Fonctions : comparaison

lundi 2 novembre 2009

1. Comparaisons de fonctions et de suites.

1. Parmi les fonctions ci-dessous, déterminer les paires (f, g) telles que $f(x) \sim g(x)$, resp., telles que $f(x) \ll g(x)$ au voisinage de 0 :

$$1 \quad ; \quad x \log x \quad ; \quad 3x^2 \quad ; \quad \sqrt{x} \quad ; \quad \sin x \quad ; \quad 3x^2 - x^3$$
$$\tan x \quad ; \quad \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \quad ; \quad \frac{1}{x^2} \quad ; \quad \frac{\sin x}{x} \quad ; \quad x \quad ; \quad \frac{1}{\log x}$$

2. Parmi les suites ci-dessous, déterminer les paires (u, v) telles que $u_n \sim v_n$, resp., telles que $u_n = o(v_n)$ lorsque n tend vers l'infini :

$$n^3 + 2n - 6 \quad ; \quad \sqrt{n^2 + 1} \quad ; \quad n + \mathrm{e}^{-n} \quad ; \quad \mathrm{e}^{\pi\sqrt{2n/3}} \quad ; \quad n^3 - 3n^{5/2}$$

2. Développement asymptotique. On appelle développement asymptotique d'une fonction f en a une écriture du type

$$f(x) = g(x) + h(x) + i(x) + \cdots + z(x),$$

où $h(x) = o(g(x))$, $i(x) = o(h(x))$, etc., au voisinage de a. Dans ce qui suit, on pose

$$f(x) = 1/\sqrt{1+x},$$

et on veut donner un développement asymptotique à trois termes de f au voisinage de $a = 0$.

1. Montrer qu'au voisinage de 0, $f(x) = 1 + o(1)$.
2. Soit $h(x) = f(x) - 1$. Montrer que

$$h(x) = -\frac{x}{\sqrt{1+x}\,(1+\sqrt{1+x})},$$

et en déduire que $h(x) \sim -x/2$, puis que $f(x) = 1 - x/2 + o(x)$.

3. Soit $i(x) = f(x) - 1 + x/2$. Montrer que

$$i(x) = x\left(\frac{x}{2\sqrt{1+x}\,(1+\sqrt{1+x})} + \frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}\,(1+\sqrt{1+x})}\right),$$

et en déduire que $h(x) \sim 3x^2/8$, puis que $f(x) = 1 - x/2 + 3x^2/8 + o(x^2)$.