Équations différentielles

lundi 14 décembre 2009

1. **Équations différentielles d'ordre 1 : séparation des variables.** Résoudre les équations différentielles suivantes en utilisant la méthode de séparation des variables, c'est-à-dire qu'on met l'équation sous la forme $y' f(y) = g(x)$ — dans ce cas, $F(y) = G(x) + C$.

$$y' = \exp(x-y) \qquad ; \qquad y' - x\,y^2 = x \qquad ; \qquad (1+x^2)\,y' = (1+y^2)$$

   On précisera dans chaque cas un intervalle (maximal) de définition des solutions, et on dessinera quelques solutions.

2. **Équations différentielles d'ordre 1, linéaires : variation de la constante.** Résoudre les équations différentielles suivantes en utilisant la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire qu'on trouve d'abord les solutions $C\,h(x)$ de l'équation homogène $y' - y\,f(x) = 0$, et qu'on cherche ensuite les solutions de l'équation de départ sous la forme $y = C(x)\,h(x)$.

$$\begin{aligned}
&y' + \frac{2y}{x} = 0\\
&y' - 2y = x^2, \quad y(0) = 1\\
&y'\,(x^2-1) + 2\,y\,x = 1, \quad x \in]1, +\infty[\\
&y' + y\,\tan x = \sin 2x, \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\
&y'\,\tan x - y = 0, \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1
\end{aligned}$$

3. **Équations différentielles d'ordre 2, linéaires et à coefficients constants.** Résoudre les équations différentielles suivantes en utilisant la méthode de l'équation caractéristique, c'est-à-dire qu'on cherche les solutions sous la forme $A\,\mathrm{e}^{\lambda x} + B\,\mathrm{e}^{\mu x}$, où λ et μ sont les racines de $aX^2 + bX + c = 0$ si l'équation étudiée est $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$.

$$y'' - 5\,y' + 6\,y = 0 \qquad ; \qquad y'' + y' + y = 0 \qquad ; \qquad y'' - 2y' + y = \frac{2\mathrm{e}^x}{(1+x)^3}$$

   Pour la dernière équation, on pourra remarquer qu'une solution particulière est $\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}$.

4. **Équation de Ricatti.** Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$x^2\,y' = y^2 - 2\,x\,y + 2\,x^2, \quad x \geq 1, \ y(0) = 1$$

   On pourra introduire la fonction $z(x) = y(x)/x$.