Ensembles, relations, fonctions

vendredi 29 avril 2011

1. Opérations sur les ensembles. Si A et B sont deux ensembles, on rappelle que leur *réunion* est l'ensemble

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\},$$

et que leur *intersection* est l'ensemble

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Dans cet exercice, on étudie les propriétés de ces opérations, et le lien qu'elles entretiennent avec d'autres opérations ensemblistes.

1. Si $A = \{3, 7, 11\}$ et $B = \{2, 3, 5\}$, décrire $A \cap B$ et $A \cup B$.
2. Montrer que $\cap$ est distributive par rapport à $\cup$, c'est-à-dire que pour tous ensembles A, B, C, D,

$$(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D).$$

3. De même, montrer que $\cup$ est distributive par rapport à $\cap$, c'est-à-dire que pour tous ensembles A, B, C, D,

$$(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D).$$

4. On fixe un ensemble X, et si $A \subset X$, on dit que A est une *partie* de X, et on note

$$\complement_A^X = \{x \in X \mid x \notin A\}$$

le *complémentaire* de A dans X. Plus généralement, étant donnés deux ensembles A et B (non nécessairement inclus l'un dans l'autre), on note $A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$. En particulier, $\complement_A^X = X \setminus A$ si $A \subset X$. Montrer que pour toutes parties A et B de X, on a :

$$\complement_{A\cap B}^X = \complement_A^X \cup \complement_B^X \quad ; \quad \complement_{A\cup B}^X = \complement_A^X \cap \complement_B^X.$$

Dans le même contexte, simplifier les deux expressions suivantes :

$$(A \cap B) \cup (\complement_A^X \cap B) \cup (A \cap \complement_B^X) \cup (\complement_A^X \cap \complement_B^X) \quad ; \quad \complement_{A\setminus B}.$$

Montrer aussi que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

5. Le *produit cartésien* de deux ensembles A et B est l'ensemble $A \times B$ des couples (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$. Montrer que cette opération est distributive par rapport à $\cup$ et $\cap$:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad ; \quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

Si $A \subset X$ et $B \subset Y$, décrire $\complement_{A\times B}^{X\times Y}$.

2. Images directes et réciproques de parties par une application. On rappelle qu'une *fonction* (ou *application*) entre deux ensembles X et Y est une correspondance $x \in X \mapsto f(x) \in Y$; en termes abstraits, c'est donc une partie G_f de $X \times Y$ telle que pour tout $x \in X$, il existe un unique couple $(x, y) \in G_f$ — on note alors $y = f(x)$. Si $A \subset X$ et $B \subset Y$, on introduit les deux parties

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists a \in A,\ y = f(a)\} \subset Y;$$
$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid \exists b \in B,\ b = f(x)\} \subset X.$$

On dit que $f(A)$ est l'*image directe* de la partie A par f, et que $f^{-1}(B)$ est l'*image réciproque* de la partie B par f. Soient A et A' deux parties de X, et B et B' deux parties de Y. Montrer que :

$$\begin{aligned} f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A') \quad &; \quad f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') \\ f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B') \quad &; \quad f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \\ f^{-1}(B \setminus B') = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(B') \quad &; \quad f^{-1}(\complement_B^Y) = \complement_{f^{-1}(B)}^X. \end{aligned}$$

Montrer que la première inclusion peut être stricte.

3. **Applications injectives, surjectives, bijectives.** Si $f : X \to Y$ est une application, on dit que f est :

- *injective* si $f(x) = f(x')$ implique $x = x'$; autrement dit, tout élément de Y est atteint au plus une fois.
- *surjective* si tout $y \in Y$ peut s'écrire $y = f(x)$ pour au moins un $x \in X$; autrement dit, tout élément de Y est atteint au moins une fois.
- *bijective* si elle est à la fois injective et surjective ; autrement dit, tout élément de Y est atteint une et une seule fois par f.

1. Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$, on rappelle que la *composée* de f et de g est l'application $g \circ f : X \to Z$ définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$. Montrer que si f et g sont injectives (respectivement, surjectives, bijectives), alors $g \circ f)$ est injective (resp., surjective, bijective).
2. Réciproquement, montrer que si $g \circ f$ est injective (resp., surjective), alors f est injective (resp., alors g est surjective).
3. Soient $f : W \to X$, $g : X \to Y$ et $h : Y \to Z$. On suppose que $h \circ g$ et $g \circ f$ sont bijectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.
4. Soient f, g, h trois applications de X dans X. On suppose que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont injectives, et que $f \circ h \circ g$ est surjective. Montrer que f, g et h sont bijectives.
5. Pour tous ensembles X et Y, on note $\mathcal{F}(X, Y)$ l'ensemble des fonctions de X dans Y. Si $f : X \to Y$, pour tout ensemble A, on note

$$\begin{aligned} A^\star(f) : \mathcal{F}(Y, A) \to \mathcal{F}(X, A) \quad &; \quad A_\star(f) : \mathcal{F}(A, X) \to \mathcal{F}(A, Y) \\ g \mapsto g \circ f \quad &; \quad g \mapsto f \circ g. \end{aligned}$$

Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout ensemble A, $A_\star(f)$ (resp., $A^\star(f)$) est injective (resp., est surjective). Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout ensemble A, $A_\star(f)$ (resp., $A^\star(f)$) est surjective (resp., est injective).

4. **Applications monotones.** Soient $(X, \leq)$ et $(Y, \preceq)$ deux *ensembles ordonnés*, c'est-à-dire munis de relations réflexives, antisymétriques et transitives. Une application $f : X \to Y$ est dite *croissante* si

$$x \leq x' \Rightarrow f(x) \preceq f(x'),$$

et *décroissante* si $x \leq x' \Rightarrow f(x) \succeq f(x')$.

1. Que dire de la composée d'applications croissantes ? d'applications décroissantes ? d'une application croissante et d'une application décroissante ?
2. Montrer que muni de la relation d'inclusion $\subseteq$, l'ensemble $\mathfrak{P}(X)$ des parties d'un ensemble X est un ensemble ordonné.
3. Soit $f : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ une application croissante (relativement à l'inclusion des parties). On pose :

$$Z = \{A \in \mathfrak{P}(X) \mid f(A) \subseteq A\} \quad ; \quad B = \bigcap_{A \in Z} A.$$

Montrer que $f(B) = B$ — indication : raisonner par double inclusion.