Récurrence d'une marche aléatoire dans le quart de plan

mots-clés : marches aléatoires récurrentes, surmartingales, fonctions de Lyapunov.

1 La marche aléatoire dans le quart de plan

On note N, S, E, O les quatre vecteurs du plan $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$. Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$, $(\xi_n^x)_{n\geq 1}$, $(\xi_n^y)_{n\geq 1}$ et $(\xi_n^0)_{n\geq 1}$ quatre suites de variables toutes indépendantes, à valeurs respectivement dans $\{N,S,E,O\}$, dans $\{N,E,O\}$, dans $\{N,S,E\}$ et dans $\{N,E\}$. On suppose que les variables de la suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$ ont toutes la même loi, et on note

$$\mathbb{E}[\xi_n] = (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Ici, l'espérance d'un couple est la paire formée des espérances des deux coordonnées. On fait les mêmes hypothèses pour les trois autres suites : chaque suite consiste de variables toutes de même loi, et on note

$$\mathbb{E}[\xi_n^x] = (a^x, b^x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \qquad ; \qquad \mathbb{E}[\xi_n^y] = (a^y, b^y) \in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R} \qquad ; \qquad \mathbb{E}[\xi_n^0] = (a^0, b^0) \in (\mathbb{R}_+)^2.$$

On note $\mathfrak{X} = \mathbb{N}^2$ l'ensemble des paires d'entiers placés dans le quart de plan des points à coordonnées positives. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de vecteurs aléatoires définie par la relation de récurrence :

$$X_0 = (c_0, d_0) \in \mathfrak{X} \qquad ; \qquad X_{n+1} = \begin{cases} X_n + \xi_{n+1} & \text{si } X_{n,1} > 0 \text{ et } X_{n,2} > 0; \\ X_n + \xi_{n+1}^x & \text{si } X_{n,1} > 0 \text{ et } X_{n,2} = 0; \\ X_n + \xi_{n+1}^y & \text{si } X_{n,1} = 0 \text{ et } X_{n,2} > 0; \\ X_n + \xi_{n+1}^0 & \text{si } X_{n,1} = X_{n,2} = 0. \end{cases}$$

Les hypothèses sur l'ensemble des valeurs possibles pour ξ_n^x, ξ_n^y et ξ_n^0 impliquent que si $X_n \in \mathbb{N}^2$, alors X_{n+1} également. Ainsi, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste dans le quart du plan positif. Alors, comme les vecteurs aléatoires $(\xi_n, \xi_n^x, \xi_n^y, \xi_n^0)$ sont des vecteurs indépendants et identiquement distribués, on a :

Proposition 1. *La suite de vecteurs aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur l'espace d'états $\mathfrak{X}$. Si*

$$\begin{aligned} \mathrm{support}(\xi_1) &= \{N,S,E,O\}; \\ \mathrm{support}(\xi_1^x) &= \{N,E,O\}; \\ \mathrm{support}(\xi_1^y) &= \{N,S,E\}; \\ \mathrm{support}(\xi_1^0) &= \{N,E\}, \end{aligned}$$

alors cette chaîne est irréductible.

Dans tout ce qui suit, on suppose que la condition suffisante d'irréducibilité est satisfaite, et on s'intéresse au caractère récurrent ou transient de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si le drift moyen (a,b) des pas à l'intérieur du domaine a des coordonnées strictement positives, on s'attend à ce que la chaîne s'éloigne du coin $(0,0)$, et donc soit transiente. Une condition raisonnable à imposer pour avoir la récurrence est donc

$$a \leq 0,\ b \leq 0,$$

ou peut-être même $a < 0$ et $b < 0$. Mais ceci n'est pas suffisant, car si les drifts (a^x, b^x) et (a^y, b^y) des pas effectués lorsqu'on touche l'un des deux bords $[0x)$ ou $[0y)$ sont positifs le long de ces axes, alors la marche aléatoire peut *utiliser les bords pour se projeter vers l'infini*. On a par exemple représenté ci-dessous le cas où :

$$\mathrm{loi}(\xi_n) = 0.24(\delta_N + \delta_E) + 0.26(\delta_S + \delta_O) \quad ; \quad \mathrm{loi}(\xi_n^0) = \frac{1}{2}(\delta_N + \delta_E);$$
$$\mathrm{loi}(\xi_n^x) = \frac{1}{6}(\delta_N + \delta_O) + \frac{2}{3}(\delta_E) \quad ; \quad \mathrm{loi}(\xi_n^y) = \frac{1}{3}(\delta_N + \delta_S + \delta_E).$$

