f \in \widehat{\mathcal{N}}\} = \{\widehat{\mu}_{[-1,1]} \mid \mu \in \mathcal{N}\}$$

est l'image par une application continue d'une partie relativement compacte, donc c'est une partie relativement compacte de $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C})$. Par le théorème d'Arzelà-Ascoli, elle est donc uniformément équicontinue, c'est-à-dire que

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\substack{f \in \widehat{\mathcal{N}} \\ \xi_1, \xi_2 \in [-1, 1] \\ |\xi_1 - \xi_2| \leq \delta}} |f(\xi_1) - f(\xi_2)| = 0.$$

Or, la limite ci-dessus est plus grande que

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\substack{f \in \widehat{\mathcal{N}} \\ x \in [-1, 1] \\ |\xi| \leq \delta}} |f(\xi) - f(0)|$$

donc $\widehat{\mathcal{N}}$ est équicontinue en 0.

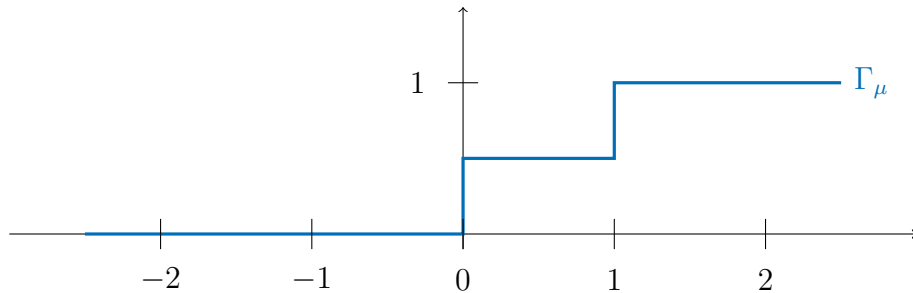
Corrigé exercice 3.

1. Comme la fonction de répartition F_μ est croissante et bornée entre 0 et 1, elle admet des limites à gauche et à droite de tout point x . De plus, pour tout x , si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante tendant vers x , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu((-\infty, x_n]) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, x_n]\right) = \mu((-\infty, x]) = F_\mu(x),$$

donc F_μ est continue à droite.

2. Si $\mu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$, alors le graphe complété Γ_μ est :



Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un point qui se trouve à la fois sur la droite D_a et sur le graphe Γ_μ . On a alors $y = a - x$ et $F_\mu(x_-) \leq y \leq F_\mu(x)$, donc

$$F_\mu(x_-) + x \leq a \leq F_\mu(x) + x.$$

Or, les fonctions $x \mapsto F_\mu(x_-) + x$ et $x \mapsto F_\mu(x) + x$ sont strictement croissantes, et si $x_1 < x_2$, alors $F_\mu(x_1) + x_1 < F_\mu((x_2)_-) + x_2$. Par conséquent, il y a au plus un x qui vérifie l'inégalité précédente, car sinon,

$$a \leq F_\mu(x_1) + x_1 < F_\mu((x_2)_-) + x_2 \leq a.$$

Montrons maintenant l'existence d'un x qui convient. Comme $x \mapsto F_\mu(x) + x$ est strictement croissante avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\mu(x) + x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_\mu(x) + x = +\infty$, on peut définir $x = \inf\{t \mid F_\mu(t) + t \geq a\}$. Comme F_μ est continue à droite, par passage à la limite, $F_\mu(x) + x \geq a$. De plus, pour tout $t < x$, $F_\mu(t) + t < a$, donc par passage à la limite, $F_\mu(x_-) + x \leq a$. Il y a donc bien exactement un x qui convient, et un point $I_{\mu,a} \in D_a \cap \Gamma_\mu$.

