

## MODÈLE D'ISING EN DIMENSION 1 ET 2 - CORRIGÉ

*On a rédigé les programmes demandés en pseudo-code, les variables des programmes apparaissant en gras.*

1. D'après la propriété (i), les spins des électrons ne peuvent être observés que dans les positions  $+1$  et  $-1$  relativement à une direction  $\vec{u}$ ; et la probabilité donnée par l'équation (1) est bien une probabilité sur l'ensemble des fonctions  $\sigma : E \rightarrow \{\pm 1\}$ . Si deux électrons voisins  $e$  et  $e'$  ont le même spin dans une configuration  $\sigma$ , ceci contribue à un facteur  $e^\beta$  dans la probabilité de  $\sigma$ , tandis que s'ils ont un spin différent, ceci contribue à un facteur  $e^{-\beta}$  dans la probabilité de  $\sigma$ . Comme  $e^{-\beta} < e^\beta$ , la propriété (ii) est bien retranscrite. Finalement, si un électron  $e$  pris individuellement a un spin positif, ceci contribue à un facteur  $e^\alpha$  dans la probabilité de  $\sigma$ , tandis qu'un spin négatif apporte une contribution  $e^{-\alpha}$ . Supposons  $\alpha > 0$ . Alors,  $e^\alpha > e^{-\alpha}$ , donc un électron a plus tendance à avoir un spin positif, ce qui correspond à la propriété (iii). En particulier, le coefficient  $\alpha$  doit avoir le même signe que  $\langle \vec{B} | \vec{u} \rangle$ . On a ainsi montré que les trois propriétés étaient retranscrites par l'équation (1).

Si  $\alpha$  tend vers l'infini, on s'attend à ce que les configurations avec des spins négatifs aient une probabilité beaucoup plus petite que les configurations avec des spins positifs à la place des spins négatifs, et à la limite, la probabilité  $\mathbb{P}_{\alpha,\beta} = \mathbb{P}_{+\infty,\beta}$  charge avec poids 1 la configuration  $\sigma : E \rightarrow \{\pm 1\}$  avec seulement des spins positifs :  $\sigma(e) = +1$  pour tout  $e \in E$ .

Si  $\beta$  tend vers l'infini, alors les configurations avec des électrons voisins de spins différents deviennent très rares, et à la limite, la probabilité  $\mathbb{P}_{\alpha,\beta} = \mathbb{P}_{\alpha,+\infty}$  charge uniquement les configurations  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  constantes avec que des spins positifs ou que des spins négatifs (ou pour être plus précis, les configurations constantes sur chaque composante connexe de  $E$ ). Finalement, si  $\alpha = \beta = 0$ , alors  $\mathbb{P}_{\alpha,\beta}$  est la configuration uniforme sur l'ensemble des configurations :  $\mathbb{P}_{0,0}[\sigma] = 2^{-\text{card } E}$  pour tout  $\sigma$ .

2. Les 4 configurations de spins sur  $\llbracket 1, 2 \rrbracket \subset \mathbb{Z}$  sont  $++$ ,  $+-$ ,  $-+$  et  $--$ , et elles ont probabilités respectives :

$$\frac{e^{2\alpha+\beta}}{Z(\alpha,\beta)} \quad ; \quad \frac{e^{-\beta}}{Z(\alpha,\beta)} \quad ; \quad \frac{e^{-\beta}}{Z(\alpha,\beta)} \quad ; \quad \frac{e^{-2\alpha+\beta}}{Z(\alpha,\beta)}.$$

La constante de normalisation  $Z(\alpha,\beta)$  est donc égale à  $e^{2\alpha+\beta} + e^{-2\alpha+\beta} + 2e^{-\beta}$ .