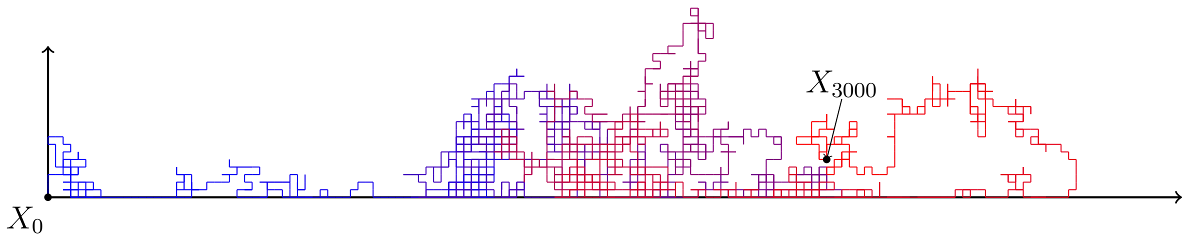

FIGURE 1 – Marche aléatoire dans le quart de plan avec drift vers l'origine pour les pas au centre, mais drift le long de l'axe des abscisses lorsqu'on touche ce bord.

Lorsque la marche touche l'axe des abscisses, elle est réfléchie avec un drift positif le long de cet axe, et ceci la fait s'échapper le long de cet axe. L'objectif de la suite du texte est de trouver un critère suffisant simple pour que ceci ne se produise pas.

2 Les critères de Foster

Dans cette section, on se donne plus généralement un ensemble $\mathfrak{X}$ dénombrable, et une matrice stochastique irréductible $P = (P(x,y))_{x,y\in\mathfrak{X}}$ sur cet espace d'états. On fixe également une partie finie et non vide $F \subset \mathfrak{X}$. Une fonction $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}_+$ est dite *surharmonique en dehors de* F si

$$\forall y \in \mathfrak{X} \setminus F,\ \ (Pf)(y) \leq f(y),$$

où $(Pf)(y)$ est le produit matriciel $\sum_{z\in\mathfrak{X}} P(y,z)\, f(z)$. Par ailleurs, étant donnée une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrice de transition P, on note pour E partie non vide de $\mathfrak{X}$:

$$\tau_E = \inf\{n \in \mathbb{N} \,|\, X_n \in E\} \quad \text{(temps d'atteinte)};$$
$$\tau_E^+ = \inf\{n \geq 1 \,|\, X_n \in E\} \quad \text{(temps de premier retour)},$$

avec par convention $\tau_E = +\infty$ ou $\tau_E^+ = +\infty$ si la chaîne n'atteint ou ne revient jamais en E.

Lemme 2. *Soit $x \in \mathfrak{X}$, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ chaîne de Markov sur $\mathfrak{X}$ de loi $\mathbb{P}_x$. Si f est une fonction positive et surharmonique en dehors de F, alors la suite de variables aléatoires $(f(X_{\min(n,\tau_F)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une surmartingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$.*

La preuve du lemme est immédiate en décomposant $f(X_{\min(n+1,\tau_F)})$ en

$$1_{(\tau_F \geq n+1)}\, f(X_{n+1}) + 1_{(\tau_F \leq n)}\, f(X_{\tau_F}).$$

Elle mène au critère de récurrence suivant :

Théorème 3. *On suppose qu'il existe une partie finie $F \subset \mathfrak{X}$, et une fonction f positive surharmonique en dehors de F, et qui tend vers l'infini à l'infini : pour tout niveau $L \geq 0$, l'ensemble d'états*

$$\{y \in \mathfrak{X} \,|\, f(y) \leq L\}$$

est fini. On dit que f est une fonction de Lyapunov. *Alors, la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente irréductible.*

Démonstration. Pour $L \in \mathbb{N}$, on note $\sigma_L = \inf\{n \in \mathbb{N} \,|\, f(X_n) > L\}$; c'est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fixons un point de départ $x \in \mathfrak{X}$, et distinguons deux cas.

