Introduction à SageMath

Chaînes de Markov 2023-2024

Objectifs de la séance : apprendre à utiliser SageMath dans un contexte de simulations aléatoires.

Ouvrir un terminal, puis lancer Sage avec la commande `sage -n jupyter`. Créer une feuille de calcul SageMath. Pour exécuter le contenu d'une cellule de la feuille de calcul, taper (Shift+Enter). Le résultat du dernier calcul est automatiquement stocké dans la variable `_` ; par exemple, la commande `type(_)` affiche le type de ce résultat. Une aide thématique est disponible à l'adresse :

`http://doc.sagemath.org/html/en/reference/`.

Opérations, variables, méthodes. On commence par introduire les bases de Python et de Sage.

(1) Calculer $3+2+5$, $\sin(\frac{\pi}{3})$, $\sqrt{1-\sin^2(\frac{\pi}{3})}-\cos(\frac{\pi}{3})$. Toutes les fonctions usuelles sont déjà programmées !

(2) On stocke ou modifie une variable nommée x avec la commande `x = val`, où `val` est la valeur que l'on veut donner à x. Recalculer la valeur de $\sqrt{1-\sin^2(\frac{\pi}{3})}-\cos(\frac{\pi}{3})$ en stockant d'abord une variable égale `x` à $\sin(\frac{\pi}{3})$. Pour afficher la valeur d'une variable `x`, on utilise la commande `print(x)`, ou simplement `x`.

(3) La documentation d'une fonction `func` est donnée par la commande `func?`. Demander la documentation de la fonction `sin`, et celle de `matrix`. Créer une variable `M` égale à la matrice $\left(\begin{smallmatrix}1&2\\0&1\end{smallmatrix}\right)$.

(4) Le type d'un objet `x` dans Sage (ou Python) est donné par la fonction `type(x)`. Quel est le type de `3`? de `3.1`? de la matrice créée à la question précédente? On peut forcer le type d'un nombre `x` (réel, entier, rationnel) avec les commandes `RR(x)`, `ZZ(x)` et `QQ(x)`. Créer trois versions différentes du nombre 3.

(5) Tous les objets dans Sage ont des méthodes qui leurs sont associées, et qui dépendent du type de l'objet en question. Une méthode `method` d'un objet `x` est appelée par la commande `x.method()`. Pour avoir la liste des méthodes associées à un objet `x`, on peut taper `x.` + (Tab). Calculer le déterminant, les valeurs propres et l'inverse de la matrice `M`.

(6) Presque tous les objets mathématiques sont déjà implémentés dans Sage. En utilisant la documentation, réaliser les taches suivantes :

   (a) Créer un graphe (`Graph`) qui est un triangle, et l'afficher.

   (b) Obtenir la table de multiplication du corps fini (`Finite...`) $\mathbb{F}_4$ à 4 éléments.

   (c) Calculer le développement de Taylor à l'ordre 6 de la fonction $\exp(1-\cos(x))$.

Fonctions, listes, itération. On détaille maintenant quelques techniques de programmation plus avancées : fonctions, listes, boucles `for`.

(1) Une fonction $f(x)$ d'une variable x est définie en Sage par la commande :

```
def func(x):
        instructions
        return (le resultat)
```

Attention, tout le contenu de la fonction doit être indenté dans le code. Créer une fonction $g(x) = \sqrt{1 - \exp(-x)}$, et calculer $g(0.3)$. Afficher son graphe sur l'intervalle $[a, b] = [0, 2]$ en utilisant la commande `plot(lambda x : g(x),x,a,b)`.

(2) On peut tester une condition, par exemple dans les instructions d'une fonction avec :

```
if condition:
        instructions_1
else:
        instructions_2
```

De nouveau, les instructions doivent être indentées par rapport au reste du programme pour être reconnues comme telles. Les conditions que l'on peut tester sont l'égalité (`a == b`), l'inégalité stricte (`a < b`) ou large (`a <= b`), *etc.* Créer une fonction

$$h(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 1 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

et afficher son graphe sur $[-2, 2]$.

(3) Une liste d'objets (a, b, c) est codée par la commande `[a,b,c]`. On appelle le i-ième élément d'une liste L par `L[i]` (les éléments sont numérotés à partir de 0), et on ajoute un élément x à la fin d'une liste L avec `L.append(x)`. Créer une fonction `liste_factorielle(n)` qui renvoie la liste des entiers $k!$, avec k entre 1 et n (indication : on peut appeler une fonction f récursivement à l'intérieur d'elle-même).

(4) Si l'on a des opérations à effectuer sur les éléments d'une liste `L`, on utilise :

```
for x in L:
        instructions
```

La liste des entiers entre 1 et n est donnée par `range(1,n+1)` ou par `[1..n]`. Créer une fonction `factoriel(n)` qui calcule $n!$.

Variables aléatoires. On explique comment travailler avec des variables aléatoires.

(1) Une variable uniforme sur $[0, 1]$ est donnée par la commande `random()`. À partir de celle-ci, on peut construire n'importe quelle variable réelle X de fonction de répartition F_X, car si $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$, alors $F_X^{-1}(U) \sim X$. Créer :

(a) une fonction `random_exp(t)` qui renvoie une variable de loi exponentielle, dont la densité est $1_{x>0}\, \mathrm{e}^{-tx}\, t\, dx$;

(b) une fonction `random_bernoulli(p)` qui renvoie une variable de Bernoulli de paramètre p.

