Diagonalisation

mercredi 12 mai 2010

On considère les trois matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & -3 \\ 10 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

et on souhaite les diagonaliser. Les questions suivantes proposent une méthode complète à cet effet.

1. **Calculs de polynômes caractéristiques.** Pour chaque matrice M, calculer le polynôme caractéristique, c'est-à-dire $\det(M - XI_n)$. Ici, $M - XI_n$ désigne la matrice obtenue à partir de M en retranchant la variable X à chaque coefficient diagonal ; c'est donc

$$\begin{pmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} - X \end{pmatrix}.$$

Les racines du polynôme caractéristique $P_M(X)$ sont les valeurs propres de M ; comme $\deg P_M = n$, le nombre de valeurs propres distinctes est toujours inférieur à la taille n de la matrice.

2. **Détermination des sous-espaces propres.** Si λ est une valeur propre de M, alors le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

$$E_\lambda(M) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Mx = \lambda\, x\}$$

est de dimension supérieure à 1. Pour chaque matrice M et chaque valeur propre λ, donner une base du sous-espace $E_\lambda(M)$ — il s'agit de résoudre le système linéaire $Mx = \lambda\, x$ et de donner une base de l'espace des solutions. On remarquera que la dimension de $E_\lambda(M)$ est toujours plus petite que la multiplicité de la racine λ dans $P_M(X)$.

3. **Diagonalisation effective et applications.** Une matrice M étant fixée, les sous-espaces propres $E_\lambda(M)$ avec λ valeur propre de M sont toujours en somme directe ; en particulier, on a

$$\sum_{\lambda \text{ valeur propre de } M} \dim E_\lambda(M) \;\leq\; n\,.$$

La matrice M est diagonalisable — *i.e.*, conjuguée à une matrice diagonale — si et seulement si l'inégalité ci-dessus est une égalité. Dans ce cas, en réunissant les bases des espaces $E_\lambda(M)$, on obtient une base de diagonalisation $\mathcal{B}'$ de M, c'est-à-dire que

$$M = PDP^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times D \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\,,$$

où D est une matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs propres de M (avec pour multiplicités leurs multiplicités en tant que racines de $P_M(X)$). Lorsque c'est possible, donner cette diagonalisation explicite de M. Pour la première matrice, en déduire une expression des coefficients de M^n, $n \geq 1$.

On traite également le cas des deux matrices de l'exercice 4 de la feuille précédente. Pour $M = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, le polynôme caractéristique est

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} -1-X & 4 \\ 4 & -1-X \end{vmatrix} = (X+1)^2 - 4^2 = (X+5)(X-3)\,,$$

donc les valeurs propres de M sont -5 et 3. Les sous-espaces propres associés sont :

$$E_{-5}(M) = \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,-1)) \qquad ; \qquad E_3(M) = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,1))$$

La somme des dimensions des espaces propres est égale à 2, et une base de diagonalisation $\mathcal{B}'$ de M a donc pour matrice dans la base canonique $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. L'inverse de cette matrice est $\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. En utilisant la formule de changement de base, on voit donc que :

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Pour $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{smallmatrix}\right)$, le polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned} P_M(X) &= -(1-X)^2(3+X) + 8 - 8 - 4(1-X) + 4(3+X) + 4(1-X) \\ &= -(X^2 - 2X - 3)(X+3) = -(X-3)(X+1)(X+3)\,, \end{aligned}$$

donc les valeurs propres de M sont 3, -1 et -3. Les sous-espaces propres associés sont :

$$\begin{aligned} E_3(M) &= \{(2z,z,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((2,1,1)) \\ E_{-1}(M) &= \{(x,-x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,-1,0)) \\ E_{-3}(M) &= \{(x,-x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,-1,-1)) \end{aligned}$$

La somme des dimensions vaut bien 3, donc la matrice est diagonalisable dans la base $\mathcal{B}'$ de matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. En calculant l'inverse de cette matrice de passage, on voit donc que :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}$$

Concernant $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, son polynôme caractéristique est bien sûr $(X-1)(X+1)$, donc les valeurs propres de M sont 1 et -1. Ce fait est général pour une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) : les valeurs propres se lisent sur la diagonale de la matrice. Les sous-espaces propres sont :

$$E_1(M) = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,0)) \qquad ; \qquad E_{-1}(M) = \{(2y,y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((2,1))$$

La somme des dimensions vaut bien 2, donc la matrice est diagonalisable dans la base $\mathcal{B}'$ de matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. En inversant cette matrice, on en déduit :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $M = PDP^{-1}$, alors les puissances de M sont les matrices $M^n = PD^nP^{-1}$, car les termes P^{-1} et P se téléscopent dans les produits. Par conséquent :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2+2(-1)^n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

En particulier, $M^2 = I_2$, donc M est la matrice de la symétrie par rapport à $E_1(M)$ et parallèlement à $E_{-1}(M)$.

Pour $M = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{smallmatrix}\right)$, le polynôme caractéristique vaut

$$P_M(X) = (3-X)(1+X)(5+X) - 16(1+X) = -(1+2X+X^2)(1+X) = -(1+X)^3\,.$$

L'unique valeur propre de M est donc -1. L'espace propre associé est l'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} 3x + 8z = -x \\ 3x - y + 6z = -y \\ -2x - 5z = -z \end{cases} \iff \quad x + 2z = 0\,.$$

Ainsi, $E_{-1}(M)$ est de dimension 2, et admet par exemple pour base les vecteurs $(0,1,0)$ et $(2,0,-1)$. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres est $2 < 3$, la matrice n'est pas diagonalisable.

Finalement, pour $M = \left(\begin{smallmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & -3 \\ 10 & 0 & 6 \end{smallmatrix}\right)$, le polynôme caractéristique vaut

$$P_M(X) = -(3+X)(1-X)(6-X) + 20(1-X) = (X^2 - 3X + 2)(1-X) = -(X-1)^2(X-2)\,.$$

Les valeurs propres de M sont donc 1 et 2, et les sous-espaces propres associés sont :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x,y,z) \mid 2x + z = 0\} = \mathrm{Vect}((0,1,0),(1,0,-2)) \\ E_2 &= \{(2t,3t,-5t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((2,3,-5)) \end{aligned}$$

La somme des dimensions vaut bien $2 + 1 = 3$, donc la matrice est diagonalisable dans la base $\mathcal{B}'$ de matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \end{smallmatrix}\right)$. En inversant cette matrice, on en déduit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$