Chaînes de Markov :

états récurrents et états transients

1. Nombre de visites d'un état.

On fixe un espace d'états $\mathcal{X}$ fini ou dénombrable
une matrice stochastique P sur $\mathcal{X}$.

On s'intéresse au nombre V_x de visites d'un état x :

$V_x = \text{card}\{n \geq 1 \mid X_n = x\}$, avec $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CM de matrice de transition P.

On va d'abord répondre à cette question sous $\mathbb{P}_x$.

rappel : $\tau_x^+ = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = x\} \in [\![1, +\infty]\!]$.

Conditionnellement à $\{\tau_x^+ = t\}$,

- l'excursion $(X_0, X_1, \dots X_{t-1})$ de x à x

- la chaîne décalée $(X_{t+n})_{n\in\mathbb{N}}$

sont indépendants, la chaîne décalée ayant de nouveau loi $\mathbb{P}_x$

(phénomène de renouvellement).

<u>Théorème</u> : Sous $\mathbb{P}_x$, le nombre de visites V_x :

- soit, vaut $+\infty$ avec probabilité 1
- soit, suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p_x)$ pour un certain $p_x \in (0,1]$

$$\mathbb{P}_x[V_x = k] = (1-p_x)^k \, p_x \qquad \forall k \geq 0 .$$

<u>Preuve</u> :

Pour tout $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}_x[V_x \geq k+1] = \mathbb{P}_x\left[V_x\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \geq k+1 \text{ et } \tau_x^+\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) < +\infty\right]$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}_x \left[V_x\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \geq k+1 \text{ et } \tau_x^+\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = t \right]$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}_x \left[V_x\left((X_{n+t})_{n\in\mathbb{N}}\right) \geq k \text{ et } \tau_x^+\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = t \right]$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}_x \left[V_x\left((X_{n+t})_{n\in\mathbb{N}}\right) \geq k \mid \tau_x^+ = t \right] \mathbb{P}_x \left[\tau_x^+ = t \right]$$

$$= \mathbb{P}_x \left[V_x \geq k \right] \left(\sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}_x \left[\tau_x^+ = t \right] \right)$$

$$= \mathbb{P}_x \left[V_x \geq k \right] \underbrace{\mathbb{P}_x \left[\tau_x^+ < +\infty \right]}_{1-p_x \text{ avec } p_x \in [0,1]}.$$

$p_x = \mathbb{P}_x \left[\tau_x^+ = +\infty \right] =$ probabilité de non retour en x.

- Si $p_x = 0$, alors $V_x \geq k$ $\forall k$ avec probabilité 1

$\Longrightarrow$ $V_x = +\infty$ presque sûrement sous $\mathbb{P}_x$

On dit que x est un état récurrent.

- Si $p_x > 0$, V_x suit une loi géométrique de paramètre p_x.

$$\mathbb{P}_x[V_x \geq k] = (1-p_x)^{k-1} \underbrace{\mathbb{P}_x[V_x \geq 1]}_{\mathbb{P}_x[\tau_x < +\infty] = 1-p_x}$$

$$= (1-p_x)^k$$

et $\mathbb{P}_x[V_x = k] = \mathbb{P}_x[V_x \geq k] - \mathbb{P}_x[V_x \geq k+1]$

$$= (1-p_x)^k - (1-p_x)^{k+1} = (1-p_x)^k p_x.$$

On dit que x est un état transient.