(c) et une fonction `random_binomial(n,p)` qui renvoie une variable binomiale de paramètres n et p.

(2) En fait, la plupart des lois continues sont déjà implémentées dans `Sage`, et on peut y accéder avec la commande `RealDistribution(type,parametres)`. Ainsi,

```
U = RealDistribution("uniform",[0,1])
G = RealDistribution("gaussian",1)
```

définissent des générateurs aléatoires de lois respectives $\mathcal{U}([0, 1])$ et $\mathcal{N}(0, 1)$. Si `X` est un générateur aléatoire défini dans `Sage`, on obtient des nombres aléatoires indépendants avec la commande `X.get_random_element()`. Utiliser les méthodes du générateur gaussien `G`

défini ci-dessus pour dessiner la densité et la fonction de répartition de la loi gaussienne standard, et pour obtenir une liste de 10 nombres aléatoires gaussiens indépendants.

(3) La fonction `sage.plot.histogram.histogram(L)`, qu'on peut évaluer en une liste `L`, dresse un histogramme des valeurs de la liste. Dresser un histogramme de 10000 valeurs du générateur aléatoire gaussien (indication : on peut rajouter après l'argument `L` la commande `,bins=n` dans les parenthèses pour avoir un histogramme en n colonnes).

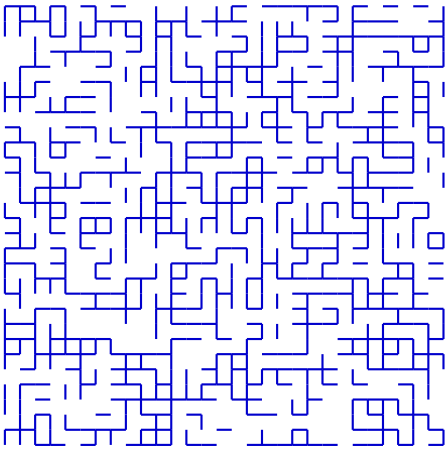
(4) Vérifier la loi des grands nombres et le théorème central limite pour des sommes de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes (indication : `sum(L)` renvoie la somme d'une liste).

(5) Dans Sage, les représentations graphiques peuvent être construites avec des listes d'instructions. On initialise un graphique avec la commande `G = Graphics()`, et on rajoute un objet `Obj` sur le graphe (ligne, polygone, texte, *etc.*) avec la commande `G += Obj`. On affiche ensuite `G` avec `G.show()`, avec éventuellement des options dans l'argument de `show()`. Par exemple,

```
G = Graphics()
G += line([(0,0),(0,1)])
G += line([(1,0),(0,1)])
G += line([(0,0),(1,0)])
G.show(axes=False,aspect_ratio=1)
```

dessine un triangle rectangle isocèle.

Écrire une fonction `Percolation(n,p)` qui garde chaque arête de la grille $[\![0,n]\!] \times [\![0,n]\!]$ avec probabilité p indépendamment pour chaque arête, et affiche le résultat.



Chaînes de Markov. On programme diverses chaînes de Markov : marches aléatoires, processus de branchement, *etc.*

(1) Écrire un programme `Marche(n,p)` qui affiche les n premières étapes d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ de paramètre p. Vérifier expérimentalement que si $p > \frac{1}{2}$, alors la marche aléatoire tend presque sûrement vers $+\infty$; tandis que si $p = \frac{1}{2}$, alors la marche semble revenir infiniment souvent en 0.

(2) L'anneau $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ est défini dans Sage par `R = Integers(N)`, et un entier k modulo N est alors appelé par `R(k)`. Par exemple,

```
R = Integers(9)
R(4) + R(7)
```

renvoie 2 (ou plus précisément, la classe dans l'anneau quotient $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ qui contient 2). Écrire un programme `MarcheCercle(N,n)` qui calcule les n premières étapes d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, issue de 0 et avec probabilités de transition

$$P(k,k) = P(k,k-1) = P(k,k+1) = \frac{1}{3}.$$

Vérifier avec un histogramme que pour n grand, la loi de la position X_n est quasi-uniforme sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

(3) Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$. Le processus de Galton-Watson de loi μ est la suite aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que X_{n+1} est la somme de X_n variables aléatoires indépendantes de loi μ. Il représente l'évolution d'une population dont chaque individu a aléatoirement $Y \sim \mu$ enfants, indépendamment pour chaque individu. Calculer la matrice de transition de cette chaîne de Markov, et écrire un programme `GaltonWatson(Y,n,k)` qui dépend d'un générateur aléatoire `Y` et donne les n premières générations du processus, partant de $X_0 = k$.

(4) Programmer une classe `ChaineMarkov` qui s'initialise à partir d'une liste d'états et d'une matrice de transition, et qui contient des méthodes :

— pour calculer une trajectoire de la chaîne de Markov, et la mesure empirique associée ;

— pour calculer la mesure invariante de la chaîne.