Option Probabilités - Statistiques

3. Les martingales

<u>cadre</u> : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probabilité

$(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ filtration de l'espace (suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$)

$\mathcal{F}_n = \{$ événements mesurables à partir des observations d'un processus jusqu'au temps n $\}$

1. Définitions et exemples

Une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, telle que :

1) $\forall n$, M_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable : $M_n^{-1}(A) \in \mathcal{F}_n$ $\forall A$ borélien.

2) $\forall n$, M_n est intégrable, et :

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n.$$

on parle de processus adapté à la filtration.

- Si on ne précise pas la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est d'usage de prendre la filtration canonique

$$\mathcal{F}_n = \sigma(M_0, \dots, M_n) \, ;$$

c'est la plus petite rendant $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adapté.

- Par conditionnements successifs, $\forall N \geq n$,

$$\mathbb{E}[M_N \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\dots \mathbb{E}[M_N \mid \mathcal{F}_{N-1}] \dots \mid \mathcal{F}_{n+1}] \mid \mathcal{F}_n]$$

$$= M_n .$$

- En particulier, $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_0]] = \mathbb{E}[M_0]$ est une suite constante.

De nombreux résultats s'étendent aux :

- surmartingales : processus $\left|\begin{array}{l}\text{adapté } (M_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \text{intégrable}\end{array}\right|$ $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq M_n$.

- sousmartingales : processus adapté intégrable $\mid \mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geq M_n$.

$(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ surmartingale $/ (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\Longleftrightarrow (-M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sousmartingale $/ (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples

1. Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes, intégrables et centrées : $\mathbb{E}[\xi_n] = 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

Alors, $M_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ est une martingale pour

$\mathcal{F}_n = \sigma(M_0, \dots, M_n) = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$

En effet, l'adaptabilité et l'intégrabilité sont évidentes, et

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_n + \xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n + \mathbb{E}[\xi_{n+1}] = M_n.$$

2. Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables réelles positives, intégrables et indépendantes, avec $\mathbb{E}[\xi_n] = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Alors $M_n = \prod_{k=1}^{n} \xi_k$ est une martingale.

En effet, $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_n \xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$

$$= M_n \, \mathbb{E}[\xi_{n+1}] = M_n .$$

Dans les deux exemples précédents, on obtient bien sûr des sur- ou des sous-martingales si l'on suppose

$\mathbb{E}[\xi_n] \leq 0$ ou ≥ 0 ; $\mathbb{E}[\xi_n] \leq 1$ ou $\mathbb{E}[\xi_n] \geq 1$.

3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov avec espace d'états $\mathcal{X}$ et matrice de transition P.

Une fonction $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est dite harmonique si $f = Pf$:

$$\forall x, \sum_{y \in \mathcal{X}} P(x,y) f(y) = f(x).$$

On dit que f est surharmonique (resp., sous-harmonique) si $f \geq Pf$ (resp., si $f \leq Pf$).

Sous réserve d'intégrabilité :

- si f est harmonique, $M_n = f(X_n)$ est une martingale / $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots X_n)$.
- mêmes résultats avec les fonctions sur- ou sousharmonique et les sur- ou sousmartingales.

En effet, $\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[f(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n]$

loi conditionnelle : $P(X_n, \cdot)$

$$= \sum_{y \in \mathcal{X}} P(X_n, y) f(y)$$

$$= (Pf)(X_n) = f(X_n) = M_n$$

dans le cas harmonique.

4. Soit $M \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration.

Alors, $M_n = \mathbb{E}[M | \mathcal{F}_n]$ est une martingale / $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On parle de martingale fermée dirigée par M.

<u>spoiler</u> : cette situation est plus fréquente que ce qu'on pourrait croire...

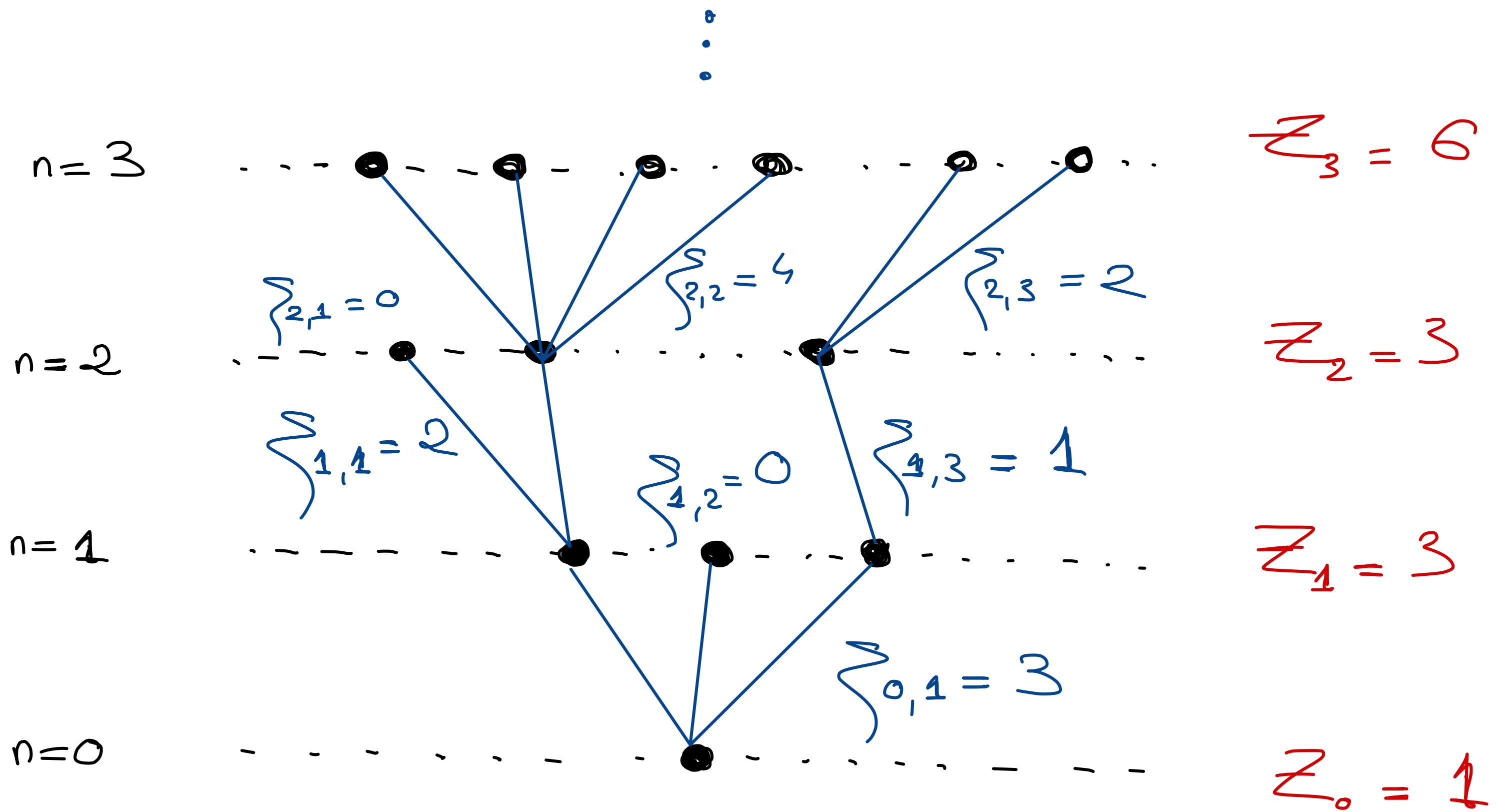
5. martingale d'un processus de Galton-Watson.

