Suites

lundi 12 octobre 2009

1. Suites récurrentes linéaires. Exprimer en fonction de n le terme général des suites récurrentes suivantes :

1. $u_{n+1} = \sqrt{3}\, u_n$ avec $u_0 = -2$.
2. $u_{n+1} = 4u_n - 1$ avec $u_0 = 4$.
3. $u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n)$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 3$.
4. $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.
5. $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n$ avec $u_0 = -1$ et $u_1 = 1$.
6. $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n - 7$ avec $u_0 = -2$ et $u_1 = 0$.
7. $u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n - 4$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

2. Calculs de limites. Déterminer quelles suites parmi celles ci-dessous sont convergentes, et le cas échéant, trouver leurs limites.

$$u_n = \mathrm{e}^{\sqrt{n/14}} - n^6 \quad ; \quad u_n = \frac{\sin(n^2)}{n+1} \quad ; \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n+3}} + (-1)^n$$

$$u_n = \frac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}} \quad ; \quad u_n = \frac{n^3 + 5n}{2n^3 + n\cos n + \frac{1}{n^2}} \quad ; \quad u_n = \frac{\log n}{(n+1)^{1/3}}$$

$$u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n} \quad ; \quad u_n = \frac{5n^2 + \sin n}{3(n+2)^2 \cos\frac{n\pi}{5}}$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

3. Étude d'une suite alternée.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui vérifie les deux hypothèses suivantes :
   – la suite différence $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_1 - u_0, u_2 - u_1, u_3 - u_2, \ldots)$ tend vers 0.
   – la suite des termes pairs $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_2, u_4, \ldots)$ tend vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l.
2. On considère la suite alternée $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k/k$, de sorte que :
   $$u_1 = -1 \quad ; \quad u_2 = -1 + \frac{1}{2} \quad ; \quad u_3 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad \ldots$$
   Étudier la suite des termes pairs : montrer qu'elle est décroissante minorée, et en déduire qu'elle admet une limite. En utilisant ce qui précède, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie.

4. Deux suites équivalentes. Si n est un entier positif ou nul, on rappelle que $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$, avec pour convention $0! = 1$. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les deux suites définies par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad ; \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

1. Utiliser la formule du binôme de Newton pour développer u_n. En remarquant que
   $$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = 1 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq 1$$
   pour tout $k \leq n$, montrer que $u_n \leq v_n$ pour tout entier n.
2. Soit $w_n = v_n - u_n$. Montrer que que $w_n \leq v_n/(n-1)$ (indication : majorer chaque terme de la somme w_n, en traitant séparément les termes d'indice $k = 0$ et $k = 1$). Conclure que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites positives équivalentes.
3. En considérant le logarithme de u_n, déterminer la limite commune de $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$.