Couples de variables aléatoires discrètes

Les exercices et questions précédés d'une étoile ($\star$) peuvent être passés dans un premier temps.

Exercice 1 : *Ecrit Agro B 2010*

On dispose de deux dés : un dé rouge, non pipé, dont les faces sont numérotées de 1 à 6 ; un dé bleu, non pipé, ayant deux faces marquées 1, deux faces marquées 2, deux faces marquées 3. On lance simultanément les deux dés. On note X et Y les variables aléatoires qui, à chaque lancer des dés, associent respectivement le numéro du dé rouge et celui du dé bleu.

1. Donner la loi de X, la loi de Y.
2. Donner la loi du couple (X, Y).
3. Un lancer des deux dés est un succès si le total $X + Y$ vaut 2, 4 ou 6 ; dans le cas contraire, il s'agit d'un échec. Donner la probabilité d'un échec.
4. On note Z la variable aléatoire qui, à chaque groupe de 10 lancers, associe le nombre de succès obtenus. Quelle est la loi de Z ?
5. Donner l'espérance et la variance de Z, ainsi que la probabilité d'avoir obtenu au moins deux succès en 10 lancers.

Exercice 2 : *Lois jointes, marginales*

Une urne contient sept jetons portant les numéros 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3. On tire sans remise deux jetons dans l'urne. On appelle X la variable aléatoire qui donne le numéro du premier jeton et Y celui du deuxième jeton.

1. Quelle est la loi jointe du couple (X, Y) ?
2. Quelle est la première marginale, c'est-à-dire la loi de X ?
3. Vérifier que les deux marginales sont égales.

Exercice 3 : *Indépendance*

On se replace dans la situation de l'exercice précédent.

1. Deux variables X et Y sont indépendantes si et seulement si la loi jointe de (X, Y) est égale au produit de ses marginales.
   Dans l'exercice précédent, les deux variables sont-elle indépendantes ?
2. Toujours dans l'exemple précédent, déterminer la loi de X conditionnellement à $Y = 0$ puis conditionnellement à $Y = 2$.
3. Les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour tout y, la loi de X conditionnellement à $Y = y$ ne dépend pas de y (et coincide avec la première marginale).
   Retrouvez le résultat de la question 1 avec ce critère.
4. Calculer la covariance de X et Y dans notre exemple, puis leur coefficient de corrélation.
5. On sait que si X et Y sont indépendantes, alors leur covariance est nulle (Attention : la réciproque est fausse).
   Utiliser ce critère pour retrouver le résultat de la première question.

Exercice 4 : *Calculs d'espérance*

1. Parmi n jetons numérotés de 1 à n, on tire successivement 2 jetons sans remise et on note X et Y les numéros des premier et deuxième jetons tirés.
   (a) Quelle est la loi de (X, Y) ? Calculer $E(XY)$
   (b) Quelles sont les lois de X et Y ? Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(c) $\star$ Calculer $E(\min(X,Y))$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p. Calculer l'espérance de X/Y (on admettra que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k} = -\ln(1-q)$ si $|q|<1$)

Exercice 5 : *Examen 2011*

On considère une variables aléatoire discrète X uniforme sur $\{-1,0,1\}$, c'est-à-dire telle que

$$P(X=-1) = P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{3},$$

et on pose $Y = X^2$.

1. Donner la loi de Y.
2. Montrez que $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, mais que X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 6 : *Indépendance de variables de Bernoulli et covariance (une exception)*

Soient X et Y deux variables de Bernoulli de paramètres respectifs p et p'. Vérifier que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) les variables aléatoires X et Y sont indépendantes,

(ii) les événements $[X=1]$ et $[Y=1]$ sont indépendants,

(iii) XY suit la loi de Bernoulli de paramètre pp',

(iv) $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Exercice 7 : *Oral Veto B 2010*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = (X+1)^2$. Calculer la covariance de $(X;Y)$.

Exercice 8 : *Loi de couple donnée par un tableau*

Soient a et b deux réels. On considère les nombres $p_{i,j}$ donnés pour i,j dans $\{0,1\}$ par le tableau suivant :

$i \setminus j$	0	1
0	$1/2-a$	$a+1/3$
1	b	$1/6-2a$

1. À quelle condition sur les réels a,b les nombres $p_{i,j}$ définissent-ils la loi d'un couple de variables aléatoires X et Y (i.e. vérifiant $p_{i,j} = P(X=i, Y=j)$ pour tous (i,j)) ?
2. Cette condition étant réalisée, à quelle condition X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 : *Oral Veto B 2013*

Soit (X,Y) un couple aléatoire à valeurs dans $A = \{(i,j), 1 \le i < j\}$ et suivant la loi

$$\forall (i,j) \in A,\ \mathbb{P}((X,Y) = (i,j)) = ap^j,$$

où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. Représenter graphiquement A. Déterminer la loi marginale de X en fonction de a et en déduire a.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Montrer que les variables aléatoires X et $Y-X$ sont indépendantes et de même loi.
4. Calculer l'espérance de Y et exprimer la variance de Y en fonction de celle de X.

