Sommes de sous-espaces vectoriels

mercredi 17 mars 2010

1. **Somme de deux espaces vectoriels.** Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels. La somme $F+G$ est l'ensemble des vecteurs de E qui s'écrivent sous la forme $v = f + g$, avec $f \in F$ et $g \in G$. Montrer que $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E. On suppose que E est de dimension finie ; montrer que

$$\max(\dim F, \dim G) \leq \dim(F+G) \leq \dim F + \dim G.$$

On pourra utiliser le fait suivant : la dimension majore le cardinal de toute famille libre, et est plus petite que le cardinal de toute famille génératrice. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La dimension de la somme est la somme des dimensions : $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$.
2. Tout élément de $F+G$ s'écrit de manière unique sous la forme $f+g$, c'est-à-dire que si $f+g = f'+g'$, alors $f = f'$ et $g = g'$.
3. L'intersection $F \cap G$, qui est un sous-espace vectoriel de E, est réduite à $\{0_E\}$.

On dit dans ce cas que F et G sont en somme directe. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, montrer que $F = \text{Vect}(1,2,0)$ et $G = \text{Vect}(-1,1,3)$ sont en somme directe, et donner une équation de $F \oplus G$.

Les plans $\Pi_1 = \{x+y+z = 0\}$ et $\Pi_2 = \{x - y + 3z = 0\}$ sont-ils en somme directe dans $\mathbb{R}^3$? Décrire la somme $\Pi_1 + \Pi_2$.

2. **Somme de plusieurs espaces vectoriels.** Plus généralement, si $F_1, F_2, \ldots, F_r$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E, leur somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_r$ est le sous-espace vectoriel constitué des vecteurs de E qui s'écrivent sous la forme $v = f_1 + f_2 + \cdots + f_r$ avec chaque f_i dans F_i. Montrer qu'on a comme précédemment

$$\dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_r) \leq \dim F_1 + \dim F_2 + \cdots + \dim F_r,$$

et qu'il y a égalité si et seulement si tout élément de la somme s'écrit de manière unique sous la forme $v = f_1 + f_2 + \cdots + f_r$. En revanche, montrer qu'on peut avoir l'inégalité stricte et $F_i \cap F_j = \{0_E\}$ pour tout couple $i \neq j$.

Si $v_1, \ldots, v_r$ est une famille de vecteurs de E, à quelle condition les espaces $\text{Vect}(v_i)$ sont-ils en somme directe ?

3. **Espaces supplémentaires et projections.** Deux sous-espaces vectoriels F et G sont dits supplémentaires s'ils sont en somme directe et si $F \oplus G = E$. Dans ce cas, tout vecteur de E s'écrit de manière unique sous la forme $v = p_F(v) + p_G(v)$, avec $p_F(v) \in F$ et $p_G(v) \in G$. On dit que p_F et p_G sont les projecteurs sur les sous-espaces F et G. Montrer que ce sont des applications linéaires :

$$\forall v, w \in E,\ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \ p_F(\lambda v + \mu w) = \lambda p_F(v) + \mu p_F(w) \quad \text{et} \quad p_G(\lambda v + \mu w) = \lambda p_G(v) + \mu p_G(w)$$

Montrer qu'on a également $p_F(p_F(v)) = p_F(v)$ et $p_G(p_G(v)) = p_G(v)$. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces $F = \text{Vect}(1,2,3)$ et $G = \{x+y+z = 0\}$; montrer qu'ils sont supplémentaires, et calculer $p_F(x,y,z)$ et $p_G(x,y,z)$ pour tout vecteur $v = (x,y,z)$.