Les 16 configurations de spins sur  $\llbracket 1, 2 \rrbracket^2 \subset \mathbb{Z}^2$  et leurs poids  $\mathbb{P}_{\alpha,\beta}[\sigma] Z(\alpha,\beta)$  sont données par le tableau suivant :

$++$	$e^{4\alpha+4\beta}$	$++$	$e^{2\alpha}$	$+-$	$e^{2\alpha}$	$+-$	$e^{2\alpha}$
$+-$	$e^{2\alpha}$	$+-$	$1$	$+-$	$1$	$+-$	$1$
$-+$	$1$	$-+$	$e^{-4\beta}$	$-+$	$e^{-4\beta}$	$-+$	$e^{-2\alpha}$
$--$	$e^{-2\alpha}$	$--$	$e^{-2\alpha}$	$--$	$e^{-2\alpha}$	$--$	$e^{-4\alpha+4\beta}$

La fonction de partition vaut donc  $Z(\alpha,\beta) = e^{4\alpha+4\beta} + e^{-4\alpha+4\beta} + 2e^{-4\beta} + 4 + 4e^{2\alpha} + 4e^{-2\alpha}$ .

3. Notons que  $P(x, y) = e^\beta$  si  $xy = 1$ , et  $P(x, y) = e^{-\beta}$  si  $xy = -1$ ; ainsi,  $P(x, y) = e^{\beta xy}$ . Soit  $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$  une configuration de spins de taille  $n$ ; calculons la probabilité de cette configuration en tant que trajectoire de la chaîne de Markov décrite :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\sigma(1), \dots, \sigma(n)] &= \mathbb{P}[\sigma(1)]P(\sigma(1), \sigma(2))P(\sigma(2), \sigma(3)) \cdots P(\sigma(n-1), \sigma(n)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(2 \cosh \beta)^{n-1}} e^{\beta(\sigma(1)\sigma(2) + \sigma(2)\sigma(3) + \cdots + \sigma(n-1)\sigma(n))} \end{aligned}$$

en utilisant la remarque précédente. La probabilité prend bien la forme de la formule (2) avec  $\alpha = 0$ , et ceci démontre la proposition 1, avec pour valeur de la fonction de partition  $Z_n(0, \beta) = 2(2 \cosh \beta)^{n-1}$ .

On en déduit un programme qui calcule en temps linéaire une configuration de taille  $n$  sous la loi  $\mathbb{P}_{0, \beta}$  :

**Configuration(n, beta) :**

**res** = liste vide

**etat** = tirage d'une variable de Bernoulli de parametre 1/2

adjoindre **etat** a **res**

pour **i** entre 2 et **n**:

**mult** = tirage d'une variable de Bernoulli de  
parametre  $\exp(\mathbf{beta}) / (2 \cosh(\mathbf{beta}))$

**etat** = **etat**\***mult**

adjoindre **etat** a **res**

retourner la liste **res**

(Par variable de Bernoulli de paramètre  $p$ , on entend ici une variable qui prend les valeurs  $\pm 1$  avec probabilité  $p$  pour la valeur  $+1$ .)

4. La matrice de transfert a la propriété suivante :  $T(x, y) = e^{\alpha y + \beta xy}$  pour tous signes  $x, y$ . Le poids d'une configuration  $\sigma$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned} Z_n(\alpha, \beta) \mathbb{P}_{\alpha, \beta}[\sigma] &= e^{\alpha \sum_{i=1}^n \sigma(i) + \beta \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(i)\sigma(i+1)} \\ &= e^{\alpha \sigma(1)} \prod_{i=1}^n e^{\alpha \sigma(i+1) + \beta \sigma(i)\sigma(i+1)} \\ &= V_{\sigma(1)} T_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots T_{\sigma(n-1)\sigma(n)}. \end{aligned}$$

