Fonctions : développements limités

lundi 9 novembre 2009

On rappelle les développements limités des fonctions usuelles suivantes :

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}\,x^n}{n} + o(x^n)\\
1/(1+x) &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n\,x^n + o(x^n)\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha\,x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n + o(x^n)\\
\exp x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n\,x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1})\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n\,x^{2n+1}}{2n+1!} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}$$

On pourra utiliser librement ces formules dans les exercices qui suivent.

1. **Développements limités.** Pour chacune des fonctions suivantes, donner le développement limité en $x = 0$ et à l'ordre k indiqué :

$$\begin{array}{lclcl}
\exp(-x),\ k=4 & ; & \sin(2x),\ k=6 & ; & \cos^2(x),\ k=2\\
\exp(x)\,\log(1+x),\ k=3 & ; & 1/(\cos x),\ k=5 & ; & \tan x,\ k=5\\
\exp(\sin(x)),\ k=4 & ; & \sin^5 x,\ k=7 & ; & (1+x)^{1/(1+x)},\ k=3
\end{array}$$

2. **Développements limités et calculs de limites.** En utilisant des développements limités, déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\,\cos x - x^2}{x^4} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\,\sin(x+\pi/4)-1-x}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{(\sin x)^{\tan x}-(\tan x)^{\sin x}}$$

3. **Un système dynamique.** Soit $x \in]0,\pi/2]$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = x\\ u_{n+1} = \sin u_n \end{cases}$$

Montrer que cette suite est strictement décroissante, puis qu'elle admet pour limite 0. On pose $v_n = 1/(u_n)^2$. Montrer que $v_{n+1} - v_n$ tend vers 1/3, puis que v_n/n tend vers 1/3. En déduire que $u_n \sim \sqrt{3/n}$.