$(\xi_{n,k})_{n\geq 0, k\geq 1}$ famille de variables aléatoires i.i.D à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$$m = \mathbb{E}[\xi_{0,1}] < +\infty .$$

L'arbre de Galton-Watson défini par cette famille est l'arbre planaire enraciné partant d'un individu à la génération 0, et tel que le k-ième individu de la n-ième génération ait $\xi_{n,k}$ descendants.

On note Z_n le nbre d'individus à la n-ième génération.



$n=3$
$\xi_{2,2}=4$
$\xi_{2,3}=2$
$\xi_{2,1}=0$
$n=2$
$\xi_{1,1}=2$
$\xi_{1,2}=0$
$\xi_{1,3}=1$
$n=1$
$\xi_{0,1}=3$
$n=0$
$Z_3=6.$
$Z_2=3$
$Z_1=3$
$Z_0=1$

$$Z_0 = 1 \; ; \; Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} \xi_{n,k} .$$

La suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$.

En effet, $Z_{n+1} = f(Z_n, (\xi_{n,k})_{k\geq 1}) \longrightarrow$ th. de représentation des CM.

matrice de transition ? Notons $\mu(\ell) = \mathbb{P}[\xi_{\cdot,\cdot} = \ell]$ pour $\ell \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{P}[Z_{n+1} = m \mid Z_n = k]$

= probabilité pour qu'une somme de k variables iid de loi μ soit égale à m

$= \mu^{*k}(m)$

$\hookrightarrow$ produit de convolution

$$= \sum_{\substack{m_1 + m_2 + \dots + m_k = n \\ m_i \geq 0}} \mu(m_1)\mu(m_2)\dots\mu(m_k).$$

<u>Proposition</u> : Si $m = \mathbb{E}[\xi_{\cdot,\cdot}] < +\infty$, alors $M_n = \frac{Z_n}{m^n}$ est une martingale (positive) / $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_{m,k}, m < n)$.

<u>Preuve</u> $\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$

$$= \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{k \leq Z_n} \xi_{n,k} \mid \mathcal{F}_n\Big]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{1}_{k \leq Z_n}}_{\mathcal{F}_n\text{-mesurable}} \mathbb{E}[\xi_{n,k}] = m \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{k \leq Z_n} = m Z_n.$$

$\square$.

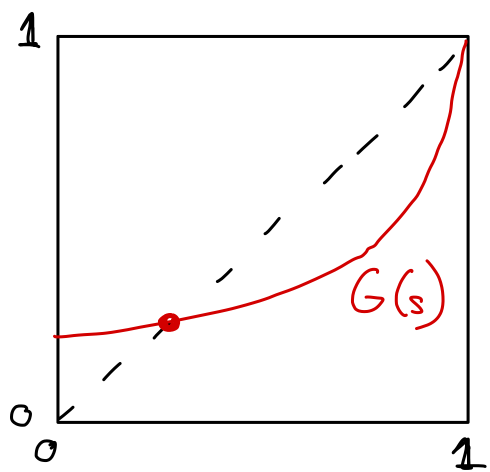
Il y a une autre martingale reposant sur la fonction génératrice de la loi μ.

$$G(s) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mu(\ell)\, s^{\ell}.$$

bien définie pour $s \in [0,1]$

croissante, convexe.

$$G(1) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mu(\ell) = 1 \;; \quad G'(1) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mu(\ell)\,\ell = m.$$



Soit $q \mid G(q) = q$. (c'est le cas si $q = 1$, et pour un unique autre réel $q \in [0, 1)$ si $m > 1$.)

Alors, $(q^{Z_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale / $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_{m<n, k \geq 1})$.

En effet, $\mathbb{E}[q^{Z_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n]$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(Z_n = k)} \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{k} q^{\xi_{n,j}}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(Z_n = k)} G(q)^k = (G(q))^{Z_n}$$

$= q^{Z_n}$ car $G(q) = q$.

2. Transformations de martingales.

Les résultats élémentaires de la théorie des martingales reposent sur le lemme suivant :

Lemme Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration

$(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale / $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$(A_n)_{n\geq 1}$ un processus prévisible :

$\forall n$, A_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable.

On pose $(A\bullet M)_n = \sum_{k=1}^{n} A_k(M_k - M_{k-1})$

Si $A_n \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\forall n$, alors $(A\bullet M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une martingale.

remarque : on dit que $A \bullet M$ est l'intégrale stochastique (discrète) de A contre dM.

Preuve : L'adaptabilité et l'intégrabilité sont claires avec ces hypothèses.

$$\mathbb{E}[(A \bullet M)_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = (A \bullet M)_n + \mathbb{E}[A_{n+1}(M_{n+1} - M_n) \mid \mathcal{F}_n]$$

$$\downarrow$$

$$A_{n+1}\left(\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] - M_n\right)$$

$$\shortparallel$$

0 pour $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingale. $\square$

remarque : la même preuve montre que si $A_n \geq 0$ p.s. $\forall n$, alors l'intégrale stochastique discrète conserve les sur et sous-martingales. (si $(A_n)_{n\geq 1}$ prévisible).

<u>Application</u> : $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingale décrivant les positions dans un jeu de hasard équilibré.

A_n : mise au temps n, décidée selon une stratégie prévisible (on ne connaît au moment de la mise que les résultats des $n-1$ premiers tours de jeu)

Alors, $(A \bullet M)_n$ est une martingale.

En particulier, $\mathbb{E}[(A \bullet M)_n]$ = gain moyen au temps n

$= \mathbb{E}[(A \cdot M)_0] = 0$.

$\rightsquigarrow$ il n'y a pas de stratégie prévisible de mise permettant de gagner à un jeu de hasard équilibré.

3. Théorème d'arrêt

<u>rappel</u> : Un temps d'arrêt / filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ |

$\forall n$, $\{T=n\}\in\mathcal{F}_n$.

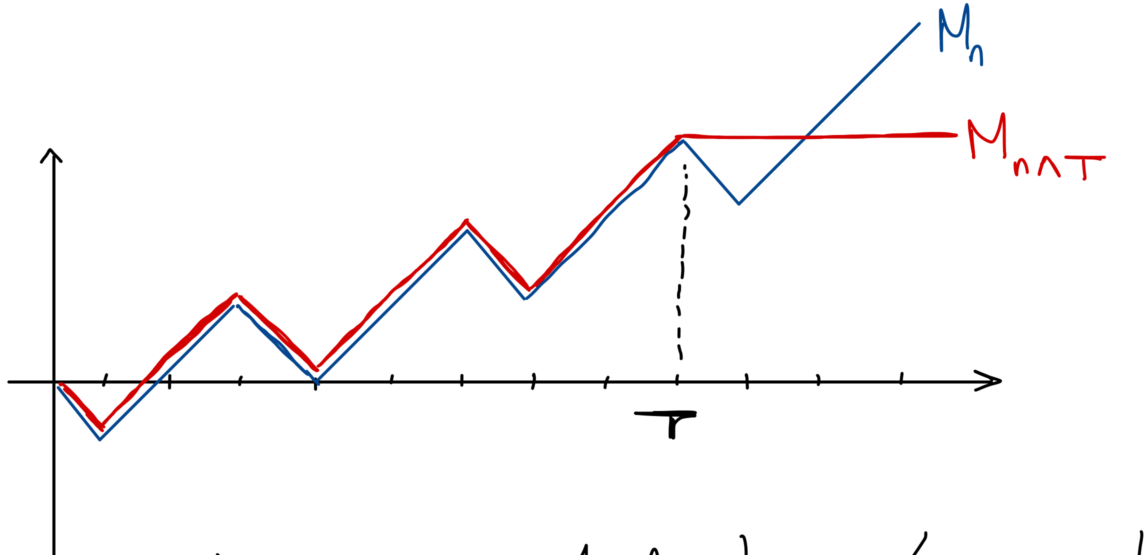
<u>Théorème</u> Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale / $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

T un temps d'arrêt.