- Supposons d'abord $\sigma_L = +\infty$ avec probabilité strictement positive pour un certain entier positif L. Alors, avec probabilité positive sous $\mathbb{P}_x$, la chaîne de Markov reste tout le temps dans l'ensemble fini $\{y \,|\, f(y) \leq L\}$, donc, par le principe des tiroirs, il existe un état y dans cet ensemble tel que
  $$\mathbb{P}_x[\text{le nombre de visites de } y \text{ par } (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est infini}] > 0.$$
  Ceci implique la récurrence de la chaîne.
- Supposons maintenant σ_L fini presque sûrement pour tout niveau L entier positif. Alors, comme $(f(X_{\min(n,\tau_F)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une surmartingale positive, le théorème d'arrêt s'applique et
  $$f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_{\min(0,\tau_F)})] \geq \mathbb{E}_x[f(X_{\min(\sigma_L,\tau_F)})] \geq L\,\mathbb{P}_x[\sigma_L \leq \tau_F]. \tag{1}$$
  Ainsi, $\mathbb{P}_x[\sigma_L \leq \tau_F] \leq \frac{f(x)}{L}$, donc la suite décroissante pour l'inclusion $(\{\tau_F \geq \sigma_L\})_{L\in\mathbb{N}}$ a une intersection de probabilité nulle sous $\mathbb{P}_x$:
  $$\mathbb{P}_x\left[\forall L \geq 0,\ \tau_F \geq \sigma_L\right] = 0.$$
  Autrement dit, τ_F est presque toujours plus petit qu'un certain σ_L. Or, les σ_L sont par hypothèse tous presque sûrement finis : donc, $\mathbb{P}_x[\tau_F < +\infty] = 1$. Ceci est vrai pour tout point de départ x, donc, par la propriété de Markov, ceci implique que le nombre de visites de F par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $+\infty$ presque sûrement (quelque soit le point de départ x). Comme F est fini, on en déduit qu'au moins un état dans F est visité infiniment avec probabilité positive, et ceci implique la récurrence de notre chaîne irréductible. □

Il existe une variante du *critère de Foster* ci-dessus qui implique la récurrence positive au lieu de la récurrence. Il s'agit de remplacer l'hypothèse de croissance à l'infini par une hypothèse de stricte surharmonicité en dehors de F :

Théorème 4. *On suppose qu'il existe une partie finie $F \subset \mathfrak{X}$, et une fonction f positive sur $\mathfrak{X}$ qui vérifie les deux hypothèses suivantes :*

- $(Pf)(x) < +\infty$ *pour tout x dans F ;*

— $(Pf)(x) \leq f(x) - \varepsilon$ *pour tout* $x \in \mathfrak{X} \setminus F$,

$\varepsilon > 0$ *étant une constante. Alors, la chaîne* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est irréductible récurrente positive.*

Démonstration. Posons $Y_n = 1_{(\tau_F \geq n+1)}\, f(X_n)$; notons que Y_n est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_n$, car $1_{(\tau_F\geq n+1)} = 1 - 1_{(\tau_F \leq n)}$ et τ_F est un temps d'arrêt. On a, pour $x \notin F$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[Y_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n] &\leq \mathbb{E}_x[Y_{n+1}\, 1_{(\tau_F\geq n+1)}|\, \mathcal{F}_n]\\ &\leq \mathbb{E}_x[f(X_{n+1})\, 1_{(\tau_F\geq n+1)}|\,\mathcal{F}_n] = 1_{(\tau_F\geq n+1)}\,(Pf)(X_n)\\ &\leq Y_n - \varepsilon\, 1_{(\tau_F\geq n+1)}.\end{aligned}$$

En réintégrant, on obtient : $\mathbb{E}_x[Y_{n+1}] \leq \mathbb{E}_x[Y_n] - \varepsilon\,\mathbb{P}_x[\tau_F \geq n+1]$. Par récurrence, puisque les variables Y_n sont positives, on obtient :

$$0 \leq \mathbb{E}_x[Y_n] \leq \mathbb{E}_x[Y_0] - \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x[\tau_F \geq k]\right) = f(x) - \varepsilon\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}_x[\tau_F\geq k]\right).$$

En passant à la limite $n \to \infty$, on obtient $f(x) \geq \varepsilon\,\mathbb{E}_x[\tau_F]$ pour tout $x \notin F$. Fixons maintenant $x \in F$. La méthode d'un pas en avant donne :

$$\mathbb{E}_x[\tau_F^+] = 1 + \sum_{y \notin \mathfrak{X}} P(x,y)\,\mathbb{E}_y[\tau_F] \leq 1 + \frac{1}{\varepsilon}(Pf)(x) < +\infty \tag{2}$$

en utilisant pour la dernière inégalité la première hypothèse du théorème. Ainsi, le temps de retour en F est d'espérance finie pour tout point de départ $x \in F$, et ceci implique la récurrence positive de la chaîne. □

3 Un critère géométrique de récurrence

Le critère de Foster fort se traduit dans le cas de la marche aléatoire sur $\mathbb{N}^2$ par le résultat suivant.

