Déterminants et valeurs propres

mercredi 5 mai 2010

1. Calculs de déterminants (I). Calculer les déterminants des matrices suivantes (on utilisera les règles *ad hoc* en dimension 2 et 3, et la formule de développement suivant la première ligne ou la première colonne en dimension supérieure ; on peut aussi utiliser des opérations sur les lignes et les colonnes) :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & 7 & -2 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Lesquelles de ces matrices sont inversibles ? On considère dans le plan le parallèlogramme $\mathcal{P}$ de sommets $(0,0)$, $(2,-3)$, $(-1,2)$ et $(1,-1)$. Quelle est l'aire de $\mathcal{P}$?

2. Calculs de déterminants (II). Calculer les déterminants des matrices suivantes (si la taille n de la matrice n'est pas indiquée, on demande une formule générale en fonction de n) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & a+c & b+c \\ ab & ac & bc \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a+b & a+c & b+c \\ a^2+b^2 & a^2+c^2 & b^2+c^2 \\ a^3+b^3 & a^3+c^3 & b^3+c^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & (a_1)^2 & \cdots & (a_1)^{n-1} \\ 1 & a_2 & (a_2)^2 & \cdots & (a_2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & (a_n)^2 & \cdots & (a_n)^{n-1} \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & b & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

3. Formules de Cramer. On considère un système linéaire générique de deux équations à deux inconnues x et y :

$$\begin{cases} ax + by = L \\ cx + dy = M \end{cases}$$

On suppose la matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ inversible. Montrer que les solutions du système s'écrivent :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} L & b \\ M & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & L \\ c & M \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Établir des formules analogues pour un système linéaire inversible de trois équations à trois inconnues x, y et z.

4. Valeurs propres d'une matrice. Si M est une matrice, on rappelle qu'une valeur propre de M est un scalaire λ vérifiant l'une des assertions équivalentes suivantes :

1. Il existe un vecteur non nul X tel que $MX = \lambda X$ (on dit dans ce cas que X est un vecteur propre de M pour la valeur propre λ).
2. La matrice $M - \lambda I_n$ est non inversible.
3. Le scalaire λ est racine du polynôme $\det(M - XI_n)$.

Pour chacune des matrices suivantes, déterminer les valeurs propres éventuelles, et donner pour chaque valeur propre un vecteur propre correspondant :

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Question subsidiaire : montrer que ces matrices sont conjuguées à des matrices diagonales.