3. Si $d_L(\mu, \nu) = 0$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $I_{\mu,a} = I_{\nu,a}$, donc l'unique x tel que

$$F_\mu(x_-) + x \leq a \leq F_\mu(x) + x$$

vérifie aussi

$$F_\nu(x_-) + x \leq a \leq F_\nu(x) + x,$$

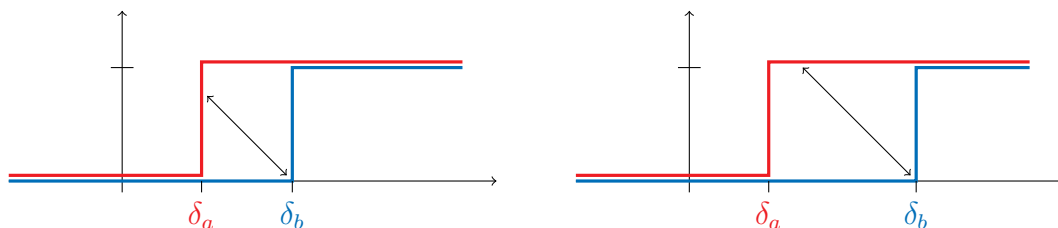
puisque cette identité caractérise le point $(x, a - x) = I_{\mu,a} = I_{\nu,a}$. Ceci implique $F_\mu(x) \geq F_\nu(x_-)$ et $F_\nu(x) \geq F_\mu(x_-)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme F_μ et F_ν sont des fonctions continues à droite et avec limites à gauche, $F_\mu(x) = F_\mu(x_-)$ et $F_\nu(x) = F_\nu(x_-)$ sauf sur un ensemble dénombrable $D \subset \mathbb{R}$. Donc, $F_\mu(x) = F_\nu(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus D$. Alors, en utilisant de nouveau la continuité à droite de F_μ et F_ν , on voit

qu'on a en fait $F_\mu(x) = F_\nu(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc μ et ν ont la même fonction de répartition, et sont égales. Ceci démontre la séparation de d ; la symétrie est évidente, et pour l'inégalité triangulaire, étant données trois mesures μ , ν et ρ ,

$$|I_{\mu,a} - I_{\rho,a}| \leq |I_{\mu,a} - I_{\nu,a}| + |I_{\nu,a} - I_{\rho,a}| \leq d_L(\mu, \nu) + d_L(\nu, \rho)$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$, donc $d_L(\mu, \rho) \leq d_L(\mu, \nu) + d_L(\nu, \rho)$ par passage à la borne supérieure. Ainsi, d_L est bien une distance sur l'ensemble des mesures de probabilité $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$.

Si $a, b \in \mathbb{R}$, on voit facilement que $d_L(\delta_a, \delta_b) = \sqrt{2} \min(1, |b - a|)$ voir les deux dessins ci-dessous :



Si $|b - a| \leq 1$, $d_L(\delta_a, \delta_b) = \sqrt{2} |b - a|$.

Si $|b - a| > 1$, $d_L(\delta_a, \delta_b) = \sqrt{2}$.

4. Supposons $d_L(\mu_n, \mu) \not\rightarrow 0$; il existe $\varepsilon > 0$, une suite de points $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{R} et une sous-suite $(\mu_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (\nu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $|I_{\nu_k, a_k} - I_{\mu, a_k}| \geq \varepsilon$ pour tout k . Remarquons que dans ce cas, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un intervalle $[x_k, x_k + \frac{\varepsilon}{2}]$ tel que, soit

$$F_{\nu_k}(y) - F_\mu(y) \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout y dans cet intervalle, soit

$$F_{\nu_k}(y) - F_\mu(y) \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout y dans cet intervalle. En effet, si $(x, a_k - x) = I_{\nu_k, a_k}$ et $(x', a_k - x') = I_{\mu, a_k}$, supposons par exemple $x < x'$. Alors,

$$\varepsilon \leq |I_{\nu_k, a_k} - I_{\mu, a_k}| = \sqrt{2(x' - x)^2},$$

donc $x' \geq x + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Pour tout point $y \in (x, x')$, on a alors

$$F_{\nu_k}(y) \geq F_{\nu_k}(x) \geq a_k - x \geq a_k - x' + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \geq F_\mu(x'_-) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \geq F_\mu(y) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Ceci démontre le résultat en choisissant un intervalle de taille $\frac{\varepsilon}{2}$ inclus dans (x, x') . Dans ce qui suit, quitte à extraire une sous-suite de $(\nu_k)_{k \in \mathbb{N}}$, on supposera que l'on a toujours $F_{\nu_k}(y) - F_\mu(y) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $y \in [x_k, x_k + \frac{\varepsilon}{2}]$, l'autre cas $F_{\nu_k}(y) - F_\mu(y) \leq -\frac{\varepsilon}{2}$ étant symétrique. Distinguons maintenant deux cas.