On forme la martingale $(M_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{N}}$ arrêtée au temps T.

C'est encore une martingale.

Le résultat de conservation vaut également pour les sur- et sous-martingales.



Preuve : Le caractère martingale est conservé si on retranche à $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa valeur initiale M_0. On peut donc supposer sans perte de généralités $M_0 = 0$.

Alors, $M_{n\wedge T} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{(k\leq T)} (M_k - M_{k-1}) = (A\cdot M)_n$

avec $A_n = \mathbb{1}_{(n \leq T)} = 1 - \mathbb{1}_{(n-1 \geq T)}$ prévisible. $\square$

Ceci implique :

$$\mathbb{E}[M_{n \wedge T}] = \mathbb{E}[M_0] \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Supposons T fini p.s. Alors, $M_T = \lim_{n \to +\infty} M_{n \wedge T}$ p.s.

A-t-on $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$?

⚠ en général, non ! On sait bien qu'il faut des hypothèses supplémentaires pour pouvoir passer à la limite dans une espérance.

<u>Théorème</u> (Doob) Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingale / $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
T temps d'arrêt fini p.s.

Sous l'une des conditions suivantes, $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$.

1. La martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

1'. ——— arrêtée $(M_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2. Le temps T est borné.

3. T est intégrable et les accroissements $M_{n+1} - M_n$ sont uniformément bornés.

$\hookrightarrow$ c'est le cas si $M = A \cdot X$ avec
X martingale bornée
A prévisible borné.

Preuve : 1. $\Rightarrow$ 1.' $\Rightarrow$ TCD pour $(M_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{N}}$

2. $\nearrow$

Pour 3., on va montrer que $(M_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable :

$$\lim_{L\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|M_{n\wedge T}| \mathbb{1}_{|M_{n\wedge T}|\geq L}\right] = 0.$$

On remarque que :

$$|M_{n\wedge T}| \leq |M_0| + \sum_{k=1}^{n\wedge T} |M_k - M_{k-1}|$$

$$\leq |M_0| + \sum_{k=1}^{T} |M_k - M_{k-1}| = Z.$$

Si $|M_{n\wedge T}| \geq L$, alors a fortiori $Z \geq L$. Donc,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|M_{n\wedge T}|\, \mathbb{1}_{|M_{n\wedge T}|\geq L}\right] \leq \mathbb{E}\left[Z\, \mathbb{1}_{Z\geq L}\right]$$

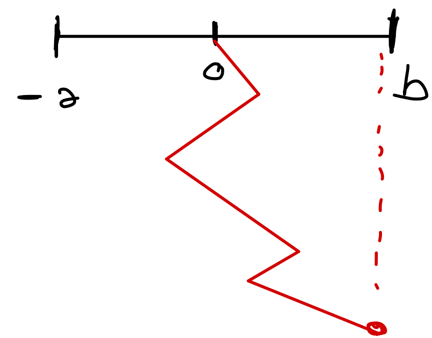
donc il suffit de montrer : Z intégrable.

Or, $\mathbb{E}[Z] \leq \mathbb{E}[|M_0|] + \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T} |M_k - M_{k-1}|\right]$

$$\leq \mathbb{E}[|M_0|] + C\,\mathbb{E}[T] < +\infty. \quad \square.$$

<u>exemples</u> : 1. $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ (issue de 0)

$$T = \inf\{\tau_{-a}, \tau_b\}$$



On veut calculer $\mathbb{P}_0[T = \tau_b]$ (aussi possible avec la propriété de Markov simple)

Comme $(M_{n \wedge T})_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale bornée,

$$0 = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_T]$$

$$= b \cdot \mathbb{P}_0[T = \tau_b] + (-a)(1 - \mathbb{P}_0[T = \tau_b])$$

d'où $\mathbb{P}_0[T = \tau_b] = \dfrac{a}{a+b}$.

2. Même problème avec la marche de paramètre $p \neq \frac{1}{2}$.

$(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est plus une martingale, mais c'est le cas de

$$P_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{M_n}.$$

En effet, $\mathbb{E}[P_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$

$$= p \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{M_n+1} + (1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{M_n-1}$$

$$= (1-p)\, P_n + p\, P_n = P_n .$$

La martingale $(P_{n \wedge T})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc :

$$1 = \mathbb{E}[P_0] = \mathbb{E}[P_T] = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{b} \mathbb{P}_0[T = \tau_b] + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{-a} \left(1 - \mathbb{P}_0[T = \tau_b]\right)$$

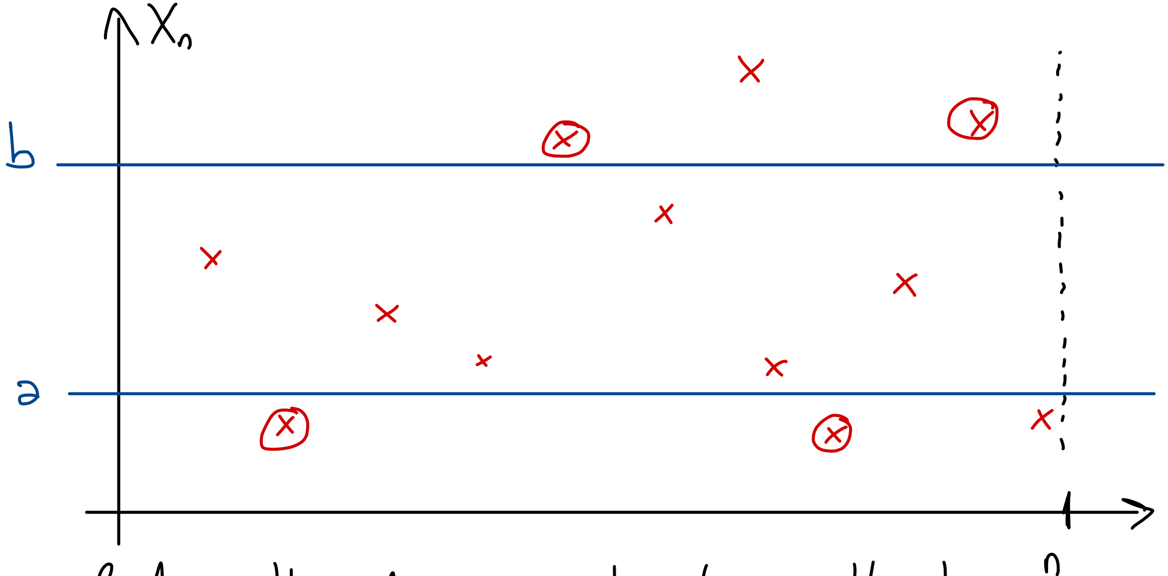
d'où : $\mathbb{P}_0[T = \tau_b] = \dfrac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{-a}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{b} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{-a}} = \dfrac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a} - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b} - 1}$.

