Polynômes et fractions rationnelles

lundi 4 janvier 2010

1. Division euclidienne de polynômes. Si A et B sont deux polynômes avec $B \neq 0$, on rappelle qu'il existe un unique couple (Q, R) tel que $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$; ce couple est obtenu en posant la division de A par B. Effectuer cette opération pour les couples suivants :

$$A(X) = 3X^2 + 5\,,\ B(X) = X - 2 \quad ; \quad A(X) = X^4\,,\ B(X) = X^2 + 1$$
$$A(X) = X^3 - 2X^2 + 5X - 6\,,\ B(X) = X + 1 \quad ; \quad A(X) = X^6 - 1\,,\ B(X) = X^2 + X + 1$$

2. Factorisation des polynômes réels et complexes. On rappelle que tout polynôme complexe non constant s'écrit de manière unique sous la forme $A(X) = \lambda \prod_{i=1}^{s}(X - z_i)^{m_i}$, où les z_i sont les racines de A et les entiers m_i sont leurs multiplicités. Donner les factorisations (complexes) des polynômes suivants :

$$X^3 - 1 \quad ; \quad X^4 + X^2 - 6 \quad ; \quad X^4 + 1$$

La décomposition en tant que polynôme réel est $A(X) = \lambda \prod_{i=1}^{s}(X - x_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{t}(X^2 + c_j X + d_j)^{n_j}$, où les x_i sont les racines réelles de A, et où les polynômes de degré 2 sont sans racines réelles et donc de discriminant négatif. Cette décomposition est obtenue à partir de la décomposition complexe en réunissant les racines complexes conjuguées pour obtenir les termes de degré 2. Donner les décompositions réelles des polynômes précédents.

3. Interpolation de Taylor et de Lagrange. Si $P(X)$ est un polynôme de degré n et z est un nombre (réel ou complexe), l'interpolation de Taylor de P en z est l'égalité formelle (en tant que polynômes)

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(z)}{k!}(X - z)^k.$$

Donner les interpolations de Taylor des polynômes suivants aux points indiqués :

$$X^2 + 2X + 1\,,\ z = 2 \quad ; \quad X^3 - 2X^2 + 5X - 6\,,\ z = -1$$

Si $(z_0, a_0), (z_1, a_1), \ldots, (z_n, a_n)$ sont $n + 1$ couples de nombres, le polynôme interpolé de Lagrange associé à ces couples est $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k \prod_{j \neq k}(X - z_j)/(z_k - z_j)$. C'est l'unique polynôme de degré n qui vérifie $P(z_i) = a_i$ pour tout i. Calculer les polynômes interpolés de Lagrange définis par les valeurs suivantes :

$$n = 2,\ P(0) = 1,\ P(1) = 3,\ P(2) = 1 \quad ; \quad n = 3,\ P(0) = P(2) = 1,\ P(1) = P(3) = -1$$

4. Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples. Soit $R = P/Q$ une fraction rationnelle réelle, avec $Q(X) = \lambda \prod_{i=1}^{s}(X - x_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{t}(X^2 + c_j X + d_j)^{n_j}$. La décomposition en éléments simples de R est l'écriture unique

$$R(X) = U(X) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{i,k}}{(X - x_i)^k} + \sum_{j=1}^{t} \sum_{l=1}^{n_j} \frac{e_{j,l} X + f_{j,l}}{(X^2 + c_j X + d_j)^l},$$

où U est un polynôme (éventuellement nul). Cette décomposition unique est obtenue comme suit :

1. Le polynôme U est le quotient euclidien de P par Q, *i.e.*, $P = UQ + V$ avec $\deg V < \deg Q$, de sorte que $R = U + V/Q$. On se ramène alors au cas où le degré du numérateur V est strictement inférieur à celui du dénominateur Q.
2. Les coefficients a, e et f peuvent être obtenus en réduisant au même dénominateur les fractions écrites *a priori*, et en identifiant les coefficients du numérateur à ceux de V — on obtient ainsi un système d'équations linéaires.

3. Une méthode plus ingénieuse consiste à séparer les facteurs de Q en utilisant des relations de Bezout entre les termes $(X-x_i)^{m_i}$ et $(X^2+c_jX+d_j)^{n_j}$, et à utiliser au moins pour les termes en $1/(X-x_i)^{m_i}$ l'interpolation de Taylor en x_i du numérateur.

Décomposer en élements simples les fractions suivantes :

$$\frac{X}{X^2-1} \quad ; \quad \frac{X^4+2X+1}{X^3-1} \quad ; \quad \frac{1}{(X^3-1)^2} \quad ; \quad \frac{X^6}{(X-1)^4} \quad ; \quad \frac{2X-5}{4X^3+4X^2+X}$$