Examen partiel

mercredi 31 mars 2010

Un soin particulier est exigé en ce qui concerne les raisonnements et la rédaction ; les exercices sont entièrement indépendants.

Exercice 1. *(environ sur 10 points)* On se place dans $E = \mathbb{R}^3$. Calculer le rang des familles suivantes de vecteurs :

1. $(4, -2, 6), (1, 2, 7), (-5, 0, 3)$; 2. $(3, 0, -5), (2, 1, -3), (0, -3, -1)$
3. $(-6, -2, -2), (3, 1, 1)$; 4. $(3, 0, 2), (1, -1, 4)$

Quelles familles sont liées ? libres ? génératrices ? On note $V_3 = \mathrm{Vect}((-6, -2, -2), (3, 1, 1))$ et $V_4 = \mathrm{Vect}((3, 0, 2), (1, -1, 4))$ les sous-espaces vectoriels engendrés par les troisième et quatrième familles. Montrer que V_3 et V_4 sont supplémentaires, et en déduire une équation de V_4.

Exercice 2. *(environ sur 5 points)* On rappelle que l'ensemble $\mathscr{U} = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ de toutes les suites réelles est un espace vectoriel pour les lois $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\lambda \cdot u = (\lambda\, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — l'élément neutre est la suite constante nulle $(0)_{n\in\mathbb{N}}$. Parmi les sous-ensembles suivants, préciser lesquels sont des sous-espaces vectoriels :

$$A = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n,\ u_{n+2} = (n+2)u_{n+1} + (n+2)(n+1)u_n\right\}$$
$$B = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n,\ u_{n+1} = 3\,u_n + 2\right\}$$
$$C = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n,\ u_{n+1} = (u_n)^2\right\}$$

Exercice 3. *(environ sur 5 points)* Soit V l'espace vectoriel constitué des polynômes réels $aX^2 + bX + c$ de degré inférieur ou égal à 2. Vérifier que les polynômes $(1, X+1, X^2+X+1)$ forment une base $\mathcal{B}$ de V, et écrire la matrice dans cette base de l'application $u : P(X) \mapsto P'(X)$ — on ne demande pas de vérifier que cette application est linéaire.