Exercice 10 : *Une somme de variables binomiales non indépendantes*

On suppose que n personnes ($n \ge 1$) se répartissent au hasard dans 3 hôtels H_1, H_2, H_3 qui possèdent chacun plus de n chambres. Pour $i = 1,2,3$, on note X_i le nombre de personnes ayant choisi l'hôtel H_i.

1. Déterminer la loi de chacune des variables alḿatoirs X_1, X_2, X_3 ainsi que leur variance.
2. Déterminer (sans calculs) la loi de $X_1 + X_2$ et sa variance.
3. En déduire la covariance du couple (X_1, X_2).
4. Calculer les coefficients de corrélation linéaire $\rho_{(X_1,X_2)}$ et $\rho_{(X_1+X_2,X_3)}$. Leurs valeurs semblent-t-elles en accord avec la situation ?

Exercice 11 :

Le gêne de la couleur des yeux chez une espèce de mouche possède deux allèles R et N. Les yeux de la mouche sont noirs si elle a le génotype (N, N), rouge sinon. On observe la descendance d'un couple d'individus tous deux hétérozygotes (R, N). Soit X le nombre de descendants qui ont les yeux rouges et Y le nombre d'individus hétérozygotes. On suppose que le nombre total de descendants est 400.

1. Quelle est la loi de X ? son espérance ? sa variance ?
2. Quelle est la loi de Y sachant $X = 300$?
3. Quelle est la loi jointe de (X, Y) ?

$\star$ Exercice 12 : *Antilopes*

Une espèce d'antilope peut avoir des portées de 1 à 4 petits. La portée se compose d'un seul petit avec probabilité 3/10, 2 petits avec probabilité 1/5, 3 petits avec probabilité 1/2. Mais la loi de la jungle est dure et chaque petit n'a qu'une chance sur 3 de survivre jusqu'á l'âge du devenir des autres petits. On note X le nombre de petits dans une portée et Y le nombre de petits d'une portée qui arrivent à l'âge de un an.

1. Quelles sont les valeurs prises par la variable X ? par la variable Y ?
2. Quelle est la loi de Y conditionnellement à $X = 3$?
3. Quelle est la loi jointe du couple (X, Y) ? On pourra la représenter sous forme d'un tableau.
4. En déduire la loi de Y.
5. Calculer la covariance du couple (X, Y). Pouvait-on prévoir son signe ?
6. Par l'argument de votre choix, justifier que X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 13 : *Indépendance de variables aléatoires discrètes*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note $t_n = P(X = n)$.

1. Si X prend la valeur n, on effectue n épreuves de Bernoulli indépendantes et de paramètre p. On note S le nombre de succès et E le nombre d'échecs ainsi obtenus. Quelle est sont les lois conditionnelles de S et E conditionnellement à $[X = n]$? Déterminer les lois des couples (X, S), (X, E), (S, E).
2. On suppose que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Déterminer les lois de S et E. Etudier l'indépendance des variables aléatoires S et E.

Exercice 14 :

On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard l'une de ces boîtes (toutes les boîtes ont la même probabilité d'être tirée). On tire ensuite une boule dans la boîte choisie. On considère les variables aléatoires X et Y donnant les numéros de la boîte et de la boule obtenues.

1. Déterminer pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \leq i$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(Y = j | X = i)$.
2. En déduire la loi jointe de (X, Y).
3. En déduire la loi de Y et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 15 : *Oral Véto B 2012*

On lance indéfiniment une pièce, on obtient pile avec la probabilité p, on note $q = 1 - p$. On note X_1 la longueur de la première série obtenue (de piles ou de faces), et X_2 la longueur de la deuxième série.

1. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer son espérance.
2. Quelle est la loi jointe de (X_1, X_2) ? En déduire la loi de X_2.
3. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont elles indépendantes ?

Exercice 16 : *Oral Agro A 2013*

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, suivant toutes deux la loi géométrique à valeurs dans $\mathbb{N}$ de paramètre $p \in]0; 1[$.

1. Déterminer la loi de $|X_1 - X_2|$.
2. Vérifier que $|X_1 - X_2|$ admet une espérance et la calculer.
3. On pose $T = \max(X_1; X_2)$ et $U = \min(X_1; X_2)$.
   (a) Exprimer $T + U$, $T - U$ et TU en fonction de X_1 et de X_2.
   (b) En déduire l'existence et la valeur de la covariance de $(T; U)$.