Université Paris-Sud — 2009-2010
S1 IFIPS — Compléments maths

Feuille d'exercices n^0 2,

Exercice 1 *1. Représenter graphiquement les ensembles*

$A_1 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ x+y<1\right\}$, $A_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ x+y>-1\}$,
$A_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ |x+y|<1\}$, $A_4 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ |x|+|y|<1\}$,
$A_5 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ |x-y|<1\}$.

2. *En déduire une démonstration géométrique de l'équivalence*

$$(|x+y|<1 \text{ et } |x-y|<1) \Leftrightarrow |x|+|y|<1.$$

(On montrera l'égalité de deux ensembles en détaillant chacune des deux inclusions).

3. *On rappelle que l'*inégalité triangulaire *s'énonce*

$$(\forall a \in \mathbf{R})\,(\forall b \in \mathbf{R})\,(|a+b| \leq |a|+|b|).$$

Montrez l'équivalence précédente en utilisant l'inégalité triangulaire.

Exercice 2 *On pose* $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ |\ y > x^2-1\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ |\ y < 1-x^2\}$.

1. *Représenter graphiquement* A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A \cap B}$ *et* $\overline{A \cup B}$. *Ecrire chacun de ces ensembles sous la forme* $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ |\ \ldots\}$.
2. *Soient* A *et* B *deux parties d'un ensemble quelconque* E. *Exprimer les ensembles* $\overline{A \cap B}$ *et* $\overline{A \cup B}$ *à l'aide de* $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$ *et prouver les égalités données.*

Exercice 3 *1. Représenter graphiquement l'ensemble* F *des couples* $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ *tels que*

$$x^2+y^2 \leq 9 \text{ et } (x+y>3 \text{ ou } xy<2).$$

2. *Exprimer l'ensemble* F *sous la forme* $F = A \cap (B \cup C)$ *où* A, B *et* C *sont trois ensembles que l'on définira à partir des données de la question 1. Vérifier graphiquement que* F *s'exprime également à partir de* $A \cap B$ *et* $A \cap C$.
3. *Soient* A, B *et* C *trois sous-ensembles d'un ensemble* E *quelconque. Montrer que*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Exercice 4 *Soient* $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x<1\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y<1\}$ *et* $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x+y>0\}$.

1. *Soit* Q *l'ensemble des points de* A *qui ne sont pas dans* B *ou pas dans* C. *Dessiner* Q. *Ecrire* Q *comme la différence de deux ensembles.*
2. *Dessiner les ensembles* $R = A \setminus B$ *et* $S = A \setminus C$. *Quelle est leur réunion ?*
3. *Plus généralement, montrer que si* A, B *et* C *sont trois sous-ensembles d'un ensemble* E, *alors* $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Exercice 5 *Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point.*

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Big[-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\Big[, \quad I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Big]0, \frac{1}{n}\Big[, \quad I_3 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Big[n, +\infty\Big[, \quad I_4 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Big[\frac{1}{n}, +\infty\Big[.$$

Exercice 6 *On définit deux applications sur* $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ *par* $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ *et* $g : x \mapsto 1 - x$.

1. *Vérifier que* f *et* g *envoient* $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ *dans lui-même.*

2. *Calculer les composées* $f \circ g$ *et* $g \circ f$. *Que constate-t-on ?*

Exercice 7 *On considère l'application* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *définie pour tout* $x \in \mathbf{R}$ *par* $f(x) = x^2$.

Déterminer, par une méthode graphique, les ensembles suivants :

$f([-5, -2])$, $\quad f([-1, 3])$, $\quad f([-5, -2] \cup [-1, 3])$ $\quad$ *et* $\quad f([-5, -2] \cap [-1, 3])$.