La somme sur toutes les configurations de ces quantités est

$$Z_n(\alpha, \beta) = (VT^{n-1})_{+1} + (VT^{n-1})_{-1} = VT^{n-1}W.$$

Les valeurs propres de  $T$  sont les racines de  $(X - e^{\alpha+\beta})(X - e^{-\alpha+\beta}) - e^{-2\beta} = 0$ , il s'agit donc de

$$\lambda_{\pm} = e^\beta \cosh \alpha \pm \sqrt{e^{2\beta} \cosh^2 \alpha - 2 \sinh 2\beta} = e^\beta \cosh \alpha \pm \sqrt{e^{2\beta} \sinh^2 \alpha + e^{-2\beta}},$$

en utilisant  $\cosh^2 \alpha = \sinh^2 \alpha + 1$  pour la seconde égalité. Comme elles sont distinctes,  $T$  est diagonalisable et il existe une matrice inversible  $P$  telle que

$$Z_n(\alpha, \beta) = VP \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}^{n-1} P^{-1}W.$$

Ceci prouve que  $Z_n(\alpha, \beta)$  est une combinaison linéaire de  $(\lambda_+)^{n-1}$  et de  $(\lambda_-)^{n-1}$ . Pour identifier les coefficients de cette combinaison, on écrit

$$\begin{aligned} Z_1(\alpha, \beta) &= e^\alpha + e^{-\alpha} = a_+ + a_-; \\ Z_2(\alpha, \beta) &= e^{2\alpha+\beta} + e^{-2\alpha+\beta} + 2e^{-\beta} = a_+\lambda_+ + a_-\lambda_-. \end{aligned}$$

La résolution du système donne bien les valeurs de  $a_+$  et  $a_-$  :

$$a_\pm = \cosh \alpha \pm \frac{e^\beta \sinh^2 \alpha + e^{-\beta}}{\sqrt{e^{2\beta} \sinh^2 \alpha + e^{-2\beta}}}.$$

La connaissance de la fonction de partition et donc des probabilités de chaque configuration ne fournit pas d'algorithme efficace de construction de configuration aléatoire, car il faudrait pour cela calculer *a priori* toutes les probabilités des  $2^n$  configurations, ce qui est très long.

5. L'espérance sous  $\mathbb{P}_{\alpha, \beta}$  de  $e^{tM_n}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\alpha, \beta}[e^{tM_n}] &= \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^E} e^{t \sum_{i=1}^n \sigma(i)} \mathbb{P}_{\alpha, \beta}[\sigma] \\ &= \frac{1}{Z_n(\alpha, \beta)} \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^E} e^{t \sum_{i=1}^n \sigma(i)} e^{\alpha \sum_{i=1}^n \sigma(i) + \beta \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(i)\sigma(i+1)} \\ &= \frac{Z_n(\alpha + t, \beta)}{Z_n(\alpha, \beta)}. \end{aligned}$$

Cette fonction de  $t$  est une combinaison linéaire finie de fonctions  $t \mapsto e^{ct}$ , elle est donc clairement infiniment dérivable. Sa dérivée s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbb{E}_{\alpha, \beta}[e^{tM_n}]}{\partial t} = \sum_{\sigma} \mathbb{P}_{\alpha, \beta}[\sigma] \frac{\partial (e^{tM(\sigma)})}{\partial t} = \sum_{\sigma} \mathbb{P}_{\alpha, \beta}[\sigma] e^{tM(\sigma)} M_n(\sigma)$$

où la somme porte sur les configurations de taille  $n$ . En particulier, pour  $t = 0$ ,

$$\left. \frac{\partial \mathbb{E}_{\alpha, \beta}[e^{tM_n}]}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{\sigma} \mathbb{P}_{\alpha, \beta}[\sigma] M(\sigma) = \mathbb{E}_{\alpha, \beta}[M_n].$$

Le terme de gauche de cette expression est aussi

$$\frac{1}{Z_n(\alpha, \beta)} \frac{\partial Z_n(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \frac{\partial (\log Z_n)(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}.$$

