Nombres complexes

lundi 5 octobre 2009

1. Calculs sur les nombres complexes.

1. Écrire sous forme $a+\mathrm{i}b$ les produits $z_1=\frac{(1+3\mathrm{i})(2-\mathrm{i})(2+4\mathrm{i})}{10}$ et $z_2=(1-\mathrm{i}\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)^2$.
2. Calculer les inverses de $z_1=3+2\mathrm{i}$ et de $z_2=-1-\mathrm{i}\sqrt{2}$.
3. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1=\frac{3-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2-2\mathrm{i}} \quad ; \quad z_2=(3+3i)^3 \quad ; \quad z_3=\left(\frac{1-i}{4}\right)^{16}$$
$$z_4=\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{1+\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}} \quad ; \quad z_5=\frac{1}{1-(\cos 2\theta-\mathrm{i}\sin 2\theta)} \text{ avec } \theta\in]0,\pi[.$$

2. Propriétés du module des nombres complexes. Soient $z=a+\mathrm{i}b$ et $z'=c+\mathrm{i}d$ deux nombres complexes. Vérifier que $|zz'|=|z|\,|z'|$, et que $|1/z|=1/|z|$ si z est non nul. Montrer que $|\mathrm{Re}(z)|$ et $|\mathrm{Im}(z)|$ sont inférieurs à $|z|$. En déduire l'inégalité triangulaire :

$$|z+z'|\leq |z|+|z'|$$

Donner une interprétation géométrique de ce résultat. Démontrer aussi l'identité du parallélogramme :

$$|z+z'|^2+|z-z'|^2=2(|z|^2+|z'|^2)$$

3. Racine carrée d'un nombre complexe. Soit $z=a+\mathrm{i}b=\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ un nombre complexe non nul. Écrire sous forme trigonométrique les deux racines carrées de z. Exprimer en fonction de a et de b les parties réelles et imaginaires de ces deux racines.

Application : exprimer sous forme $a+\mathrm{i}b$ les racines carrées de $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ et celles de $5+12\mathrm{i}$.

4. Quelques formules de trigonométrie.

1. En utilisant la formule d'Euler $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$, montrer les formules de duplication de l'angle :

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta \qquad ; \qquad \sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta$$

2. Linéariser les expressions $\sin^4\theta$ et $\cos^2\theta\,\sin^3\theta$.
3. On rappelle que $1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ si $x\neq 1$. Soit $\theta\in]0,2\pi[$ un angle ; simplifier les sommes

$$C=\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta \qquad ; \qquad S=\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta.$$