4. L'inégalité du nombre de montées.

intuition : une martingale a des propriétés d'automoyennisation.
si elle est convenablement bornée, ceci n'est possible que si elle converge.

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration, $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus adapté.
Le nombre de montées de X le long d'un intervalle $[a, b]$
est :

$$M_n(X, a, b) = \max \left\{ k : \exists s_1 < t_1 < s_2 < t_2 \dots < s_k < t_k \leq n \text{ avec } X_{s_i} \leq a \ \forall i \leq k, \ X_{t_i} \geq b \ \forall i \leq k \right\}$$



ici, $M_n(X, a, b) = 2$.

Définition alternative avec des temps d'arrêt :

on pose $T_0 = 0$, puis :

$$S_{k+1} = \inf\{n \geq T_k \mid X_n \leq a\}$$

$$T_{k+1} = \inf\{n \geq S_{k+1} \mid X_n \geq b\}.$$

Alors, $\Pi_n(X, a, b) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(T_k \leq n)}$.

ceci implique que $\Pi_n(X, a, b)$ est $\mathcal{F}_n$ mesurable.

<u>Théorème</u> Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une surmartingale.

On a $\mathbb{E}[\Pi_n(X, a, b)] \leq \dfrac{\mathbb{E}[(X_n - a)_-]}{b-a}$

où $t_- = \max(0, -t)$.

<u>Preuve</u> : On va intégrer X le long de ses montées :

$$A_n = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{S_k < n \leq T_k} = \begin{cases} 1 & \text{si on est le long d'une des montées} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $\mathbb{1}_{S_k < n \leq T_k} = \mathbb{1}_{S_k \leq n-1}\left(1 - \mathbb{1}_{T_k \leq n-1}\right)$, $(A_n)_{n \geq 1}$ est prévisible positif

$\Longrightarrow$ $A \bullet X$ est une surmartingale.

$\Longrightarrow$ $0 = \mathbb{E}[(A \bullet X)_0] \geq \mathbb{E}[(A \bullet X)_n]$.

Or, $(A \bullet X)_n = \sum_{k=1}^{\Pi_n(X,a,b)} X_{T_k} - X_{S_k}$ si $n \leq S_{\Pi_n(X,a,b)+1}$

$$= \sum_{k=1}^{\Pi_n(X,a,b)} X_{T_k} - X_{S_k} + X_n - X_{S_{\Pi_n(X,a,b)+1}}.$$

si $n \geq S_{\Pi_n(X,a,b)+1}$

Comme $X_{T_k} - X_{S_k} \geq b-a$, on en déduit :

$$0 \geq (b-a)\,\mathbb{E}[M_n(X,a,b)] + \mathbb{E}[\min(0, X_n - a)]$$

$$\min(0, X_n - a) = -\max(0, a - X_n) = -(X_n - a)_-.$$

$\square$.

Le résultat s'applique en particulier aux martingales.

5. Convergence p.s. de martingales

<u>rappel</u> : étant donnée une surmartingale $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\mathbb{E}[M_n(X,a,b)] \leq \frac{\mathbb{E}[(X_n - a)_-]}{b-a}$$

$M_n(X,a,b)$: nbre de montées de X le long de $[a,b]$, sur l'intervalle de temps $[\![0,n]\!]$

Supposons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n|] \leq M < +\infty.$$

Alors, $\forall n$, $\forall a<b$, $\mathbb{E}[M_n(X, a, b)] \leq \dfrac{\mathbb{E}[\max(0, a-X_n)]}{b-a}$

$$\leq \frac{|a|+M}{b-a}$$

$\longrightarrow M_\infty(X, a, b)$, le nbre total de montées, est tjs fini p.s. (et même d'espérance finie)

Donc, $\forall a<b$, on a : soit $X_n < b$ pour $n \geq n_0$
soit $X_n > a$ pour $n \geq n_0$

pour un certain n_0 (aléatoire)

Fait (déterministe) : soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que, pour

toute paire $a < b$, on a soit $x_n < b$ pour $n \geq n_0(a,b)$
dans $\mathbb{Q}$ soit $x_n > a$ — —

Alors, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

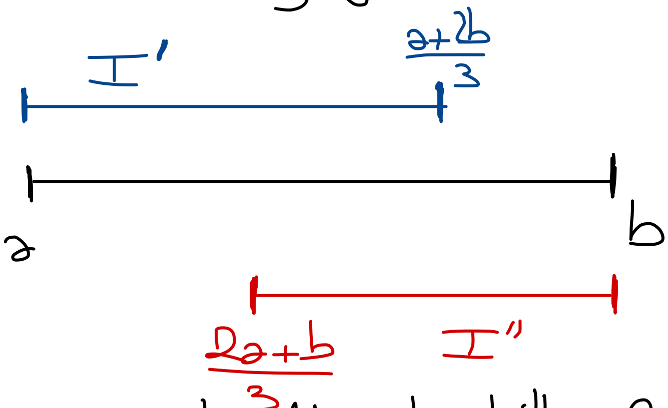
En effet : 1) Si $\forall k \in \mathbb{Z}$, $x_n > k$ pour $n \geq n_0(k, k+1)$,
alors $x_n \to +\infty$.

2) Si $\forall k \in \mathbb{Z}$, $x_n < k$ pour $n \geq n_0(k-1, k)$,
alors $x_n \to -\infty$.

3) Sinon, il existe $k < \ell$ entiers tels que $k < x_n < \ell$ pour n assez grand.

On procède alors par dichotomie. Soit $I = [a,b]$ un intervalle tel que $x_n \in I$ pour $n \geq n_I$. Si $x_n < \frac{a+2b}{3}$ pour n assez grand, Alors $x_n \in I' = \left[a, \frac{a+2b}{3}\right]$ pour $n \geq n_{I'}$.

Sinon, $x_n > \frac{2a+b}{3}$ pour n assez grand, et $x_n \in I'' = \left[\frac{2a+b}{3}, b\right]$ pour $n \geq n_{I''}$.



On peut donc trouver un intervalle de taille $\frac{2}{3}|I|$ avec les mêmes propriétés que I. Par récurrence, on construit une suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'intervalles emboîtés avec : $|I_k| = \left(\frac{2}{3}\right)^k |I_0|$

$x_n \in I_k$ pour $n \geq n_k$.

Ceci implique la convergence de x_n vers une limite finie.

Théorème Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une surmartingale bornée dans L^1.
$\exists X_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $X_n \xrightarrow[p.s]{} X_\infty$.