On a donc scindé l'espace des états $\mathcal{X}$ en deux sous classes :

- l'ensemble $\mathcal{T}$ des états transients :

$$x \in \mathcal{T} \iff V_x < +\infty \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s} \iff \tau_x^+ = +\infty \text{ avec } \mathbb{P}_x$$
probabilité positive

- l'ensemble $\mathcal{R}$ des états récurrents :

$$x \in \mathcal{R} \iff V_x = +\infty \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.} \iff \tau_x^+ < +\infty \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}$$

2. Critère de récurrence

Pour savoir si un état x est récurrent ou transient, on peut utiliser le critère suivant :

Proposition Un état $x \in \mathcal{X}$ est récurrent si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,x) = +\infty$$

Preuve Notons que :

$$V_x = \operatorname{card}\{n \geq 1 \mid X_n = x\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(X_n = x)}$$

$$\mathbb{E}_x[V_x] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{(X_n = x)}] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[X_n = x]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,x).$$

Si x est récurrent $\Rightarrow$ $V_x = +\infty$ p.s. sous $\mathbb{P}_x$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}_x[V_x] = +\infty$

Si x est transient $\Rightarrow$ $V_x \sim \mathcal{G}(p_x)$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}_x[V_x] = \frac{1}{p_x} - 1 < +\infty.$

$(p_x > 0)$

$\square$

<u>exemple</u> marche aléatoire de paramètre p sur $\mathbb{Z}$

représentation de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous $\mathbb{P}_x$:

$$X_n = x + \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$$ avec les ξ_i iiD, $\mathbb{P}[\xi_i = +1] = p$, $\mathbb{P}[\xi_i = -1] = 1-p$.

Supposons $p \neq \frac{1}{2}$. Alors, par la loi des grands nombres,

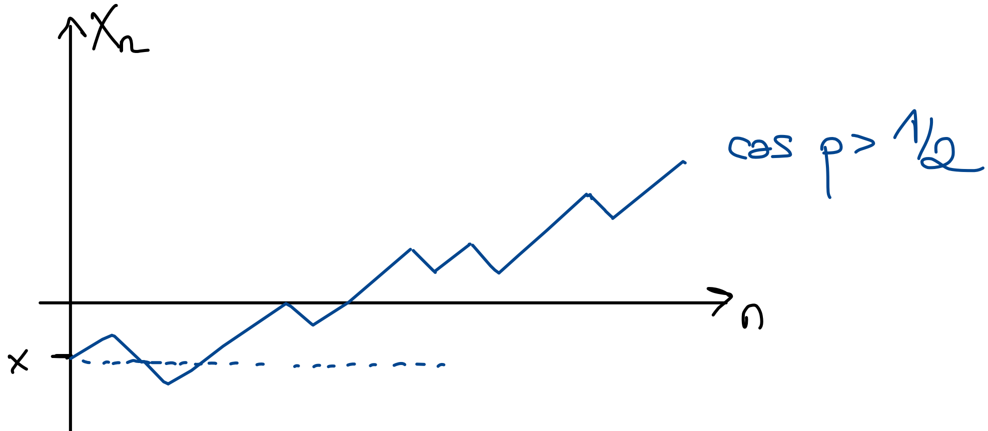
$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \xrightarrow[p.s]{} \mathbb{E}[\xi_1] = 2p - 1 \neq 0$$

donc $|\xi_1 + \cdots + \xi_n| \xrightarrow[p.s.]{} +\infty$

$$X_n \xrightarrow[p.s]{} \pm\infty$$ sous $\mathbb{P}_x$, selon que $p > \frac{1}{2}$ ou $p < \frac{1}{2}$.

Ceci implique $V_x < +\infty$ avec probabilité 1 sous $\mathbb{P}_x$

$\Longrightarrow$ tout état x est transient si $p \neq 1/2$.



On peut retrouver le résultat avec le critère numérique.

$P^n(x,x) = 0$ si n est impair (X_n change de parité à chaque pas, donc ne peut revenir au point de départ qu'en un nombre pair de pas)

