Espaces vectoriels

mercredi 17 février 2010

1. Exemples d'espaces vectoriels. Parmi les ensembles décrits ci-dessous, déterminez ceux qui sont des espaces vectoriels (si c'est le cas, on demande une vérification rigoureuse) :

1. L'ensemble des points du plan.
2. Dans le plan, la droite d'équation $y = 3x$.
3. L'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur l'intervalle $[2, 3]$.
4. Les suites réelles qui tendent vers l'infini.
5. Les suites réelles qui ont une limite finie.
6. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui satisfont la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n - 2$.
7. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui satisfont la relation de récurrence $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
8. Les polynômes de degré inférieur ou égal à 4.

2. Sous-espaces vectoriels. Soit U un espace vectoriel (réel). Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels $V \subset U$ et $W \subset U$ est encore un sous-espace vectoriel. Donner un exemple.

On suppose maintenant que $V \cup W$ est un sous-espace vectoriel de U. Montrer que $V \subset W$ ou que $W \subset V$. Généraliser au cas d'une réunion finie $V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r$ de sous-espaces vectoriels de U.

3. Sous-espaces engendrés. Si U est un espace vectoriel et A est une partie de U, on rappelle que $\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de U qui contient A. Si A et B sont deux parties de U, comparer $\mathrm{Vect}(A \cap B)$ et $\mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$.

On suppose que $U = \mathbb{R}^3$, et on note $v = (x, y, z)$ un vecteur de cet espace. Décrire l'espace vectoriel engendré dans U par un seul vecteur v. Faire de même avec deux vecteurs v et w ; on traitera séparément le cas où u et v sont colinéaires, et le cas où u et v sont non alignés. Dans ce dernier cas, il est utile d'introduire le vecteur $u \wedge v$, de coordonnées

$$(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx') \quad \text{si } u = (x, y, z) \text{ et } v = (x', y', z').$$

Finalement, décrire le sous-espace vectoriel engendré dans U par trois vecteurs $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$ et $w = (x'', y'', z'')$ — indication : regarder le produit scalaire $\langle u \wedge v | w \rangle$.