Preuve Pour tous $a<b$ dans $\mathbb{Q}$, $M_\infty(X, a, b) \underset{p.s.}{<} +\infty$, donc p.s., $X_n \xrightarrow[p.s.]{} X_\infty \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Il reste à montrer que la limite est intégrable. Or, par le lemme de Fatou,

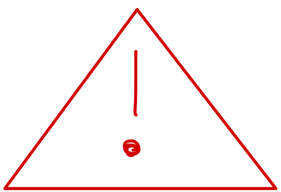
$$\mathbb{E}[|X_\infty|] = \mathbb{E}[\liminf_{n\to+\infty} |X_n|] \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}[|X_n|] \leq M < +\infty.$$

En particulier, X_∞ est fini p.s. $\square$

Cas particuliers : 1) Le résultat s'applique en particulier aux martingales bornées dans L^1.

2) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une (sur)martingale positive. Alors, elle est bornée dans L^1, car

$$\mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[X_n] \leq \mathbb{E}[X_0] = M < +\infty .$$



Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingale bornée dans L^1 ; X_∞ sa limite. p.s. En règle générale, on n'a pas $X_n \xrightarrow[L^1]{} X_\infty$, et $\mathbb{E}[X_\infty] = \mathbb{E}[X_0]$

(voir plus loin).

<u>exemple</u> : On considère le modèle d'urne suivant :

On part au temps $n = 0$ avec une boule noire et une boule rouge.

À chaque instant entier $n \geq 1$:

- on tire au hasard une boule de l'urne choisie uniformément.
- on la remplace par deux boules de la même couleur.

On note N_n le nombre de boules noires dans l'urne au temps n.

$$Y_{n,1} = \frac{N_n}{n+2} \quad \text{proportion de boules noires au temps } n$$

$$Y_{n,k\geq 2} = \frac{N_n(N_n+1)\dots(N_n+k-1)}{(n+2)(n+3)\dots(n+k+1)} = \frac{N_n^{\uparrow k}}{(n+2)^{\uparrow k}}.$$

Chaque $Y_{n,k}$ prend ses valeurs dans $[0,1]$.

$$\mathbb{E}[Y_{n+1,k} \mid \mathcal{F}_n] = \frac{1}{(n+3)\dots(n+k+2)} \mathbb{E}[N_{n+1}(N_{n+1}+1)\dots(N_{n+1}+k-1) \mid \mathcal{F}_n]$$

$$= \frac{1}{(n+3)\dots(n+k+2)}\left[\left(\frac{N_n}{n+2}\right)(N_n+1)\dots(N_n+k) + \left(1-\frac{N_n}{n+2}\right)N_n\dots(N_n+k-1)\right]$$

$$= \frac{1}{(n+2)\cdots(n+k+2)} \Big[\underbrace{N_n^{\uparrow k+1}}_{N_n^{\uparrow k} \cdot (N_n + k)} + (n+2) N_n^{\uparrow k} - N_n \cdot N_n^{\uparrow k} \Big]$$

$$= \frac{n+k+2}{(n+2)\cdots(n+k+2)} N_n^{\uparrow k} = \frac{N_n^{\uparrow k}}{(n+2)\cdots(n+k+1)} = Y_{n,k} .$$

$\longrightarrow$ martingale.

Comme ces martingales sont bornées dans L^∞, elles convergent toutes p.s. et dans tous les espaces $L^{p \geq 1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (on peut appliquer le TCD).

Notons $Y_{\infty,k} = \lim_{n \to +\infty} Y_{n,k}$. En fait, $Y_{\infty,k} = (Y_{\infty,1})^k$.

En effet :

$$Y_{n,k} = \frac{N_n(N_n+1)\dots(N_n+k-1)}{(n+2)\dots(n+k+1)}$$

$$= \underbrace{\frac{(n+2)^k}{(n+2)\dots(n+k+1)}}_{\substack{\downarrow n\to+\infty \\ 1}} \times \frac{N_n^{\,k} + \sum_{j=0}^{k-1} c_{j,k} N_n^{\,j}}{(n+2)^k}$$

$$\downarrow$$

$$(Y_{n,1})^k + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{c_{j,k}}{(n+2)^{k-j}} (Y_{n,1})^j \xrightarrow[p.s.]{} 0$$

Comme $Y_{\infty,k} = \lim\limits_{n\to+\infty} Y_{n,k}$, p.s et L^1

$$\mathbb{E}[(Y_{\infty,1})^k] = \mathbb{E}[Y_{\infty,k}] = \mathbb{E}[Y_{0,k}] = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1}.$$

Conclusion : la proportion $Y_n = Y_{n,1}$ de boules noires converge p.s. et en moments vers une variable aléatoire Y_∞ avec

$$\forall k \geq 1, \quad \mathbb{E}[Y_\infty^k] = \frac{1}{k+1}$$

Ce sont les moments d'une loi uniforme sur $[0,1]$:

$$\int_0^1 x^k \, dx = \frac{1}{k+1}.$$

Ces moments caractérisent cette loi, car $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}$ a un rayon de convergence > 0.

Donc : $Y_\infty \sim \mathcal{U}([0,1])$.

6. Convergence L^1 de martingales

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale bornée dans L^1 on a besoin d'hypothèses supplémentaires pour avoir $X_n \xrightarrow[L^1]{} X_\infty$.

<u>Définition</u> : Une suite de v.a. est dite uniformément intégrable si

$$\lim_{M\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|X_n| \, \mathbb{1}_{|X_n|\geq M} \right] = 0.$$

<u>remarque</u> : on peut montrer (ce n'est pas évident) que c'est équivalent à l'énoncé suivant :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ A \text{ événement avec } \mathbb{P}[A]\leq\varepsilon}} \mathbb{E}\left[|X_n| \, \mathbb{1}_A \right] = 0.$$

<u>remarques</u> : 1) Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par une variable intégrable $R \geq 0$, alors elle est UI.

2) Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{p>1}$, alors elle est UI, car

$$\mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_{|X_n| \geq M}] \leq \frac{\mathbb{E}[|X_n|^p]}{M^{p-1}} \leq \frac{C}{M^{p-1}} \xrightarrow[M \to +\infty]{} 0.$$

3) On a l'équivalence pour des variables intégrables :

$$(X_n \to X_\infty \text{ dans } L^1) \iff \left(X_n \xrightarrow[\mathbb{P}]{} X_\infty \text{ et } (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est UI} \right).$$

<u>Théorème</u> : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingale / $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est UI.

2) $X_n \xrightarrow[\text{p.s et } L^1]{} X_\infty$ pour une certaine variable X_∞ intégrable $\mathcal{F}_\infty$-mesurable.

3) $\exists Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mid \forall n, \ X_n = \mathbb{E}[Z \mid \mathcal{F}_n]$.
(martingale fermée)

Quitte à remplacer Z par $\mathbb{E}[Z \mid \mathcal{F}_\infty]$ avec $\mathcal{F}_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} \mathcal{F}_n$, on peut supposer $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$. Alors, $Z = X_\infty$

$$= \lim_{n\to+\infty} X_n \ (\text{p.s et } L^1).$$

Si ces conditions sont vérifiées, alors :

- on a bien $\mathbb{E}[X_\infty] = \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0]$.
- pour tout temps d'arrêt T fini p.s., $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$.

  et $X_T = \mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_T]$.

<u>problème</u> : La condition d'UI est en général triviale ou difficile à vérifier.