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \log Z_n(\alpha, \beta) &= (n-1) \log \lambda_+ + \log a_+ + \log \left( 1 + \frac{a_- \lambda_-^{n-1}}{a_+ \lambda_+^{n-1}} \right) \\ \mathbb{E}_{\alpha, \beta}[M_n] &= (n-1) \frac{1}{\lambda_+} \frac{\partial \lambda_+(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} + \frac{1}{a_+} \frac{\partial a_+(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \left( \log \left( 1 + \frac{a_- \lambda_-^{n-1}}{a_+ \lambda_+^{n-1}} \right) \right)}{\partial \alpha}(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Le terme  $\log \left( 1 + a_- \lambda_-^{n-1} / a_+ \lambda_+^{n-1} \right)$  tend exponentiellement vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini, et pour  $(\alpha, \beta)$  restant dans une partie compacte, on voit facilement que c'est aussi le cas de ses dérivées. De même, le terme  $\frac{1}{a_+} \frac{\partial a_+(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}$  reste un  $O(1)$  lorsque  $(\alpha, \beta)$

reste dans une partie compacte. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\alpha,\beta}[M_n] &= (n-1) \frac{e^\beta \sinh \alpha + \frac{e^{2\beta} \cosh \alpha \sinh \alpha}{\sqrt{e^{2\beta} \sinh^2 \alpha + e^{-2\beta}}}}{e^\beta \cosh \alpha + \sqrt{e^{2\beta} \sinh^2 \alpha + e^{-2\beta}}} + O(1) \\ &= n \frac{e^\beta \sinh \alpha}{\sqrt{e^{2\beta} \sinh^2 \alpha + e^{-2\beta}}} + O(1)\end{aligned}$$

Lorsque  $\beta = 0$ , c'est-à-dire que les interactions entre les spins sont nulles, on obtient une magnétisation moyenne par électron de  $\frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha} = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}}$ , ce qui est logique pour des variables de Bernoulli  $\pm 1$  de paramètre  $\frac{e^\alpha}{e^\alpha + e^{-\alpha}}$ . Lorsque  $\alpha = 0$ , on obtient une magnétisation moyenne nulle, ce qui découle aussi dans cette situation de la symétrie du système.

6. Pour illustrer le théorème central limite, on peut au minimum dresser un histogramme des magnétisations sur un grand nombre  $N$  de configurations aléatoires :

**Histogramme(N, n, alpha, beta) :**

```

res = liste vide
m = exp(beta)*sinh(alpha)/
      sqrt(exp(2*beta)*(sinh(alpha))^2 + exp(-2*beta))
var = exp(-beta)*cosh(alpha)/
      (exp(2*beta)*(sinh(alpha))^2 + exp(-2*beta))^(3/2)
pour i entre 1 et N:
  conf = Configuration(n,alpha,beta)
  magnet = somme(conf)
  adjoindre (magnet - n*m)/sqrt(n*var) a res
retourner un histogramme des valeurs de res

```

Un autre programme utile est un estimateur de la variance de la magnétisation, ce qui permet de tester la formule du théorème 4. On s'attend à une variance proche de la valeur

$$\frac{n e^{-\beta} \cosh \alpha}{(e^{2\beta} \sinh^2 \alpha + e^{-2\beta})^{3/2}}.$$

On peut utiliser l'estimateur sans biais

$$\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (M^{(i)} - \bar{M})^2,$$

où les  $M^{(i)}$  sont les magnétisations de  $N$  tirages indépendants de configurations, et  $\bar{M} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N M^{(i)}$  est leur moyenne empirique. Ainsi :

**EstimateurVariance(N, n, alpha, beta) :**

```

res = liste vide
var = exp(-beta)*cosh(alpha)/
      (exp(2*beta)*(sinh(alpha))^2 + exp(-2*beta))^(3/2)
pour i entre 1 et N:
  conf = Configuration(n,alpha,beta)
  adjoindre somme(conf) a res
moyenne = somme(res)/N
estimateur = 0
pour i entre 1 et N:

```

ajouter (res[i]-moyenne)^2/(N-1) a estimateur  
afficher estimateur/n et var

permet de comparer la valeur théorique et une valeur empirique de la variance.

