Examen partiel : corrigé

1. Pour calculer le rang d'une famille de vecteurs $v_1, \ldots, v_k$, on résoud le système d'équations linéaires $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$: si l est le nombre de paramètres $x, y, \ldots$ intervenant dans l'ensemble des solutions, alors $\mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_k) = k - l$.

La première famille est libre :

$$\begin{cases} 4a + b - 5c = 0 \\ -2a + 2b = 0 \\ 6a + 7b + 3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5a - 5c = 0 \\ a = b \\ 13a + 3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = c \\ a = b \\ 16a = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0$$

Elle est donc de rang 3, et comme $\dim E = 3$, elle est génératrice, et c'est une base.

La seconde famille est liée :

$$\begin{cases} 3a + 2b = 0 \\ b - 3c = 0 \\ -5a - 3b - c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3a + 2b = 0 \\ b - 3c = 0 \\ \frac{1}{3}b - c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3a + 2b = 0 \\ b = 3c \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2c \\ b = 3c \end{cases}$$

Il y a donc une famille de solutions à un paramètre $\{(-2c, 3c, c)\ ,\ c \in \mathbb{R}\}$, et le rang de la famille de vecteurs est $3 - 1 = 2$. Comme $\dim E = 3$, la famille n'est pas génératrice.

La troisième famille est évidemment liée : $(-6, -2, -2) = -2\,(3, 1, 1)$. L'espace vectoriel V_3 engendré par ces vecteurs est donc aussi celui engendré par le seul vecteur $(3, 1, 1)$, qui est non nul : le rang de la famille est donc 1, et la famille n'est pas génératrice.

Enfin, la quatrième famille est libre :

$$\begin{cases} 3a + b = 0 \\ -b = 0 \\ 2a + 4b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3a = 0 \\ b = 0 \\ 2a = 0 \end{cases} \iff a = b = 0$$

Le rang de la famille est donc 2, et la famille n'est pas génératrice. Si $v = (x, y, z)$ appartient à $V_3 + V_4$, alors il existe des coefficients a, b, c tels que :

$$(x, y, z) = a(3, 1, 1) + b(3, 0, 2) + c(1, -1, 4) \iff \begin{cases} x = 3a + 3b + c \\ y = a - c \\ z = a + 2b + 4c \end{cases}$$

Pour toutes valeurs de x, y et z, ce système linéaire admet pour unique solution

$$a = \frac{-2x + 10y + 3z}{7} \quad ; \quad b = \frac{5x - 11y - 4z}{7} \quad ; \quad c = \frac{-2x + 3y + 3z}{7}.$$

Tout vecteur de $E = \mathbb{R}^3$ est donc dans $V_3 + V_4$, et de plus, la décomposition en somme est unique, car les coefficients a, b et c sont uniquement déterminés. Les sous-espaces vectoriels V_3 et V_4 sont donc bien supplémentaires. Dire que v appartient à V_4 revient à dire que $a = 0$: une équation du plan V_4 est donc

$$-2x + 10y + 3z = 0.$$

2. L'ensemble de suites A est bien un sous-espace vectoriel :

1. La suite constante nulle $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien dans A, car $0 = (n+2)\,0 + (n+2)(n+1)\,0$ pour tout entier n.
2. Si deux suites u et v sont dans A, alors $u_{n+2} = (n+2)\,u_{n+1} + (n+2)(n+1)\,u_n$ et $v_{n+2} = (n+2)\,v_{n+1} + (n+2)(n+1)\,v_n$, donc
$$\begin{aligned}(u+v)_{n+2} = u_{n+2} + v_{n+2} &= (n+2)\,u_{n+1} + (n+2)(n+1)\,u_n + (n+2)\,v_{n+1} + (n+2)(n+1)\,v_n \\ &= (n+2)\,(u+v)_{n+1} + (n+2)(n+1)\,(u+v)_n\end{aligned}$$
et $u+v$ appartient à A.
3. De même, si u est dans A et si λ est un nombre réel, alors
$$(\lambda\cdot u)_{n+2} = \lambda\left((n+2)\,u_{n+1} + (n+2)(n+1)\,u_n\right) = (n+2)\,(\lambda\cdot u)_{n+1} + (n+2)(n+1)\,(\lambda\cdot u)_n,$$
donc la suite $\lambda\cdot u$ appartient à A.

L'ensemble B n'est pas un sous-espace vectoriel, car il ne contient pas la suite constante nulle (qui est le neutre de l'espace des suites $\mathscr{U}$) : en effet, pour $n = 0$, $0 \neq 3\times 0 + 2$.

De même, l'ensemble de suites C n'est pas un sous-espace vectoriel, par exemple parce qu'il n'est pas stable par $u \mapsto -u$: ainsi, la suite constante égale à 1 est dans C, mais $(-1)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas dans C, car pour $n = 0$, $-1 \neq (-1)^2$.

3. Si $P(X) = aX^2 + bX + c$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, alors il s'écrit bien de manière unique comme combinaison linéaire des polynômes 1, $X+1$ et X^2+X+1 :

$$aX^2 + bX + c = \lambda(X^2+X+1) + \mu(X+1) + \nu(1) \iff \begin{cases} a = \lambda \\ b = \lambda + \mu \\ c = \lambda + \mu + \nu \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = a \\ \mu = b - a \\ \nu = c - b \end{cases}$$

Les polynômes $1, X+1, X^2+X+1$ forment donc bien une base de V. Pour trouver la matrice de l'application $u : P(X) \mapsto P'(X)$ dans cette base $\mathcal{B}$, on calcule les dérivées de ces polynômes de base :

$$(1)' = 0 \qquad ; \qquad (X+1)' = 1 \qquad ; \qquad (X^2+X+1)' = 2X+1 = 2(X+1) - 1$$

La matrice de l'application u est donc :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$