Systèmes linéaires

mercredi 10 février 2010

1. **Systèmes linéaires d'ordre 2 ou 3.** Pour chacun des systèmes d'équations linéaires suivants, donner l'ensemble des solutions, chaque solution étant un couple (x, y) ou un triplet (x, y, z) de nombres réels :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + 3y + 6z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 3z = 5 \\ 2y + z = 3 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 4x + 2y + z = 0 \\ x - 3y - z = 1 \\ 2x + 8y + 3z = 1 \end{cases}$$

2. **Systèmes linéaires à paramètres.** Dans les systèmes d'équations linéaires suivants, m est un paramètre. Déterminer en fonction de m l'ensemble des solutions.

$$\begin{cases} x + my = -2 \\ mx + y = 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x + my + (m-1)z = m+1 \\ 3x + 2y + mz = 3 \\ (m-1)x + my + (m+1)z = m-1 \end{cases}$$

3. **Lien avec les suites récurrentes linéaires et les équations différentielles linéaires.** Soit $\mathscr{U}$ l'ensemble des suites (réelles) vérifiant la relation de récurrence linéaire :

$$u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}$$

Montrer que pour tous nombres réels a et b, il existe une unique suite $(u_n = u_n(a, b))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{U}$ telle que $u_0 = a$ et $u_1 = b$. De même, soit $\mathscr{Y}$ l'ensemble des fonctions infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Montrer que pour tous nombres réels a et b, il existe une unique fonction $y = y(a, b)$ telle que $y(0) = a$ et $y'(0) = b$.