Pour la preuve du théorème 4, détaillons le calcul de  $\log \mathbb{E}_{\alpha,\beta}[e^{z \frac{M_n - n\bar{m}}{\sqrt{n}}}]$ , avec  $z$  variable complexe. Pour éviter les singularités du logarithme complexe, il est préférable d'évaluer directement  $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}[e^{z \frac{M_n - n\bar{m}}{\sqrt{n}}}]$ , qui est une fonction bien définie et entière en tant que combinaison linéaire de fonctions  $z \mapsto e^{cz}$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\alpha,\beta} \left[ e^{z \frac{M_n - n\bar{m}}{\sqrt{n}}} \right] &= F_n \left( \frac{z}{\sqrt{n}}, \alpha, \beta \right) \exp \left( -z\sqrt{n} \frac{e^\beta \sinh \alpha}{\sqrt{e^{2\beta} \sinh^2 \alpha + e^{-2\beta}}} \right) \\ &= Z_n \left( \frac{z}{\sqrt{n}} + \alpha, \beta \right) Z_n(\alpha, \beta)^{-1} \exp \left( -z\sqrt{n} \frac{e^\beta \sinh \alpha}{\sqrt{e^{2\beta} \sinh^2 \alpha + e^{-2\beta}}} \right). \end{aligned}$$

Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  étant fixés, la fonction de partition  $Z_n(\alpha, \beta)$  a pour développement asymptotique

$$Z_n(\alpha, \beta) = a_+(\alpha, \beta)(\lambda_+(\alpha, \beta))^{n-1}(1 + o(1)).$$

Si l'on remplace  $\alpha$  par  $\alpha + \frac{z}{\sqrt{n}}$  avec  $z$  variable complexe fixée, les expressions de  $a_+, \lambda_+, a_-, \lambda_-$  avec des racines carrées restent bien définies pour  $n$  assez grand (on reste proche de l'axe réel  $\mathbb{R}_+^*$ , autour duquel la fonction racine se prolonge de façon holomorphe). L'estimée précédente reste donc vraie avec un  $o(1)$  uniforme pour  $z$  dans une partie compacte de  $\mathbb{C}$  :

$$\begin{aligned} Z_n \left( \alpha + \frac{z}{\sqrt{n}}, \beta \right) &= a_+ \left( \alpha + \frac{z}{\sqrt{n}}, \beta \right) \left( \lambda_+ \left( \alpha + \frac{z}{\sqrt{n}}, \beta \right) \right)^{n-1} (1 + o(1)) \\ &= a_+(\alpha, \beta) \left( \lambda_+ \left( \alpha + \frac{z}{\sqrt{n}}, \beta \right) \right)^n (1 + o(1)) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\alpha,\beta} \left[ e^{z \frac{M_n - n\bar{m}}{\sqrt{n}}} \right] &= \left( \frac{\lambda_+(\alpha + \frac{z}{\sqrt{n}}, \beta)}{\lambda_+(\alpha, \beta)} \right)^n \exp \left( -z\sqrt{n} \frac{e^\beta \sinh \alpha}{\sqrt{e^{2\beta} \sinh^2 \alpha + e^{-2\beta}}} \right) (1 + o(1)) \\ &= \left( \frac{\lambda_+(\alpha + \frac{z}{\sqrt{n}}, \beta)}{\lambda_+(\alpha, \beta)} \exp \left( -\frac{z}{\sqrt{n}} \frac{e^\beta \sinh \alpha}{\sqrt{e^{2\beta} \sinh^2 \alpha + e^{-2\beta}}} \right) \right)^n (1 + o(1)) \end{aligned}$$

avec un reste uniforme sur les parties compactes de  $\mathbb{C}$ . On écrit alors le développement de Taylor à l'ordre 2 en  $\frac{z}{\sqrt{n}}$  du terme qui est élevé à la puissance  $n$ . On obtient après calcul