<u>exemple</u> : Dans le problème d'urnes, on peut comprendre le processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit :

- on tire une proportion limite $Y_\infty \sim \mathcal{U}([0,1])$.
- Les proportions en temps fini Y_n sont obtenues par conditionnement :

$$Y_n = \mathbb{E}[Y_\infty \mid \mathcal{F}_n] \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

7. Convergence $L^{p>1}$ de martingales

Si les martingales étudiées sont dans $L^{p>1}$, les problèmes de convergence sont beaucoup plus simples :

<u>Théorème</u> : Soit $p>1$, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingale bornée dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n|^p] < +\infty.$$

Alors, $X_n \xrightarrow[L^p,\, L^1,\, p.s]{} X_\infty$ (et on a une martingale fermée).

<u>Preuve du cas $p=2$:</u>

Sans perte de généralité, on peut supposer $X_0 = 0$ (remplacer X_n par $X_n - X_0$).

Remarquons alors que, si $n < m$,

$$\mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})(X_m - X_{m-1})] = \mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})\mathbb{E}[\underbrace{X_m - X_{m-1} | \mathcal{F}_n}_{=0}]]$$

$$= 0.$$

Donc, $\mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - X_{k-1}\right)^2\right]$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2].$$

La série $\sum_{k\geq 1} X_k - X_{k-1}$ converge donc dans L^2 (c'est une série de termes orthogonaux avec la série des normes carrés convergente).

$$\Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow[L^2]{} X_\infty \quad (\text{et a fortiori } L^1).$$

<u>Cas général $p > 1$</u> :

Notons que pour toute fonction convexe $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[\phi(X) \mid A] = \mathbb{E}\Big[\sup_{ax+b \leq \phi(x)} aX + b \mid A\Big]$$

$$\geq \sup_{ax+b \leq \phi(x)} (a\,\mathbb{E}[X \mid A] + b) = \phi(\mathbb{E}[X \mid A]).$$

On en déduit que $Y_n = |X_n|$ est une sousmartingale

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[|X_{n+1}| \, | \mathcal{F}_n]$$
$$\geq |\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]| = |X_n| = Y_n .$$

Or, pour toute sousmartingale positive $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, posant $S_n = \sup_{k \leq n} Y_k$, et $T = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid Y_n \geq x\}$, on a :

$$\mathbb{E}[Y_{n \wedge T} \mathbb{1}_{(T \leq n)}] \geq x \, \mathbb{P}[T \leq n] = x \, \mathbb{P}[S_n \geq x]$$

et

$$\mathbb{E}[Y_{n \wedge T} \mathbb{1}_{(T \leq n)}] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[Y_k \mathbb{1}_{(T=k)}]$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_k] \mathbb{1}_{(T=k)}]$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y_n \mathbb{1}_{(T=k)} \mid \mathcal{F}_k\right]\right]$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left[Y_n \mathbb{1}_{(T=k)}\right] = \mathbb{E}\left[Y_n \mathbb{1}_{(T\leq n)}\right]$$

Donc : $x\,\mathbb{P}[S_n \geq x] \leq \mathbb{E}\left[Y_n \mathbb{1}_{(T\leq n)}\right] \leq \mathbb{E}[Y_n]$.

et $\mathbb{P}\left[\sup_{k\leq n} |X_k| \geq x\right] \leq \frac{1}{x}\,\mathbb{E}\left[|X_n| \mathbb{1}_{\sup_{k\leq n} |X_k| \geq x}\right]$.

Ceci implique l'inégalité maximale de Doob :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\left(\sup_{k\leq n} |X_k|\right)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|X_n|^p\right].}$$

En effet :

$$\mathbb{E}[S_n^p] = \int_0^\infty x^p \, \mathbb{P}_{S_n}[dx] \underset{(IPP)}{=} \int_0^\infty p x^{p-1} \, \mathbb{P}[S_n \geq x] \, dx$$

$$\leq \int_0^\infty p x^{p-2} \, \mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_{S_n \geq x}] \, dx$$

$$\leq \int_{\Omega \times \mathbb{R}_+} |X_n(\omega)| \mathbb{1}_{S_n(\omega) \geq x} \, p x^{p-2} \, dx \, \mathbb{P}[d\omega].$$

$$\leq \int_\Omega |X_n(\omega)| \left(\int_0^{S_n(\omega)} p x^{p-2} dx \right) \mathbb{P}[d\omega]$$

$$\leq \left(\frac{p}{p-1}\right) \int_\Omega |X_n(\omega)| \, S_n(\omega)^{p-1} \, \mathbb{P}[d\omega]$$

donc $\mathbb{E}[S_n^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right) \mathbb{E}[|X_n| \, S_n^{p-1}]$, puis Hölder.

Conséquence de l'inégalité maximale de Doob : si $(X_n)_n$ bornée dans L^p, alors $\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n|$ est dans L^p $\longrightarrow$ on peut utiliser la convergence dominée pour montrer que $X_n \xrightarrow[L^p]{} X_\infty$. $\square$.

<u>Application</u> : étude du modèle de Galton-Watson.

<u>rappel</u> : μ loi sur $\mathbb{N}$ de moyenne $m = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,\mu(k) < +\infty$.

$$Z_0 = 1,\quad Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} \xi_{n,k} \quad \text{avec les } \xi_{n,k} \sim \mu.$$

1) $X_n = \dfrac{Z_n}{m^n}$ est une martingale positive.

2) Si $G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k) s^k$ et $G(q) = q$, alors

$(q^{Z_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale

1er cas $m < 1$. X_n martingale positive converge p.s. vers une variable intégrable X_∞. Alors,

$$\underbrace{Z_n}_{\text{entier}} = \underbrace{m^n}_{\to 0} \underbrace{X_\infty (1 + o(1))}_{\text{borné}},$$ donc $Z_n \longrightarrow 0$ p.s.

↳ extinction presque sûre.

2ème cas $m = 1$. $X_n = Z_n$ est à la fois une CM sur $\mathbb{N}$, et une martingale positive. Elle converge p.s., donc doit être stationnaire.

Supposons $\mu(1) \neq 1$. Alors, pour avoir une moyenne $m = 1$, il faut que μ soit supportée par $\{0\}$ et par $[\![2, +\infty[\![$, donc $\mu(0) > 0$.

On a alors $\forall k \geq 1$: $P(k, 0) = p(0)^k > 0$.

0 est absorbant donc récurrent.

Si k était un autre état récurrent, comme $k \rightsquigarrow 0$, on devrait avoir $0 \rightsquigarrow k$, ce qui n'est pas le cas.

Donc :

états récurrents : $\{0\}$

états transients : $[\![1, +\infty]\!]$.

Une limite stationnaire de la CM $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être un état transient, donc $Z_n \xrightarrow[p.s]{} 0$.

$\longrightarrow$ extinction presque sûre.

<u>3ème cas</u> : $m > 1$.

On peut traiter les 3 cas simultanément avec une autre technique.