- (a) Si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée, alors à extraction près on peut supposer $x_k \rightarrow x$ pour un certain $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $y \in [x + \frac{\varepsilon}{6}, x + \frac{\varepsilon}{3}]$, pour k assez grand, cet intervalle est inclus dans $[x_k, x_k + \frac{\varepsilon}{2}]$, donc $F_{\nu_k}(y) \geq F_\mu(y) + \frac{\varepsilon}{2}$. Or, si $\mu_n \rightarrow \mu$, alors $F_{\mu_n}(y)$ tend vers $F_\mu(y)$ sauf éventuellement sur un ensemble dénombrable de points $y \in \mathbb{R}$ (les points de non-continuité de F_μ), ce qui est incompatible avec l'inégalité précédente sur tout un intervalle. Donc, $\mu_n \not\rightarrow \mu$.

(b) Si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite bornée, alors à extraction près on peut supposer $x_k \rightarrow +\infty$ ou $x_k \rightarrow -\infty$. Si $x_k \rightarrow +\infty$, alors pour k assez grand,

$$1 + \frac{\varepsilon}{4} = 1 - \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \leq F_\mu(x_k) + \frac{\varepsilon}{2} \leq F_{\nu_k}(x_k),$$

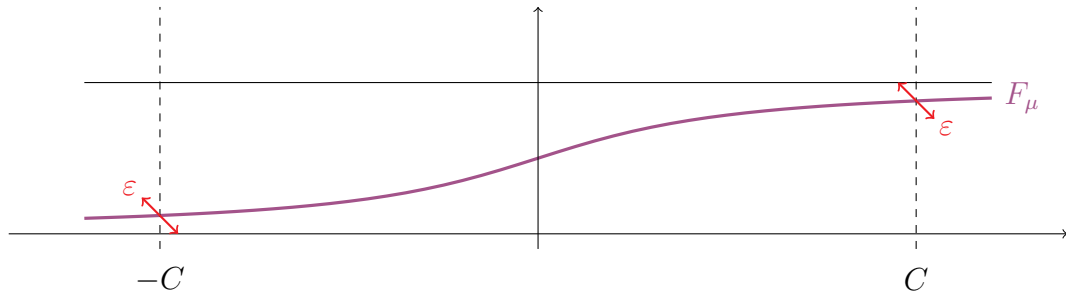
ce qui est impossible pour une fonction de répartition. Supposons maintenant $x_k \rightarrow -\infty$. Alors, $F_{\nu_k}(x_k) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout k , et étant fixé $-C < 0$, $F_{\nu_k}(-C) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout k assez grand, ce qui implique

$$\nu_k([-C, C]^c) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ceci contredit la tension de la suite de mesures de probabilité $(\nu_k)_{k \in \mathbb{N}}$, donc de nouveau $\nu_k \not\rightarrow \mu$ et $\mu_n \not\rightarrow \mu$.

Par contraposée, si $\mu_n \rightarrow \mu$, alors $d_L(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$.

Supposons maintenant $d_L(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$. Soit $\varepsilon > 0$, et $[-C, C]$ un intervalle tel que $\mu([-C, C]) \geq 1 - \varepsilon$. Pour n assez grand, $d_L(\mu_n, \mu) \leq \varepsilon$, donc le graphe complété Γ_{μ_n} a un point à distance moins de ε de $(-C, F_\mu(-C))$, et un point à distance moins de ε de $(C, F_\mu(C))$, voir le dessin ci-dessous :



Ceci implique $F_{\mu_n}(-C - 2\varepsilon) \leq 2\varepsilon$ et $F_{\mu_n}(C + \varepsilon) \geq 1 - 2\varepsilon$ pour $n \geq n_0$. En prenant également en compte les mesures μ_n avec $n < n_0$, qui sont en nombre fini, on conclut qu'il existe un intervalle $[-K, K]$ tel que $\mu_n([-K, K]) \geq 1 - 2\varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, la suite de mesures de probabilité $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est tendue, donc pour montrer que $\mu_n \rightarrow \mu$, il suffit de montrer que la seule limite possible d'une sous-suite convergente en loi est μ . Or, si $\mu_{n_k} \rightarrow \nu$, alors $d_L(\mu_{n_k}, \nu) \rightarrow 0$ par le sens direct, donc $d_L(\mu, \nu) = 0$ et $\mu = \nu$. Ceci conclut la preuve.

Corrigé exercice 4. Voir Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Theorem 30.1.