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\alpha,\beta} \left[ e^{z \frac{M_n - n\bar{m}}{\sqrt{n}}} \right] &= \left( 1 + \frac{e^{-\beta} \cosh \alpha}{(e^{2\beta} \sinh^2 \alpha + e^{-2\beta})^{3/2}} \frac{z^2}{2n} + o\left(\frac{z^2}{n}\right) \right)^n (1 + o(1)) \\ &= \exp \left( \frac{e^{-\beta} \cosh \alpha}{(e^{2\beta} \sinh^2 \alpha + e^{-2\beta})^{3/2}} \frac{z^2}{2} \right) (1 + o(1)), \end{aligned}$$

cette expression asymptotique étant toujours valable pour  $z$  variable complexe,  $n$  assez grand et avec un reste uniforme sur les parties compactes du plan complexe. En particulier, on peut poser  $z = it$ , et on reconnaît alors la fonction caractéristique d'une

variable gaussienne. Le critère de Lévy permet de conclure quand à la convergence en loi de  $\frac{M_n - n\bar{m}}{\sqrt{n}}$  vers une variable gaussienne.

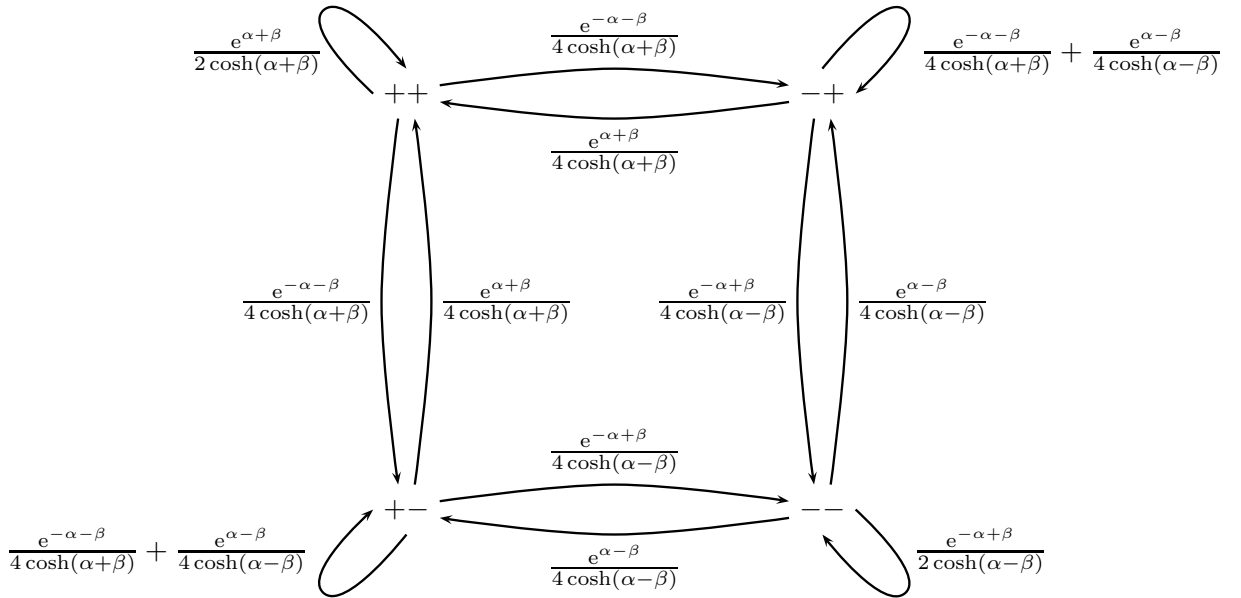
7. La loi de  $\sigma^{(k+1)}$  conditionnellement à  $(\sigma^{(0)}, \dots, \sigma^{(k)})$  est