Notons $G_n(s) = \mathbb{E}[s^{Z_n}]$. On a :

$$G_n(s) = G^{\circ n}(s).$$

En effet, si c'est vrai au rang n, alors au rang $n+1$:

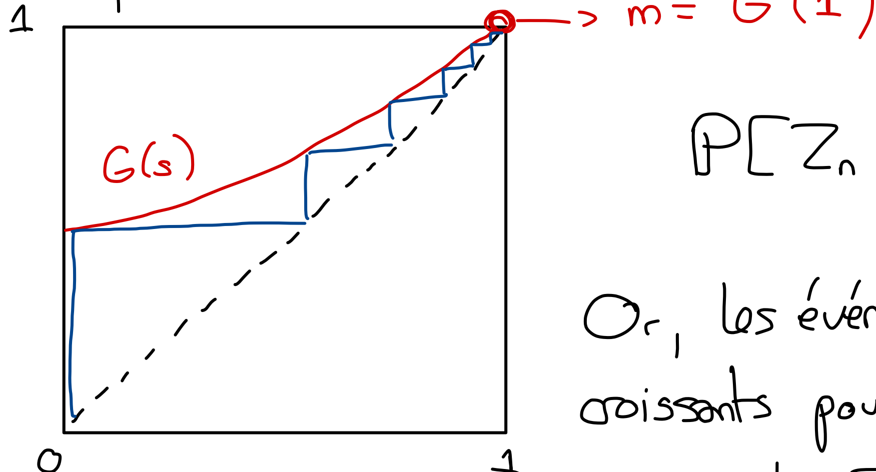
$$\mathbb{E}[s^{Z_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\left[s^{\sum_{k=1}^{Z_n} \xi_{n,k}} \mid \mathcal{F}_n \right]$$
$$= \left(\mathbb{E}[s^{\xi}]\right)^{Z_n} = (G(s))^{Z_n}.$$

d'où : $G_{n+1}(s) = \mathbb{E}[s^{Z_{n+1}}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[s^{Z_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n]]$
$$= \mathbb{E}[(G(s))^{Z_n}] = G_n(G(s)).$$

En particulier :

$$\mathbb{P}[Z_n = 0] = G_n(0) = G^{\circ n}(0).$$

Si $m \leq 1$, alors :

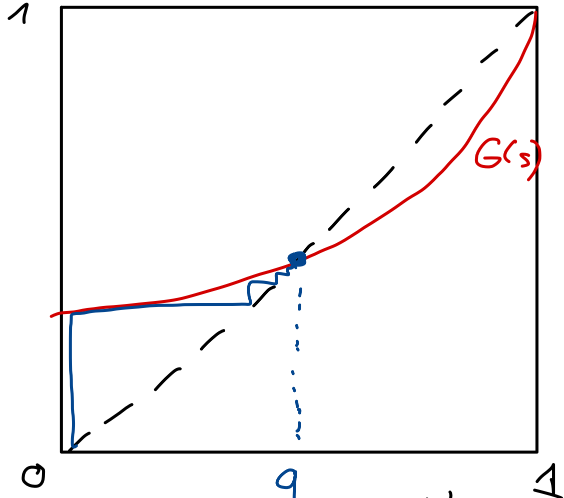


$$\mathbb{P}[Z_n = 0] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$

Or, les événements $\{Z_n = 0\}$ sont croissants pour l'inclusion, et leur union est $\{\lim_{n \to +\infty} Z_n = 0\}$, donc $\mathbb{P}[\lim_{n\to+\infty} Z_n = 0] = 1$.

Si $m > 1$, alors $\exists! \, q \in [0, 1) \mid G(q) = q$

fonction croissante convexe.



$$\mathbb{P}\left[\lim_{n\to+\infty} Z_n = 0\right] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}[Z_n = 0] = q.$$

L'extinction se produit avec probabilité q.

Que se passe-t-il sur l'événement de non extinction ? Si $m > 1$, $\mu(1) \neq 1$, et de nouveau : $\{0\}$ = états récurrents

$[\![1, +\infty]\!]$ = états transients

(il faut maintenant distinguer les cas $\mu(0) = 0$ et $\mu(0) > 0$)

On a donc sur l'évènement de non extinction, par transience :

$$Z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

À quelle vitesse ? On va supposer que $\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \mu(k) < +\infty$

<u>Lemme</u> : $X_n = \frac{Z_n}{m^n}$ est bornée dans L^2.

Posons $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mu(k) = m^2 + \sigma^2$. On calcule

$$\mathbb{E}[(Z_{n+1})^2 \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{Z_n} \xi_{n,k}\right)^2 \middle| \mathcal{F}_n\right]$$

$$= Z_n \mathbb{E}[\xi^2] + Z_n(Z_n - 1)(\mathbb{E}[\xi])^2$$

$$= Z_n \sigma^2 + Z_n^2 m^2 .$$

En déconditionnant et en divisant par m^{2n+2} :

$$\mathbb{E}[(X_{n+1})^2] = \frac{\sigma^2 \, \mathbb{E}[X_n]}{m^{n+2}} + \mathbb{E}[(X_n)^2]$$

$$= \frac{\sigma^2}{m^{n+2}} + \mathbb{E}[(X_n)^2].$$

Comme $m > 1$, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^2}{m^{n+2}}$ converge

$\Longrightarrow (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée dans L^2 $\Longrightarrow$ $X_n \xrightarrow[L^1,\, L^2]{p.s} X_\infty$.

En particulier, $\mathbb{E}[X_\infty] = \mathbb{E}[X_0] = 1$

et $\mathbb{P}[X_\infty > 0] > 0$.

On a en fait : $\mathbb{P}[X_\infty > 0] = 1 - q$

$= $ probabilité de non-extinction.

Autrement dit, si $m > 1$ et μ a un moment d'ordre 2 :

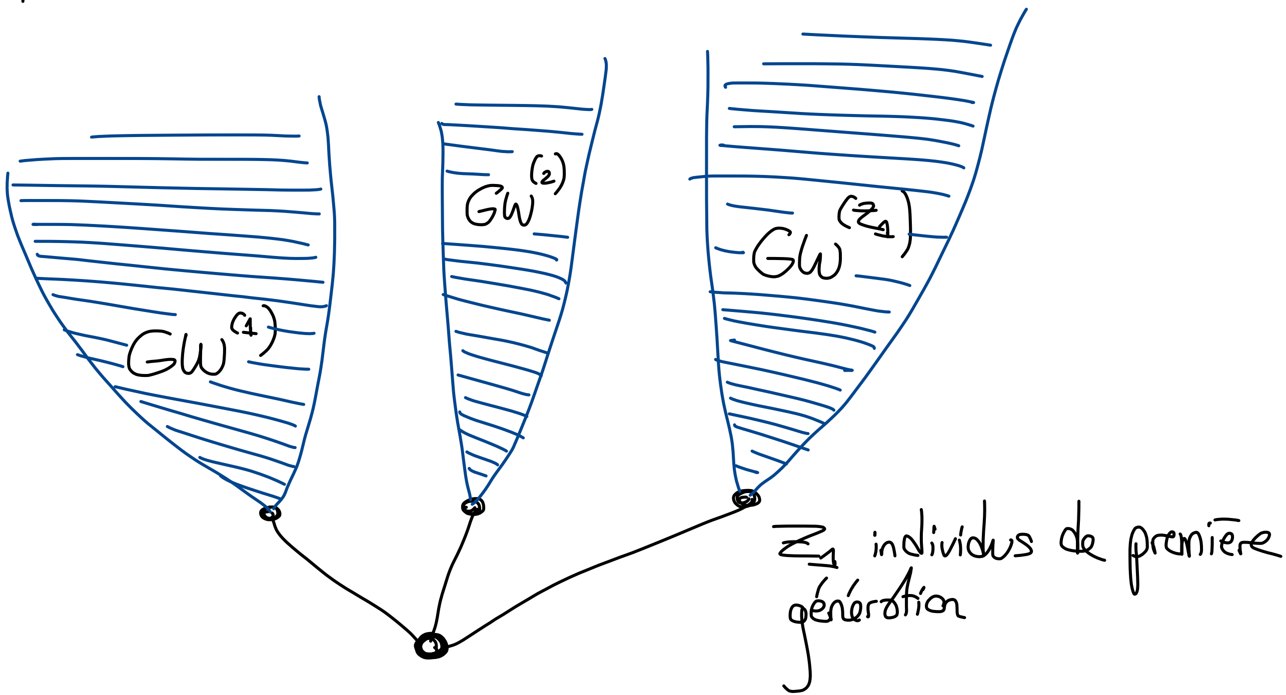
- avec probabilité $q \in [0,1) \mid G(q) = q$, $Z_n \to 0$.
- ______ $1-q$, $Z_n \longrightarrow +\infty$ à vitesse exponentielle, car $Z_n \sim \underbrace{X_\infty}_{> 0 \text{ sur l'événement de non extinction}} m^n$.