Théorème 5. *Avec les mêmes notations et hypothèses que précédemment, si*

$$a < 0,\ \ b < 0,\ \ \frac{b^y}{a^y} < \frac{b}{a},\ \ \frac{a^x}{b^x} < \frac{a}{b},$$

alors la marche aléatoire dans le quadrant $\mathbb{N}^2$ *est récurrente positive.*

Démonstration. Fixons un paramètre $\varepsilon > 0$ arbitraire, et posons $f(c,d) = \frac{1}{2}(\frac{b}{a}\,c^2 + \frac{a}{b}\,d^2) - wcd$, avec $w \in (0,1)$. La fonction f est la restriction à $\mathbb{N}^2$ d'une forme quadratique définie positive. Par conséquent,

$$f(c+s_1, d+s_2) = f(c,d) + f(s_1,s_2) + \left(\frac{b}{a}s_1 - ws_2\right)c + \left(\frac{a}{b}s_2 - ws_1\right)d,$$

donc en posant $(s_1,s_2) = X_{n+1} - X_n$, on obtient

$$\begin{aligned}(Pf)(c,d) - f(c,d) &= \mathbb{E}[f(X_{n+1}) - f(X_n)\,|\,X_n = (c,d)]\\ &= \begin{cases}\mathbb{E}[f(\xi_1)] + (1-w)(bc+ad) & \text{si } c>0 \text{ et } d>0;\\ \mathbb{E}[f(\xi_1^x)] + \left(\frac{b}{a}a^x - wb^x\right)c & \text{si } c>0 \text{ et } d=0;\\ \mathbb{E}[f(\xi_1^y)] + \left(\frac{a}{b}b^y - wa^y\right)d & \text{si } c=0 \text{ et } d>0;\\ \mathbb{E}[f(\xi_1^0)] & \text{si } c=d=0.\end{cases}\end{aligned} \tag{3}$$

Comme $a < 0$, $b < 0$ et $(1-w) > 0$, il existe un niveau L tel que si $c \geq L$ ou $d \geq L$, alors $(1-w)(bc+ad) \leq -\mathbb{E}[f(\xi_1)] - \varepsilon$. À l'intérieur du quadrant, la condition $Pf \leq f - \varepsilon$ est donc vérifiée sauf éventuellement sur une partie finie $F \subset [\![1, L]\!] \times [\![1, L]\!]$. Pour vérifier les hypothèses du théorème 4, il reste donc à montrer que pour c assez grand (respectivement, pour d assez grand), $(\frac{b}{a}a^x - wb^x)c$ (respectivement, $(\frac{a}{b}b^y - wa^y)d$) compense $\mathbb{E}[f(\xi_1^{x/y})] + \varepsilon$. C'est le cas si

$$ba^x - wab^x > 0 \qquad ; \qquad ab^y - wba^y > 0.$$

Si les inégalités strictes $ab^y - ba^y > 0$ et $ba^x - ab^x > 0$ sont vérifiées, alors par continuité les inégalités ci-dessus sont également vérifiées pour w assez proche de 1. Finalement, ces inégalités sont équivalentes à celles de l'énoncé du théorème, car $a < 0$, $b < 0$, $b^x > 0$ et $a^y > 0$. □

Géométriquement, les deux dernières conditions du théorème 5 s'interprètent très simplement : si l'on dessine successivement les vecteurs de drift (a^y, b^y), $(-a, -b)$ et (a^x, b^x), alors ils sont dans l'ordre trigonométrique.

Questions

1. Démontrer entièrement la proposition 1 et le lemme 2.

2. Trouver une fonction surharmonique $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ qui permette de montrer que la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ ($X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ avec $\mathbb{P}[\xi_n = 1] = \mathbb{P}[\xi_n = -1] = \frac{1}{2}$) est récurrente. Cette marche est-elle récurrente positive ?

