Logique propositionnelle, induction

vendredi 20 mai 2011

1. Connecteur logique universel NAND. On note NAND le connecteur logique binaire (dit *connecteur de Sheffer*) dont la table de vérité est la suivante :

$A \backslash B$	V	F
V	F	V
F	V	V

Autrement dit, $(A \text{ NAND } B)$ est vraie si et seulement si $(A \text{ ET } B)$ est fausse. Pour deux variables A et B, écrire en fonction du seul connecteur NAND les formules logiques

$$\text{NON } A \ , \ (A \text{ ET } B) \ , \ (A \text{ OU } B) \ , \ A \Rightarrow B \ , \ A \Leftrightarrow B.$$

En déduire que toute formule de la logique propositionnelle est équivalente à une formule avec le seul connecteur logique NAND.

2. Connecteur logique XOR. On note XOR le connecteur binaire (dit *ou exclusif*) dont la table de vérité est la suivante :

$A \backslash B$	V	F
V	F	V
F	V	F

Montrer que les formules logiques suivantes sont équivalentes :

$$(A \text{ XOR } B) \equiv (A \text{ OU } B) \text{ ET } (\text{NON } (A \text{ ET } B))\,;$$
$$\text{NON } (A \text{ XOR } B) \equiv (A \Leftrightarrow B).$$

3. Forme normale conjonctive. On appelle *clause* une formule de la logique propositionnelle qui est une disjonction (de taille arbitraire) de variables propositionnelles A ou $(\text{NON } A)$. Par exemple,

$$A \text{ OU } B \text{ OU } (\text{NON } C) \text{ OU } D$$

est une clause, mais $A \text{ ET } (\text{NON } B)$ n'en est pas une, et $\text{NON } (A \text{ OU } B)$ non plus. On dit qu'une formule logique est sous *forme normale conjonctive* si elle s'écrit comme conjonction (de taille arbitraire) de clauses. Par exemple,

$$(A \text{ OU } B \text{ OU } (\text{NON } C)) \text{ ET } ((\text{NON } B) \text{ OU } D)$$

est sous forme normale conjonctive (c'est la conjonction de deux clauses). L'objectif de l'exercice est de montrer que toute formule logique est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive.

Dans ce qui suit, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des formules logiques, on note $\mathcal{F} \equiv \mathcal{G}$ si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont équivalentes, et $\mathcal{F} \equiv \text{FNC}$ si $\mathcal{F}$ est équivalente à (au moins) une formule sous forme normale conjonctive. D'autre part, si A, B, C, *etc.* sont les variables intervenant dans une formule logique $\mathcal{F}$, on note $\mathcal{F}'$ la formule logique où l'on a remplacé chaque occurrence d'une variable V par $(\text{NON } V)$.

1. Si $\mathcal{F} \equiv \text{FNC}$ et $\mathcal{G} \equiv \text{FNC}$, montrer que $(\mathcal{F} \text{ ET } \mathcal{G}) \equiv \text{FNC}$.
2. Si $\mathcal{F} \equiv \text{FNC}$, montrer que $\mathcal{F}' \equiv \text{FNC}$. Montrer aussi que $\mathcal{F}'$ est équivalente à $\text{NON } \mathcal{G}$, où $\mathcal{G}$ est une formule sous *forme normale disjonctive*, c'est-à-dire une disjonction (de taille arbitraire) de conjonctions de variables A et $(\text{NON } A)$. On pourra utiliser les lois de De Morgan

$$\text{NON } (\mathcal{A} \text{ ET } \mathcal{B}) \equiv (\text{NON } \mathcal{A}) \text{ OU } (\text{NON } \mathcal{B}) \qquad \text{et} \qquad \text{NON } (\mathcal{A} \text{ OU } \mathcal{B}) \equiv (\text{NON } \mathcal{A}) \text{ ET } (\text{NON } \mathcal{B}).$$

3. Si $\mathcal{F} \equiv$ FNC, montrer que $(\text{NON } \mathcal{F}) \equiv$ FND. Montrer ensuite que toute formule sous forme normale disjonctive est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive — indication : utiliser la distributivité de ET et de OU. Conclure que $(\text{NON } \mathcal{F}) \equiv$ FNC.
4. Si $\mathcal{F} \equiv$ FNC et $\mathcal{G} \equiv$ FNC, montrer que $(\mathcal{F} \text{ OU } \mathcal{G}) \equiv$ FNC — indication : écrire

$$(\mathcal{F} \text{ OU } \mathcal{G}) \equiv \text{NON } ((\text{NON } \mathcal{F}) \text{ ET } (\text{NON } \mathcal{G}))$$

et utiliser les questions 1. et 3. De même, montrer que $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ et $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$ sont équivalentes à des formes normales conjonctives.
5. Conclure que toute formule de la logique propositionnelle est équivalente à une forme normale conjonctive.

Remarque : pour les questions 2. et 5., une induction est nécessaire dans le cadre d'un raisonnement rigoureux.

4. **Quelques exemples de raisonnement par récurrence.** Démontrer par récurrence les propositions suivantes. On demande de préciser très clairement quelle est l'hypothèse $\mathcal{P}(n)$, et bien sûr de démontrer le premier cas $\mathcal{P}(0)$ et l'implication $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.
   1. Pour tout entier naturel n, $1 + 3 + 9 + \cdots + 3^n = (3^{n+1} - 1)/2$.
   2. Pour tout entier naturel n, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$.
   3. Pour tout entier naturel n, $(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.