<u>remarque</u> : Un théorème difficile dû à Kesten et Stygum permet de remplacer $\sum k^2 \mu(k) < +\infty$ par $\sum k \log k \, \mu(k) < +\infty$.

On a même : $\sum k \log k \; \mu(k) < +\infty \Longleftrightarrow \mathbb{P}[X_\infty > 0] = 1-q$.

Preuve de $\mathbb{P}[X_\infty > 0] = 1-q \iff \mathbb{P}[X_\infty = 0] = q$.
sous l'hypothèse L^2 :

On dessine l'arbre GW comme suit :



Conditionnellement à $Z_1 = k$, les k sous arbres issus des fils de la racine sont indépendants et de même loi que l'arbre de départ.

De plus, $X_\infty = 0$ ssi $X_\infty^{(1)} = X_\infty^{(2)} = \cdots = X_\infty^{(k)} = 0$.

Donc, si $\rho = \mathbb{P}[X_\infty = 0]$, alors :

- $\rho < 1$ par un argument précédent $(\mathbb{E}[X_\infty] = 1)$.
- $\rho = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{(X_\infty = 0)} \mid Z_1\right]\right]$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_\infty^{(1)}=0} \mathbb{1}_{X_\infty^{(2)}=0} \cdots \mathbb{1}_{X_\infty^{(Z_1)}=0} \mid Z_1\right]\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\rho^{Z_1}\right] = G(\rho)$$

d'où $\rho = q$. $\square$

exercice : les identités de Wald.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables iiD intégrables, avec $m = \mathbb{E}[X_1]$.

On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Montrer que $(M_n = S_n - mn)_{n\geq 0}$ est une martingale / $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Soit T un temps d'arrêt / $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qu'on suppose intégrable. Montrer que $(M_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale U.i. En déduire que

$$\mathbb{E}[S_T] = m \cdot \mathbb{E}[T].$$

3. On suppose $T, X_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et T indépendant des X_i. Montrer que $S_T \in L^2$; $\mathrm{var}(S_T) = \mathrm{var}(T) \cdot m^2 + \mathrm{var}(X_1)\,\mathbb{E}[T]$.

$\longrightarrow$ On a bien

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n + \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] - m$$
$$= M_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] - m = M_n .$$

$\longrightarrow$ martingale.

Par le théorème d'arrêt, $(M_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale. Montrons qu'elle est u.i, et même dominée par une variable intégrable :

Comme $n\wedge T \leq T$ intégrable, il suffit de montrer que $S_{n\wedge T}$ est dominée.

Or : $$|S_{n\wedge T}| = \left| \sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{1}_{T\geq k} \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| \mathbb{1}_{T\geq k} ,$$ qui est intégrable :

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{\infty} |X_k| \, \mathbb{1}_{T\geq k}\Big] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\Big[\underbrace{|X_k|}_{\perp \mathcal{F}_{k-1}} \; \underbrace{\mathbb{1}_{(T\geq k)}}_{1-\underbrace{\mathbb{1}_{(T\leq k-1)}}_{\mathcal{F}_{k-1}\text{ mesurable}}}\Big]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[|X_k|] \, \mathbb{P}[T\geq k] = C \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[T\geq k]$$

$$= C \; \mathbb{E}[T] < +\infty.$$

On peut donc passer à la limite dans l'identité

$$\mathbb{E}[M_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[M_0] = 0.$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[S_T - mT] = 0, \quad \mathbb{E}[S_T] = m\overline{T}.$$

Dans le cadre L^2, on doit modifier un peu la filtration :

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n, \mathbb{1}_{(T=1)}, \dots \mathbb{1}_{(T=n)}).$$

Montrons que $(M_{n\wedge T})$ est bornée dans L^2.

$$\mathbb{E}[(M_{(n+1)\wedge T} - M_{n\wedge T})^2]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{T\geq n+1}(X_{n+1} - m)^2] = \mathbb{P}[T \geq n+1] \operatorname{var}(X_{n+1})$$

donc $\mathbb{E}[(M_{n\wedge T})^2] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(M_{k\wedge T} - M_{(k-1)\wedge T})^2]$

$$= \operatorname{var}(X_1) \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}[T \geq k]$$

$$\leq \operatorname{var}(X_1) \, \mathbb{E}[T].$$

On a donc $M_{n\wedge T} \longrightarrow M_T$.

Finalement, $\mathbb{E}[(M_T)^2] = var(X_1)\,\mathbb{E}[T]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_T)^2] &= \mathbb{E}[(S_T - mT)^2] \\ &= \mathbb{E}[S_T^2] - 2m\,\mathbb{E}[TS_T] + m^2\,\mathbb{E}[T^2] \\ &= \mathbb{E}[S_T^2] - 2m\,\mathbb{E}[TM_T] - m^2\,\mathbb{E}[T^2]\end{aligned}$$

Comme $n\wedge T \xrightarrow[L^2]{} T$, $\mathbb{E}[TM_T] = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}[(n\wedge T)M_{n\wedge T}]$

$M_{n\wedge T} \xrightarrow[L^2]{} M$

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{1}_{T\geq i}\,\mathbb{1}_{T\geq j}\,(X_j - m)\Big]$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{P}[T\geq i, T\geq j] \times 0 = 0.$$

Ainsi, $\mathbb{E}[S_T^2] = m^2 \, \mathbb{E}[T^2] + \operatorname{var}(X_1) \, \mathbb{E}[T]$

$$\operatorname{var}(S_T) = m^2 \operatorname{var}(T) + \operatorname{var}(X_1) \, \mathbb{E}[T].$$

<u>application</u> : variable de Poisson composée :

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i, \quad N \sim \mathcal{P}(\lambda) \text{ indépendant des } X_i.$$

$$\mathbb{E}[S] = \lambda \cdot \mathbb{E}[X_1]$$

$$\operatorname{var}(S) = \lambda \left(\mathbb{E}[X_1]^2 + \operatorname{var}(X_1) \right) = \lambda \, \mathbb{E}[X_1^2].$$