Examen partiel

lundi 23 novembre 2009

L'attribution des points dépend essentiellement de la qualité de rédaction, et elle n'est pas localisée, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de barême strict question par question. Les questions des exercices sont entièrement indépendantes ; dans le problème, on peut traiter chaque question indépendamment à condition d'admettre les résultats intermédiaires.

Exercice 1. Étudier les deux fonctions suivantes (intervalle de définition, continuité, dérivabilité, tableau des variations, dessin) :

$$f(x) = (x^2 - 1)\,\mathrm{e}^x \qquad ; \qquad g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Exercice 2. Dans ce qui suit, $\log x$ désigne le logarithme népérien de x, et $\tan x$ la fonction tangente, c'est-à-dire $\sin x / \cos x$. Donner les développements limités (en 0) des fonctions suivantes aux ordres k indiqués :

$$\sqrt{1+x}, \quad k = 2 \qquad ; \qquad \frac{1}{\sqrt{\cos x}}, \quad k = 4$$
$$\tan(\pi/4 + x), \quad k = 2 \qquad ; \qquad \log(1 + \sin x), \quad k = 3$$

Problème. On rappelle que si n est un entier positif, alors $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ — par exemple, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$. D'autre part, on rappelle que la fonction log vérifie $\log(ab) = \log a + \log b$ et $\log a^{-1} = -\log a$. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par :

$$u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n \; - n - \log n!\,.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$.
2. Rappeler le développement limité à l'ordre 3 de $\log(1+x)$ en 0. Montrer que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et en déduire que pour n assez grand, $u_{n+1} - u_n$ est positif et inférieur à $\frac{1}{6n(n-1)}$. On notera n_0 un rang à partir duquel ces deux conditions sont vérifiées. En remarquant que

$$\frac{1}{6n(n-1)} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right),$$

montrer que si $n \geq n_0$, alors $u_n - u_{n_0} \leq \frac{1}{6(n_0-1)} - \frac{1}{6n} \leq \frac{1}{6(n_0-1)}$. En déduire que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite croissante et majorée.

3. Montrer que la suite $v_n = \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right) / \, n!$ a une limite finie.