# Fonctions : continuité et dérivabilité

lundi 26 octobre 2009

**1. Limites et fonctions continues.**

1. Calculer les limites des fonctions suivantes aux points indiqués :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$
$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2} \quad ; \quad \lim_{x\to 1_-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}} \quad ; \quad \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$$

2. Pour chacune des fonctions précédentes, décrire un intervalle *maximal* où la fonction est définie et continue (quitte à la prolonger par continuité).

**2. Dérivées et fonctions dérivables.**

1. Vérifier que les fonctions suivantes sont dérivables sur les intervalles indiqués, et calculer leurs dérivées :

$$\begin{array}{lcl} 3x^3+2x-1,\ \mathbb{R} & ; & \mathrm{e}^{x^2-1/x},\ \mathbb{R}_+^* \\ \cos^3 x+\cos x\,\sin x,\ \mathbb{R} & ; & \log(1+\sin x),\ ]-\pi/2,\pi/2[ \\ \sqrt{1+x^3},\ ]-1,+\infty[ & ; & \sin(1+2^x),\ \mathbb{R} \\ \dfrac{x^4+1}{x^4-1},\ ]1,+\infty[ & ; & \dfrac{1}{x+\sqrt{1-x^2}},\ ]0,1[ \end{array}$$

2. Montrer que pour tout entier $n$,

$$\cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \quad ; \quad \sin^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

Retrouver ce résultat en utilisant la formule d'Euler $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$.

3. Sur quel(s) intervalle(s) est définie la fonction $\tan x=\sin x/\cos x$ ? Montrer qu'elle y est infiniment dérivable, et calculer $\tan'(x)$, $\tan''(x)$ et $\tan^{(3)}(x)$. Calculer aussi $\arctan'(x)$ sur un intervalle à préciser.

**3. Études de fonctions.** Étudier chacune des fonctions suivantes (intervalle de définition, continuité, dérivabilité, tableau des variations, dessin) :

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}} \quad ; \quad g(x)=\frac{1}{x^2}+2x+\cos x$$
$$h(x)=x\mathrm{e}^{-x} \quad ; \quad i(x)=\arctan(x)+\arctan(1/x)$$