Intégrales

lundi 23 novembre 2009

1. **Calcul de primitives.** Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$2x^2+1 \quad ; \quad \sin x \quad ; \quad \frac{1}{x+4} \quad ; \quad \sqrt{1+x} \quad ; \quad x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \quad ; \quad \log x \quad ; \quad \tan x$$
$$(x^2-1)\,\mathrm{e}^x \quad ; \quad \frac{3x+8}{x^2+4x} \quad ; \quad \frac{1}{1+x^2} \quad ; \quad \frac{1}{1-x^2} \quad ; \quad (\sin x)\log(\cos x) \quad ; \quad \cos^3 x$$

2. **Calcul d'intégrales définies.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_2^3 3t^2+1\,dt \quad ; \quad \int_{-1}^2 |t|\,dt \quad ; \quad \int_1^2 \frac{(\log t)^3}{t}\,dt$$
$$\int_0^1 t^2\,\mathrm{e}^t\,dt \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2t}\cos t\,dt \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2t}\sin t\,dt$$
$$\int_3^9 \log(\sqrt[3]{t}-1)\,dt \quad ; \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{3t}}{1+\mathrm{e}^{2t}}\,dt \quad ; \quad \int_1^3 \frac{1}{t\sqrt{1+t}}\,dt$$

On pourra recourir à des intégrations par parties et à des changements de variables.

3. **Intégrales et aires.** Soit $f : [0,a] \to [0,b]$ une fonction continue strictement croissante telle que $f(0)=0$ et $f(a)=b$. On note $g=f^{-1}$ la fonction réciproque de f, c'est-à-dire que $g(f(x))=x$ pour tout x dans $[a,b]$. On note

$$F(x,y)=\left(\int_0^x f(u)\,du\right)+\left(\int_0^y g(v)\,dv\right)-xy,$$

et $G(x)=F(x,f(x))$.

   1. Montrer (à la main !) que G est une fonction dérivable de x, et que $G'(x)=0$ pour tout $x\in[0,a]$ (indication : $(x+h)f(x+h)-xf(x)=(x+h)[f(x+h)-f(x)]-f(x)[x+h-x]$). En déduire que $G(x)=0$ pour tout x. Donner une interprétation géométrique.
   2. À x fixé, montrer que $F(x,y)$ est une fonction dérivable de y qui est décroissante avant $f(x)$ et croissante après. En déduire que $F(x,y)$ est toujours positive. Donner de nouveau une interprétation géométrique du résultat.