Révisions

lundi 4 janvier 2010

1. Suites. Donner le terme général des deux suites récurrentes suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 7u_n - 6 \\ u_0 = 2 \end{cases} \qquad ; \qquad \begin{cases} v_{n+2} = 3v_{n+1} - v_n \\ v_0 = v_1 = 1 \end{cases}$$

Soit θ un nombre réel de l'intervalle $]0, \pi/2[$, et $(y_n)_{n\geq 1}$ et $(z_n)_{n\geq 1}$ les deux suites définies par :

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k\theta \qquad ; \qquad z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\theta}{k}$$

En utilisant le nombres complexes et la formule d'Euler, montrer que $y_n = \frac{\sin(n\theta/2)\ \sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$. En déduire une borne pour la suite $(y_n)_{n\geq 1}$. Montrer par récurrence l'identité suivante :

$$\sum_{n=1}^{N} y_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = z_N - \frac{y_N}{N+1}$$

En déduire que la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

2. Fonctions. Étudier les fonctions suivantes sur les intervalles indiqués :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R} \qquad ; \qquad e^{\frac{1}{x^2-1}}, \quad x \in [-1, 1] \qquad ; \qquad \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

3. Développements limités. Donner des développements limités à l'ordre 4 au voisinage de 0 des deux fonctions suivantes :

$$\sin(e^x - \cos x) \qquad ; \qquad \frac{\sqrt{\log(1+x)}}{\cos x}$$

4. Intégrales. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \, dt \qquad ; \qquad \int_0^1 e^{2t} \log(1 + e^t) \, dt \qquad ; \qquad \int_{-2}^{-1} \frac{2t - 5}{4t^3 + 4t^2 + t} \, dt$$

5. Équations différentielles. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} xy + \left[\frac{1+\sqrt{1+x}}{1+(\log y)^2} \right] y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad ; \qquad \begin{cases} y' + e^x y = x^2 \cos x \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad ; \qquad \begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \\ y(0) = y(1) = 1 \end{cases}$$