$P^{2n}(x,x) = \#$ nbre de chemins de longueur $2n$ reliant x à x

$\times$ probabilité d'un tel chemin

$\leq 2^{2n}$

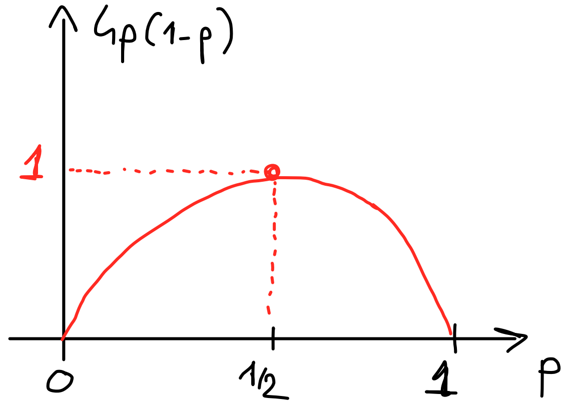
$p^n(1-p)^n$ (n pas vers le haut
n pas vers le bas)

$$\leq \left(4p(1-p)\right)^n$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P^{2n}(x,x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(4p(1-p)\right)^n$ série géométrique

$$< +\infty \quad \text{si } p \neq \frac{1}{2}$$

En effet :



On peut montrer inversement que tous les états sont récurrents si $p = 1/2$ (voir TD).

3. Cas particuliers : chaînes finies et chaînes irréductibles

__Proposition__ Soit P une matrice de transition sur un ensemble $\mathcal{X}$ __fini__. Il y a au moins un état $x \in \mathcal{X}$ qui est récurrent.

<u>Preuve</u> Fixons un état x_0 arbitraire. Notons que

$$+\infty = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \sum_{x\in\mathcal{X}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(X_n = x)}$$

$$= \sum_{x\in\mathcal{X}} V_x$$

Donc sous $\mathbb{P}_{x_0}$, l'un des nombres V_x vaut $+\infty$ avec probabilité >0.

1er cas : $\mathbb{P}_{x_0}[V_{x_0} = +\infty] > 0$. Alors, cette probabilité vaut 1 et x_0 est récurrent.

2e cas : $\mathbb{P}_{x_0}[V_x = +\infty] > 0$ pour un $x \neq x_0$.

On remarque alors que :

$$\mathbb{P}_{x_0}\left[V_x\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = +\infty \right]$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}_{x_0}\left[\tau_x^+((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = t \right] \mathbb{P}_{x_0}\left[V_x((X_{n+t})_{n\in\mathbb{N}} = +\infty \mid \tau_x^+ = t \right]$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}_{x_0}\left[\tau_x^+ = t \right] \mathbb{P}_x\left[V_x = +\infty \right]$$

$$= \mathbb{P}_{x_0}\left[\tau_x^+ < +\infty \right] \mathbb{P}_x\left[V_x = +\infty \right].$$

Ceci force $\mathbb{P}_x[V_x = +\infty] > 0 \implies \mathbb{P}_x[V_x = +\infty] = 1$

$\implies x$ récurrent. $\square$.

Un autre cas particulier important est celui des chaînes irréductibles.

<u>Définition</u> Soit P une matrice stochastique sur un espace

d'états $\mathcal{X}$. Si $x, y \in \mathcal{X}$, on dit que x communique avec y s'il existe une chaîne $x = x_0 \to x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n = y$ avec $P(x_{i-1}, x_i) > 0$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

x communique avec y $\iff P^n(x, y) > 0$ pour un certain $n \geq 0$.

$\iff$ il y a un chemin de x à y dans le graphe dirigé G_P.

La matrice P définit une chaîne irréductible si, $\forall x, y$, x communique avec y.

$\iff$ le graphe dirigé G_P est connexe.

Un résultat essentiel que nous montrerons la prochaine fois est :

Théorème Soit $\mathcal{X}$ un espace d'états, P une matrice stochastique irréductible sur $\mathcal{X}$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CM de matrice P et loi initiale π_0 arbitraire.

On a l'alternative :

- tous les états $x \in \mathcal{X}$ sont récurrents

ou

- tous les états $x \in \mathcal{X}$ sont transients.

<u>Corollaire</u> : Sur un espace d'états $\mathcal{X}$ fini, si P est une matrice de transition irréductible, alors tous les états sont récurrents.

En effet, il y a au moins un état récurrent, donc la seconde option de l'alternative est exclue.