3. Démontrer l'inégalité $\mathbb{E}_x[f(X_{\min(\sigma_L, \tau_F)})] \geq L\, \mathbb{P}_x[\sigma_L \leq \tau_F]$ dans la preuve du théorème 3 (Équation (1)).

4. Dans la preuve du théorème 4, expliquer comment le passage à la limite $n \to \infty$ donne l'inégalité $f(x) \geq \varepsilon\, \mathbb{E}_x[\tau_F]$ pour $x \notin F$. Démontrer ensuite les identités de l'Équation (2).

5. Démontrer la formule générale (3) pour $Pf - f$ dans la preuve du théorème 5.

6. On suppose que les pas ξ_n, ξ_n^x, ξ_n^y et ξ_n^0 ont les lois respectives suivantes :

$$\frac{1}{6}(\delta_N + \delta_E) + \frac{1}{3}(\delta_S + \delta_O) \quad ; \quad \frac{1}{2}(\delta_N) + \frac{1}{4}(\delta_E + \delta_O) \quad ; \quad \frac{1}{2}(\delta_E) + \frac{1}{4}(\delta_N + \delta_S) \quad ; \quad \frac{1}{2}(\delta_N + \delta_E).$$

   Vérifier que le critère du théorème 5 s'applique pour la marche aléatoire sur $\mathbb{N}^2$ avec ces paramètres. Donner des paramètres w, ε et une partie finie F tels que la fonction

$$f(c, d) = \frac{1}{2}(c^2 + d^2) - wcd$$

   vérifie $Pf \leq f - \varepsilon$ en dehors de F.

7. Écrire un programme `Python` qui illustre les résultats du texte au sujet des marches aléatoires dans le quart de plan. Dans le cas récurrent positif, proposer un algorithme qui permet d'estimer la mesure invariante de la chaîne de Markov. Donner un estimateur du temps de retour moyen en $(0, 0)$ pour la marche aléatoire avec les paramètres de la question précédente.

8. La preuve du théorème 3 utilise implicitement les faits généraux suivants. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible sur un espace $\mathfrak{X}$, et $F \subset \mathfrak{X}$ une partie finie non vide.

   (a) On suppose qu'il existe un état $x \in \mathfrak{X}$ tel que
   $$\mathbb{P}_x[V_F = +\infty] = 1,$$
   où $V_F = \mathrm{card}\,(\{n \in \mathbb{N} \,|\, X_n \in F\})$ est le nombre de visites de la partie F. Montrer que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente, c'est-à-dire que $\mathbb{P}_x[\tau_x^+ < +\infty] = 1$ pour un état x (et en fait pour tout $x \in \mathfrak{X}$).

   (b) On suppose maintenant que pour tout $x \in \mathfrak{X}$,
   $$\mathbb{P}_x[\tau_F < +\infty] = 1.$$
   Montrer qu'on a alors $\mathbb{P}_y[\tau_F^+ < +\infty] = 1$ pour tout y dans F. En déduire que l'hypothèse de la sous-question (a) ci-dessus est vérifiée, et donc que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore récurrente.

9. (Difficile). De même, la preuve du théorème 4 utilise implicitement le fait général suivant. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible sur un espace $\mathfrak{X}$ telle qu'existe une partie finie non vide $F \subset \mathfrak{X}$ vérifiant
   $$\mathbb{E}_x[\tau_F^+] < +\infty \quad \text{pour tout } x \in F.$$
   Montrer que sous cette hypothèse, la chaîne de Markov est récurrente positive, c'est-à-dire que $\mathbb{E}_x[\tau_x^+] < +\infty$ pour un état x (et en fait pour tout $x \in \mathfrak{X}$). On pourra introduire le processus
   $$(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(X_{\tau_F^{(n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$
   où $\tau_F^{(n)}$ désigne le temps du n-ième passage dans F. Démontrer les fait suivants :

   (a) Le processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible récurrente positive sur F.

   (b) Si $y \in F$ et T_y^+ est le temps de retour de la chaîne $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en y, alors sous $\mathbb{P}_y$,
   $$\tau_y^+ = \sum_{k=0}^{\infty} 1_{(k<T_y^+)}\,(\tau_F^{(k+1)} - \tau_F^{(k)}).$$

   (c) Si $M = \max\{\mathbb{E}_x[\tau_F^+],\, x \in F\}$, alors $\mathbb{E}_y[\tau_y^+] \leq M\,\mathbb{E}_y[T_y^+]$.