Applications linéaires

mercredi 24 mars 2010

1. Matrice d'une application linéaire. Soient E et F deux espaces vectoriels, $u : E \to F$ une application linéaire, $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. On rappelle que la matrice de u relativement aux deux bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ est le tableau de nombres de taille $n \times p$

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u) = \begin{pmatrix} u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_p) \end{pmatrix},$$

les vecteurs $u(e_i)$ étant décomposés dans la base $\mathscr{F}$ et leurs coordonnées étant écrites en colonnes. Cette matrice détermine entièrement l'application u. Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire de matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

relativement aux bases canoniques $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ et $((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$. Que vaut $u(x,y,z)$?

Donner les matrices des applications suivantes (on vérifiera d'abord qu'il s'agit d'applications linéaires, et si ce n'est pas évident, on vérifiera aussi que les familles de vecteurs proposées sont bien des bases) :

1. $E = F = \mathbb{R}^3$; $u(v) = 2v$; $\mathscr{E} = \mathscr{F}$ est la base canonique.
2. la même application, mais cette fois-ci avec $\mathscr{E} = \mathscr{F} = ((2,2,1),(0,1,0),(-3,0,0))$.
3. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$; $u(x,y) = 2x - 2y$; $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}$.
4. la même application, mais cette fois-ci avec $\mathscr{E} = ((1,-1),(1,1))$.
5. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$; u est la projection sur le plan Oxy ; $\mathscr{E} = ((3,0,2),(3,1,1),(2,1,-2))$ et $\mathscr{F}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
6. $E = F = \mathbb{R}^3$; u est la symétrie orthogonale par rapport au plan Oxy ; $\mathscr{E} = \mathscr{F} = ((3,0,2),(3,1,1),(2,1,-2))$.
7. $E = F = \mathbb{R}^2$; u est la rotation d'angle $\pi/3$ et de centre l'origine ; $\mathscr{E} = \mathscr{F}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
8. $E = F = \mathbb{R}_3[X]$ est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 ; $u(P(X)) = X\,P'(X) - P(X)$; $\mathscr{E} = \mathscr{F}$ est la base canonique de E, c'est-à-dire $(1, X, X^2, X^3)$.

2. Composées d'applications linéaires et produit matriciel. Si E, F et G sont trois espaces vectoriels et si $u : E \to F$ et $v : F \to G$ sont deux applications linéaires, (re)démontrer que $v \circ u : E \to G$ est linéaire. On rappelle alors que pour tout choix de bases $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, on a :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{E},\mathscr{G}}(v \circ u) = \mathrm{mat}_{\mathscr{F},\mathscr{G}}(v) \times \mathrm{mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u)$$

où dans le terme de droite $\times$ désigne le produit matriciel. Calculer les produits de matrices suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dans $E = \mathbb{R}^2$, on note $u : E \to E$ la rotation de centre l'origine et d'angle $\pi/3$, et $v : E \to E$ la rotation de centre l'origine et d'angle $2\pi/3$. Donner les matrices M_u et M_v de u et v dans la base canonique, et calculer $M_v \times M_u$. Vérifier que cette matrice est bien celle de la composée $v \circ u$.