Relations d'ordre et d'équivalence

vendredi 6 mai 2011

1. Quelques exemples de relations. Pour chacune des relations $\mathcal{R}$ suivantes, préciser si $\mathcal{R}$ est *réflexive*, *symétrique*, *anti-symétrique*, *transitive*. Quelles relations sont des relations d'équivalence ? des ordres ? dans ce dernier cas, dire si l'ordre est total ou partiel — on rappelle qu'un ordre $\geq$ est dit *total* si pour tous éléments x et y, on a $x \geq y$ ou $y \geq x$.

1. $E = \mathbb{R}$ (l'ensemble des nombres réels), $x \mathcal{R} y$ si $xy = 1$.
2. $E = \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} y$ si $x^2 \geq y^2$.
3. $E = \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} y$ si $x^3 - 3x = y^3 - 3y$.
4. E est un ensemble quelconque, $f : E \to F$ est une fonction, $x \mathcal{R} y$ si $f(x) = f(y)$.
5. E est un ensemble quelconque, $(F, \geq_F)$ est un ensemble muni d'une relation d'ordre, $f : E \to F$ est une fonction, $x \mathcal{R} y$ dans E si $f(x) \geq_F f(y)$.
6. $E = \mathcal{W}$ est l'ensemble des suites finies d'entiers positifs — $(3, 2, 3)$ ou $(2, 1, 4, 2, 1, 1)$ sont par exemple des éléments de $\mathcal{W}$. On notera une suite $A = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$, ou plus simplement $A = a_1 a_2 \cdots a_r$ — par exemple, les deux suites précédentes s'écrivent maintenant 323 et 214211.

   $A \mathcal{R} B$ s'il existe un indice i plus petit que les longueurs de A et de B, et tel que $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, *etc.*, $a_{i-1} = b_{i-1}$ et $a_i > b_i$.
7. $E = \mathcal{W}$, $A \mathcal{R} B$ si A et B ont même longueur, et s'il existe un entier $i \geq 2$ plus petit que la longueur de A et de B tels que

$$a_i = b_{i-1} \quad ; \quad a_{i-1} = b_i \quad ; \quad a_j = b_j \text{ si } j \neq i-1, i.$$

8. $E = \mathbb{N}$ (l'ensemble des entiers positifs ou nuls), $x \mathcal{R} y$ si $x - y$ est divisible par 3.

2. Dénombrement de fonctions et de relations. On considère un ensemble fini E à n élements. On rappelle qu'une relation $\mathcal{R}$ sur E peut être vue comme la partie de $E \times E$ constituée des couples (x, y) tels que $x \mathcal{R} y$. Ceci permet d'associer à $\mathcal{R}$ un *tableau* ; par exemple, si $E = \{1, 2\}$ et si la relation $\mathcal{R}$ est définie par

$$1 \not\mathcal{R}\, 1 \quad ; \quad 1 \mathcal{R} 2 \quad ; \quad 2 \mathcal{R} 1 \quad ; \quad 2 \not\mathcal{R}\, 2$$

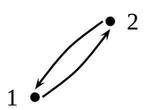
alors le tableau associé est

$x \backslash y$	1	2
1		$\bullet$
2	$\bullet$	

.

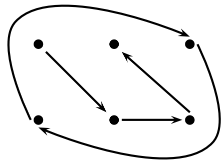
Décrire géométriquement (sur le tableau) les propriétés de réflexivité, de symétrie, d'antisymétrie. À quelle condition sur son tableau une relation est-elle fonctionnelle ? En déduire le nombre de relations, le nombre de relations réflexives, le nombre de relations symétriques ou antisymétriques, et le nombre de fonctions sur un ensemble à n élements. Donner ces nombres quand $n = 2, 3$. Pour $n = 2, 3$, donner également le nombre d'ordres totaux et le nombre d'ordres partiels.

3. Clôture réflexive et transitive d'une relation. Soit E un ensemble fini, et $\mathcal{R}$ une relation sur cet ensemble, qu'on représente par un *graphe orienté*, avec une flèche de a vers b si $a \mathcal{R} b$. Par exemple, pour la relation de l'exercice précédent, le graphe orienté associé est



.

La *clôture réflexive et transitive* de $\mathcal{R}$ est la relation $\mathcal{R}^*$ définie comme suit : $a \mathcal{R}^* b$ si $a = b$ ou s'il existe une suite $a_1, a_2, \ldots, a_r$ d'éléments de E avec $a \mathcal{R} a_1$, $a_1 \mathcal{R} a_2$, $a_2 \mathcal{R} a_3$, *etc.* jusqu'à $a_r \mathcal{R} b$. Décrire en fonction du graphe de $\mathcal{R}$ sa clôture réflexive et transitive — on pourra raisonner sur la relation donnée par le graphe suivant :



Montrer que pour toute relation $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^*$ est effectivement une relation transitive et réflexive. À quelles conditions sur le graphe de $\mathcal{R}$ obtient-on après clôture un ordre ? un ordre total ?

Décrire la clôture de la relation 7. de l'exercice 1, et montrer que c'est une relation d'équivalence. Plus généralement, montrer que la clôture d'une relation symétrique est une relation d'équivalence.

4. **Ensembles quotients.** Soit E un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence sur E. La *classe d'équivalence* d'un élément $x \in E$ est la partie

$$[x] = \{y \in E \mid x \sim y\}.$$

Montrer que deux éléments x et y ont soit la même classe d'équivalence, soit des classes d'équivalence dont l'intersection est vide. L'*ensemble quotient* $E/\sim$ est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation. Décrire cet ensemble pour les relations 3. et 8. de l'exercice 1.

Soit E un ensemble muni d'une relation réflexive et transitive $\succeq$ (ce qu'on appelle un *préordre*). On définit une nouvelle relation $\sim$ sur E :

$$x \sim y \iff (x \succeq y) \text{ et } (y \succeq x).$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence. Sur l'ensemble quotient $E/\sim$, on définit une relation $\geq$ par :

$$[x] \geq [y] \iff x \succeq y.$$

Montrer que $\geq$ est bien définie, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du choix de représentants x et y des classes $[x]$ et $[y]$. Montrer que $\geq$ est un ordre sur $E/\sim$ (on parle d'*ordre quotient*).