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\sigma^{(k+1)} = \tau | \sigma^{(0)}, \dots, \sigma^{(k)}] &= \mathbb{P}[F_{e_k, u_k}(\sigma^{(k)}) = \tau | \sigma^{(0)}, \dots, \sigma^{(k)}] \\ &= \frac{1}{\text{card } E} \sum_{e \in E} p_{e, \sigma^{(k)}} \mathbb{1}_{(\tau(e)=+1, \tau(e')=\sigma^{(k)}(e'))} + (1 - p_{e, \sigma^{(k)}}) \mathbb{1}_{(\tau(e)=-1, \tau(e')=\sigma^{(k)}(e'))} \end{aligned}$$

en utilisant l'indépendance de  $(e_k, u_k)$  par rapport à la tribu engendrée par les configurations  $\sigma^{(0)}, \dots, \sigma^{(k)}$ , et où

$$p_{e, \sigma^{(k)}} = \frac{e^{\alpha + \beta(P(e, \sigma^{(k)}) - N(e, \sigma^{(k)}))}}{2 \cosh(\alpha + \beta(P(e, \sigma^{(k)}) - N(e, \sigma^{(k)})))}.$$

On obtient bien une fonction  $P(\sigma^{(k)}, \tau)$  qui ne dépend que des états  $\sigma^{(k)}$  et  $\tau$ , donc une chaîne de Markov. Lorsque  $E = \llbracket 1, 2 \rrbracket$ , le graphe des transitions de cette chaîne est :



Il est clair sur le graphe que la chaîne est irréductible et apériodique (il y a à chaque fois une probabilité non nulle de rester sur la même configuration); et ceci reste vrai pour tout ensemble d'états  $E \subset \mathbb{Z}^d$ . La réversibilité de la mesure d'Ising  $\mathbb{P}_{\alpha, \beta}$  pour cette chaîne de Markov découle des arguments du texte : avec  $\sigma$  et  $\sigma'$  voisins dans le graphe de la chaîne de Markov, c'est-à-dire ne différant qu'en un site  $e$ , on sépare dans  $\mathbb{P}_{\alpha, \beta}[\sigma] P(\sigma, \sigma')$  les termes dépendant du site  $e$  et les autres termes, qui seront les mêmes dans  $\mathbb{P}_{\alpha, \beta}[\sigma'] P(\sigma', \sigma)$  car  $\sigma$  et  $\sigma'$  ne diffèrent qu'au niveau du site  $e$ . Supposant par exemple  $\sigma(e) = +1$  et  $\sigma'(e) = -1$ , les termes dépendant de  $e$  dans  $\mathbb{P}_{\alpha, \beta}$  sont

$$e^{\alpha \sigma(e) + \beta \sum_{e' \sim e} \sigma(e) \sigma(e')} = e^{\alpha + \beta(P(e, \sigma) - N(e, \sigma))},$$

et  $P(\sigma, \sigma') = \frac{e^{-\alpha - \beta(P(e, \sigma) - N(e, \sigma))}}{2 \cosh(\alpha + \beta(P(e, \sigma) - N(e, \sigma)))}$ . Ainsi,

$$\mathbb{P}_{\alpha, \beta}[\sigma] P(\sigma, \sigma') = \frac{1}{2 \cosh(\alpha + \beta(P(e, \sigma) - N(e, \sigma)))} \times \text{termes ne dépendant pas de } e,$$

et symétriquement,

$$\mathbb{P}_{\alpha,\beta}[\sigma'] P(\sigma', \sigma) = \frac{1}{2 \cosh(\alpha + \beta(P(e, \sigma') - N(e, \sigma')))} \times \text{termes ne dépendant pas de } e.$$

Comme  $P(e, \sigma) = P(e, \sigma')$  et  $N(e, \sigma) = N(e, \sigma')$ , la réversibilité est bien démontrée. Par suite, la mesure d'Ising est invariante par la chaîne de Markov, car

$$(\mathbb{P} \times P)(\sigma) = \sum_{\sigma'} \mathbb{P}[\sigma'] P(\sigma', \sigma) = \sum_{\sigma'} \mathbb{P}[\sigma] P(\sigma, \sigma') = \mathbb{P}[\sigma] \left( \sum_{\sigma'} P(\sigma, \sigma') \right) = \mathbb{P}[\sigma].$$

