# Familles de vecteurs

mercredi 3 mars 2010

**1. Familles libres, familles liées.** On rappelle qu'une famille de vecteurs $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est dite *libre* si :

$$\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \;\; \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$$

Dans le cas contraire, la famille est dite *liée*, et il existe une relation de liaison, c'est-à-dire une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ qui est nulle et qui n'a pas tous ses coefficients nuls. Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille est libre ou est liée :

1. $(1,2), (3,5)$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. $(0,1), (2,1), (-1,3)$ dans $\mathbb{R}^2$.
3. $(1,2,3), (1,-2,-3), (1,4,3)$ dans $\mathbb{R}^3$.
4. $(5,1,-3), (-1,1,5), (2,0,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
5. dans l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $n$, une famille de polynômes $(P_1, P_2, \dots, P_r)$ telle que $\deg P_1 < \deg P_2 < \cdots < \deg P_r$.
6. dans l'espace $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, $(\mathrm{e}^{a_1 x}, \mathrm{e}^{a_2 x}, \dots, \mathrm{e}^{a_n x})$, avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

**2. Bases d'un espace vectoriel.** On appelle *base* d'un espace vectoriel $V$ une famille de vecteurs qui est à la fois libre et *génératrice*, de sorte que tout élément de $V$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille. Vérifier que les deux familles suivantes sont géneratrices dans $\mathbb{R}^2$ :

$$(2,1), (1,-3) \qquad ; \qquad (1,0), (2,2), (0,3)$$

S'agit-il de bases ? Donner des bases des espaces vectoriels suivants :

1. $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0\}$.
2. $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0 \text{ et } 2x-y+z = 0\}$.
3. l'ensemble des suites réelles vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.

**3. Rang d'une famille de vecteurs.** Le *rang* d'une famille de vecteurs $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est la dimension de l'espace vectoriel qu'elle engendre, ou, car c'est équivalent, le cardinal maximal d'une sous-famille $(v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$ qui est libre. Calculer les rangs des familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ :

$$(1,2,0), (4,8,0), (-3,-6,0) \qquad ; \qquad (1,2,0), (4,3,-1), (0,2,2) \qquad ; \qquad (1,2,0), (4,3,-1), (0,5,1)$$