Matrices

mercredi 7 avril 2010

1. Utilisation du pivot de Gauss. Si $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice de taille $n \times n$, on rappelle que le pivot de Gauss sur les lignes et les colonnes permet de transformer M en une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le nombre de 1 sur la diagonale est alors le rang de la matrice, c'est-à-dire la dimension de son image. Calculer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On discutera en fonction de la valeur du paramètre m. Si l'on réalise le pivot de Gauss sur les lignes seulement et à partir d'une matrice inversible M, alors on peut calculer l'inverse de M en appliquant les mêmes opérations à la matrice identité. Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -m & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$$

2. Opérations sur les lignes et les colonnes. Dans l'exercice suivant, toutes les matrices sont de taille $n \times n$, n étant un entier fixé. Si i est un indice dans $[\![1,n]\!]$ et λ est un réel non nul, on note $D_i(\lambda)$ la matrice diagonale $\mathrm{diag}(1,\ldots,1,\lambda,1\ldots,1)$, le coefficient λ étant en i-ième position. Que vaut $(D_i(\lambda))^{-1}$? Si M est une matrice de taille $n \times n$, décrire les matrices $D_i(\lambda) \times M$ et $M \times D_i(\lambda)$ — on demande une interprétation en termes d'opérations sur les lignes et les colonnes de M.

Si $i \neq j$ sont deux indices dans $[\![1,n]\!]$ et μ est n'importe quel réel, on note $T_{ij}(\mu)$ la matrice triangulaire qui a des 1 sur la diagonale et un coefficient μ en position (i,j) — tous les autres coefficients sont nuls. Que vaut $(T_{ij}(\mu))^{-1}$? Si M est une matrice de taille $n \times n$, décrire les matrices $T_{ij}(\mu) \times M$ et $M \times T_{ij}(\mu)$. Calculer la matrice

$$P_{ij} = T_{ij}(1)\, T_{ji}(-1)\, T_{ij}(1)\, D_i(-1)\,,$$

et décrire les matrices $P_{ij} \times M$ et $M \times P_{ij}$. Déduire de tout ceci le résultat important suivant : toute matrice inversible est le produit de matrices de dilatation $D_i(\lambda)$ et de matrices de transvection $T_{ij}(\mu)$.

3. Image et noyau d'une application linéaire. Si $u : E \to F$ est une application linéaire, on rappelle que son noyau est le sous-espace vectoriel de E défini par

$$\ker u = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\}$$

et son image est le sous-espace vectoriel de F défini par $\mathrm{im}\, u = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = u(x)\}$. Décrire l'image et le noyau des applications linéaires dont les matrices dans les bases canoniques s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier dans chaque cas le théorème du rang : $\dim E = \dim \ker u + \dim \operatorname{im} u$.

4. **Étude d'une chaîne de Markov.** On considère un système à trois états A, B et C, et un utilisateur qui part de l'état A, et saute à chaque instant entier n vers un autre état du système, avec les règles suivantes :

1. Si l'utilisateur occupe l'état A, alors il saute avec probabilité $1/2$ vers B, et avec probabilité $1/2$ vers C.
2. Si l'utilisateur occupe l'état B, alors il saute avec probabilité $3/4$ vers A, et avec probabilité $1/4$ vers C.
3. Enfin, si l'utilisateur occupe l'état C, alors il saute obligatoirement vers A.

On note $p_n(A)$ la probabilité pour que l'état occupé au temps n soit A, et de même pour $p_n(B)$ et $p_n(C)$ avec les états B et C. Soit X_n le vecteur $(p_n(A), p_n(B), p_n(C))$. Montrer que $X_{n+1} = u(X_n)$, où u est l'application linéaire associée à la matrice

$$M = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} ;$$

ici, $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. En déduire que X_n est égal à $u^n(1,0,0)$, c'est-à-dire que X_n est la première colonne de la matrice M^n. Soit $\mathcal{B}'$ la base de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 4 & \sqrt{2}-2 & -\sqrt{2}-2 \\ 5 & 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Montrer que $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \operatorname{diag}(1, (-2-\sqrt{2})/4, (-2+\sqrt{2})/4)$. En déduire que X_n converge vers le vecteur $(8/17, 4/17, 5/17)$ — indication : décomposer le vecteur $X_0 = (1,0,0)$ dans la base $\mathcal{B}'$, et remarquer que $[(-2-\sqrt{2})/4]^n$ et $[(-2+\sqrt{2})/4]^n$ tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini.