Variables aléatoires à densité

Les exercices et questions précédés d'une étoile ($\star$) peuvent être passés dans un premier temps.

EXERCICE 1 : *Encore une variable aléatoire discrète*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi discrète uniforme sur $[\![1, 4]\!] = \{1, 2, 3, 4\}$.

1. Comparer $P(1 < X \leq 3)$ et $P(1 \leq X \leq 3)$.
2. Déterminer et représenter la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
   Plus généralement, comment les discontinuités de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète permettent-elles de caractériser la loi de cette variable aléatoire ?

EXERCICE 2 : *Un exemple très simple de densité*

On considère une variable aléatoire X dont une densité de probabilité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ \frac{1}{4} & \text{si } -1 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 0 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction f.
   Interpréter graphiquement et comparer $P(0 < X \leq \frac{3}{2})$ et $P(0 \leq X \leq \frac{3}{2})$.
2. Calculer et représenter graphiquement la fonction de répartition F de X. Vérifier qu'elle est continue en tout point. En quels points x est-elle dérivable et que vaut $F'(x)$? En quels points x est-elle non dérivable et que valent $F'_d(x)$ et $F'_g(x)$?
3. $\star$ Quelle est la loi de X^2 ?

EXERCICE 3 : *Loi à densité donnée par la fonction de répartition*

On considère une variable aléatoire X dont la fonction de répartition F est donnée par

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t^4 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

.

1. Déterminer une densité de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Y = 10X + 1$. Quelle est l'espérance de $Z = 1/(X^4 + 1)$?
4. Quelle est la densité de probabilité de Y ?

$\star$ EXERCICE 4 : *(Oral veto 2005)*

On observe une population de bactéries en croissance asynchrone. Soit T l'âge d'une bactérie choisie au hasard. On admet que la densité de probabilité de T est :

$$f : \begin{cases} t \longmapsto 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t \longmapsto k\, 2^{1-\frac{t}{\theta}} & \text{si } 0 < t \leq \theta \\ t \longmapsto 0 & \text{si } t > \theta \end{cases}$$

1. Calculer k et déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T.

2. Quelle est la probabilité pour que l'âge d'une bactérie choisie au hasard dans cette population soit compris entre 0 et $\theta/2$?
3. On admet que la masse d'une bactérie est fonction linéaire de son âge : $m = m_0\left(1 + \frac{T}{\theta}\right)$. Calculer l'espérance de la masse d'une bactérie choisie au hasard.

$\star$ Exercice 5 : *(Partiel 2009)*

Un escargot se déplace à une vitesse aléatoire V (exprimée en m/h). On considère que V est une v.a. dont la densité est la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \kappa & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ \dfrac{\kappa}{x^4} & \text{si } 1 \leq x, \end{cases}$$

où κ est une constante à déterminer.

1. Représenter graphiquement la fonction f.
2. Montrer que $\kappa = \dfrac{3}{4}$.
3. Calculer la vitesse moyenne de l'escargot, ainsi que la variance de sa vitesse.
4. Calculer la fonction de répartition de V.
5. $\star$ L'escargot veut se rendre de son domicile à son lieu de travail qui est situé à 2m. Le temps nécessaire pour effectuer ce parcourt est noté T, et on rappelle que $T = \dfrac{2}{V}$. Donner la loi de la v.a. T.

$\star$ Exercice 6 :

On pose $f(x) = \dfrac{C}{(1+x^2)^2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité si et seulement si $C = \dfrac{2}{\pi}$.
2. Calculer l'espérance et variance d'une variable aléatoire de densité f.

Exercice 7 :

Soient X et Y deux variables indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Donner (c'est du cours) la densité et la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
2. Déterminer la densité de la variable $\min(X, Y)$.

Exercice 8 : *(Oral veto 2005)*

Paul et Virginie ont rendez-vous chez Robert, entre 12h et 14h. Par hypothèse, les instants d'arrivée de Paul et Virginie sont des variables aléatoires X et Y indépendantes, de distribution uniforme sur $[0, 2]$, l'instant 0 correspondant à midi, l'unité de temps étant l'heure.

1. Soit U la variable aléatoire représentant le temps d'attente de Robert jusqu'à ce que ses deux amis soient arrivés. Déterminer la densité de probabilité de U.
2. Soit V la variable aléatoire représentant le temps d'attente de Robert jusqu'à la première arrivée. Déterminer la densité de probabilité de V.

$\star$ Exercice 9 :

Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

1. On pose $Y = X^2$. Déterminer $P(Y < 2,25)$. Quelle est la densité de probabilité de la variable aléatoire Y ? Quelle est son espérance ? Quelle est sa variance ? (On dit que Y suit la loi du chi-deux à 1 degré de liberté, notée χ^2_1).

2. On pose $Z = |X|$. Déterminer $P(Z > 1,24)$. Quelle est la densité de probabilité de la variable aléatoire Z ? Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 10 : *Manipulation de la loi normale*

Selon un recensement de 1990, la distribution de l'âge des femmes dans la population française peut être considérée comme normale de moyenne 39 ans et d'écart-type 23 ans. Répondez aux questions suivantes en vous aidant des tables.

1. Quelle est la proportion de françaises ayant moins de 60 ans ?
2. Quelle est la proportion de françaises ayant plus de 20 ans ?
3. Quelle est la proportion de françaises ayant entre 20 et 60 ans ?
4. Quel est l'âge au-dessus duquel se trouvent 5 % des françaises ?
5. Quel est l'âge au-dessous duquel se trouvent 5 % des françaises ?

⋆ Exercice 11 : *Densité d'un mélange*

On s'intéresse à la vitesse de déplacement de piétons, sur un parcours déterminé. On admet le modèle suivant : la vitesse d'un individu isolé, choisi au hasard, est une variable aléatoire normale

— d'espérance 1,4 m/s et d'écart-type 0,4 m/s pour une femme,

— d'espérance 1,6 m/s et d'écart-type 0,4 m/s pour un homme.

La population est composée d'un tiers d'hommes et de deux tiers de femmes. Soit V la vitesse d'un individu isolé, choisi au hasard, dont on ignore le sexe.

1. Calculer la probabilité de l'événement : (V <1,2 m/s)
2. La vitesse d'un individu a été trouvée inférieure à 1,2 m/s. Quelle est la probabilité pour qu'il s'agisse d'une femme ?
3. Déterminer l'expression explicite de la densité de V. Calculer l'espérance et l'écart-type de V.

(La Recherche n° 33 Avril 73 : la mobilité des Foules)

Exercice 12 : *Approximations de la binomiale*

On effectue un test de dépistage d'une maladie au sein d'une grande population animale. Pour cela, on choisit 1000 animaux au hasard et on note N le nombre d'animaux malades parmi ces 1000.

1. On suppose que chaque animal a 0.1 % de chances d'être malade. Quelle est la loi de N ? Donner une expression exacte de la probabilité qu'il y ait au moins 5 animaux malades. Donner ensuite une valeur approchée de cette probabilté.
2. On applique maintenant le même protocole pour une maladie beaucoup plus répandue : chaque animal a 60 % d'en être porteur. Quelle est alors la loi de N ? Quelle est la probabilité que plus de 700 animaux soient malades ? En donner une expression exacte puis une valeur approchée.

Exercice 13 :

On veut transporter rapidement entre deux villes A et B, dans des conditions de confort acceptables, 1600 voyageurs se présentant, pratiquement en même temps, à la gare de A. On met à leur disposition deux trains identiques. On suppose que chaque individu choisit au hasard l'une ou l'autre rame et qu'il n'a pas le temps d'en changer.

Combien faut-il prévoir de places assises dans chaque rame si l'on veut que la probabilité, pour que des voyageurs soient obligés de rester debout, soit inférieure à 3×10^{-3} ?

⋆ Exercice 14 : *On récapitule (questions 1 et 2 indépendantes)*

La durée de vie d'un composant électronique, choisi au hasard dans une fabrication donnée, est une variable aléatoire T de densité f donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda^2 \ t \ e^{-\lambda t} & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \quad \text{où } \lambda \text{ est un paramètre réel positif.}$$

1. (a) Calculer l'espérance et la variance de T.

(b) Déterminer la fonction de répartition de la variable T.

(c) On pose $\lambda = 2 \times 10^{-4}$, t étant exprimé en heures. Calculer les probabilités P_1 de l'événement $(T < 500\,\mathrm{h})$ et P_2 de l'événement $(T \geq 10000\,\mathrm{h})$.

2. En posant, pour simplifier $P_1 = 0,5\%$ et $P_2 = 40\%$, calculer la probabilité de trouver, dans un lot de 600 composants choisis indépendamment :

   (a) plus de 6 composants de durée de vie inférieure à 500 heures.

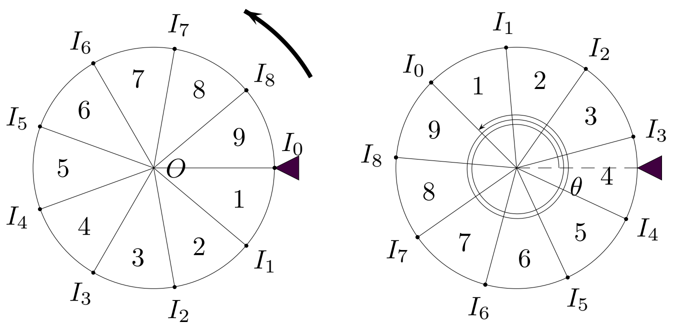
   (b) plus de 220 composants de durée de vie au moins égale à 10000 heures.

⋆ Exercice 15 : *(Écrit B 2012)*

On considère une roulette circulaire, divisée en s secteurs réguliers, et pouvant tourner autour d'un axe fixé en son centre O. Chaque secteur porte un numéro de 1 à s, ceux-ci étant ordonnés suivant le sens des aiguilles d'une montre. On note $I_1, I_2, \ldots, I_{s-1}$ les points du bord du cercle qui séparent les secteurs 1 et 2, 2 et 3, …, $s-1$ et s ; et I_0 le point du bord du cercle séparant les secteurs s et 1 (voir la première figure, où $s = 9$). Enfin, on note I le point fixe du bord du cercle égal à I_0 à l'instant initial, et

$$\theta = (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OI_0}})$$

l'angle total en radian dont a tourné le point I_0 autour de l'axe au cours du mouvement de la roulette, en tenant compte du nombre de tours complets.



Ainsi, sur la seconde figure, la roulette a fait $N = 2$ tours complets, puis a tourné encore de $3\pi/4$, de sorte que $\theta = 2(2\pi) + 3\pi/4 = 19\pi/4$.

On suppose que l'angle θ suit une loi exponentielle de paramètre λ, donnée par la densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\,\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) & \text{si } x \geq 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note alors N le nombre aléatoire de tours complets effectués par la roulette, et X le secteur sur lequel la roue s'arrête, qui est un entier dans $\{1, 2, \ldots, s\}$.

1. Étude de la loi de θ.

   (a) Calculer en fonction de λ l'espérance et la variance de la variable aléatoire θ.

   (b) Calculer la fonction de répartition de θ.

2. Étude de la loi de N.

   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, à quelles valeurs de θ correspond l'événement $\{N = n\}$? En déduire que N suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\lambda}}$. On pose $q = 1 - p$.

   (b) Calculer l'espérance et la variance de N en fonction de q.

3. Étude de la loi de X.

   (a) Soit $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$, et $n \in \mathbb{N}$. À quelles valeurs de θ correspond l'événement $\{N = n$ et $X = k\}$? En déduire que

   $$P[N = n \text{ et } X = k] = q^{n+\frac{k}{s}}\,(q^{-\frac{1}{s}} - 1).$$

   (b) Pour k fixé, montrer que la série de terme général $u_n = P[N = n$ et $X = k]$ converge, et en déduire que

   $$P[X = k] = \frac{q^{\frac{k-1}{s}}\,(1 - q^{\frac{1}{s}})}{1 - q}.$$

   (c) Montrer que les variables aléatoires X et N sont indépendantes.