On a donc une chaîne de Markov irréductible apériodique qui admet une mesure de probabilité invariante, donc qui est récurrente positive. Les deux théorèmes ergodiques assurent alors que :

(a) La loi de la configuration  $\sigma^{(n)}$  de la chaîne de Markov tend vers la loi d'Ising :

$$\forall \sigma \in \{\pm 1\}^E, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\sigma^{(n)} = \sigma] = \mathbb{P}_{\alpha,\beta}[\sigma].$$

(b) Les lois empiriques de la chaîne de Markov convergent également vers la loi d'Ising, au sens presque sûr :

$$\forall \sigma \in \{\pm 1\}^E, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\sigma^{(i)} = \sigma} = \mathbb{P}_{\alpha,\beta}[\sigma].$$

8. D'après la question précédente, pour simuler une configuration sous la loi d'Ising, on peut utiliser la chaîne de Markov et regarder un état  $\sigma^{(k)}$  avec  $k$  grand. En pratique, sur un domaine carré de taille  $n \times n$ , on s'attend à ce que la configuration aient une probabilité proche de la loi d'Ising après que les sites ont tous été tirés par les variables aléatoires  $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ ; c'est le cas si  $k \gtrsim n^2 \log n^2$ . D'autre part, on peut prendre pour configuration initiale n'importe quelle configuration; un choix possible est de partir d'une configuration aléatoire où chaque site suit une loi de Bernoulli indépendante des autres et de paramètre  $1/2$ . On a séparé le programme en les composantes suivantes :

**% creation de la configuration initiale**

**ConfigurationInitiale(n):**

**M** = matrice de taille **n\*n**

**pour i** de **1** a **n**:

**pour j** de **1** a **n**:

**M[i,j]** = tirage d'une variable de Bernoulli de parametre  $1/2$

**retourner M**

**% calcul du nombre de voisins positifs et negatifs d'un site**

**% dans une configuration (attention aux effets de bords !)**

**VoisinPositif(M,e):**

**i,j** = coordonnees de **e**

**n** = taille de **M**

**res** = **0**

**si i** > **1** et **M[i-1,j]** = **1**:

**augmenter res** de **1**

**si i** < **n** et **M[i+1,j]** = **1**:

**augmenter res** de **1**

```

si j > 1 et M[i,j-1] = 1:
    augmenter res de 1
si j < n and M[i,j+1] = 1:
    augmenter res de 1
retourner res

```

```

VoisinNegatif(M,e):
    retourner VoisinPositif(-M,e)

```

```

% transition de la chaine de Markov associee a un site e et a une quantite u
% (on effectue les transitions sur la matrice en place)

```

```

Transition(M,e,u,alpha,beta):
    i,j = coordonnees de e
    P = VoisinPositif(M,e)
    N = VoisinNegatif(M,e)
    t = alpha + beta*(P-N)
    si u < exp(t)/(2*cosh(t)):
        M[i,j] = 1
    sinon:
        M[i,j] = -1

```

```

%Configuration aleatoire apres k etapes de la chaine de Markov

```

```

ConfigurationMarkov(k,n,alpha,beta):
    res = ConfigurationInitiale(n)
    pour i entre 1 et k:
        x = tirage d'un entier uniformement entre 1 et n
        y = tirage d'un entier uniformement entre 1 et n
        e = (x,y)
        u = tirage d'une variable uniforme sur [0,1]
        Transition(res,e,u,alpha,beta)
    retourner res

```

```

%Configuration aleatoire sous une loi tres proche de la loi d'Ising

```

```

Ising(n,alpha,beta):
    retourner ConfigurationMarkov(3*(n2)*log(n),n,alpha,beta)

```