Exercice 8 *Soit* $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *une application. Soient* $a, b \in \mathbf{R}$ *tels que* $a < b$, *et* $I = [a, b]$. *L'image* $g(I)$ *est-elle un intervalle de* $\mathbf{R}$ *? Si* $g(I)$ *est un intervalle, est-il nécessairement borné ? Fermé ? Donner des contre-exemples.*

Exercice 9 *Soit* E *l'ensemble des entiers naturels strictement supérieurs à 1. Soit* $f : E \to E$ *l'application qui à un entier naturel* $n > 1$ *associe le plus petit diviseur positif de* n *autre que 1.*

1. *Soit* $A = \{2, 3, \ldots, 10\}$. *Déterminer l'image de* A *par* f.

2. *Déterminer l'image réciproque par* f *de l'ensemble* $\{3\}$.

Exercice 10 *Soit* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *la fonction définie sur* $\mathbf{R}$ *par* $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. *Soient* $A = [0, 1[$, $B =]1/2, 1]$, $C = [1, 2]$, $D =]1, 3]$. *Par une méthode graphique, déterminer les images réciproques* $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$, $f^{-1}(C)$, $f^{-1}(D)$, $f^{-1}(A \cap B)$, $f^{-1}(A \cup B)$. *Comparer à* $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Exercice 11

1. *Soit* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = x^2$. *Soit* $A = [1, +\infty[$, $B = [-2, 0]$, $G = [0, 1]$. *Par une méthode graphique, déterminer* $H = f(B)$, $K = H \setminus G$, $C = f^{-1}(K)$, $D = A \cap C$. *Vérifier que pour tout* $x \in D$ *il existe* $x' \in B$ *tel que* $f(x') = f(x) \notin G$.

2. *Soient* E *et* F *des ensembles,* $f : E \to F$ *une application,* $A \subset E$, $B \subset E$, $G \subset F$. *Vérifier que l'ensemble des éléments de* A *dont l'image par* f *n'est pas dans* G *et coïncide avec celle d'un élément de* B *est* $A \cap f^{-1}(f(B) \setminus G)$.

Exercice 12 *Soit* $E = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$. *L'application* $f : E \to E$ *définie par* $f(z) = z^2$ *est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

Exercice 13 *Une maison d'édition exploite une base de données contenant les noms et années de naissance de ses auteurs, les titres et les années de parution des livres. On note A l'ensemble des auteurs, L l'ensemble des livres. On note Y l'ensemble des entiers compris entre 1901 et 2000 et Z l'ensemble des entiers compris entre 1945 et 2005. On note $n : A \to Y$ la fonction qui à un auteur associe son année de naissance, et $p : L \to Z$ la fonction qui à un livre associe son année de parution. On note $B \subset A \times L$ l'ensemble des couples* (auteur,ouvrage de cet auteur). *On suppose que chaque livre n'a qu'un auteur.*

1. *Que signifie le fait que l'application $p : L \to Z$ n'est pas surjective ? Répondre en langage courant, puis par une formule mathématique. Si la maison d'édition a 30 livres, p est-elle surjective ?*

2. *Que signifie le fait que l'application $c : B \to Y \times Z$ définie par $c(a, l) = (n(a), p(l))$ n'est pas injective ? Répondre en langage courant, puis par une formule mathématique. Si la maison d'édition a 10000 livres, c est-elle injective ?*

3. *Décrire par une formule l'ensemble C des livres dont l'auteur est né en 1955 ou plus tôt.*

4. *On note Z' l'ensemble des entiers compris entre 1995 et 2005. Soit $F = p^{-1}(Z')$ et G la différence $G = C \setminus F$. Décrire G en langage courant et par une formule.*

5. *On note Y' l'ensemble des entiers compris entre 1901 et 1955. On pose $D = n^{-1}(Y')$. Décrire D en langage courant et par une formule. L'ensemble C est-il contenu dans D ?*

Exercice 14 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications. Montrer que*

$$(g \circ f \text{ surjective}) \Rightarrow (g \text{ surjective}).$$

Exercice 15 *Soient f et g deux fonctions définies dans une partie E de $\mathbf{R}$.*

1. *Montrer que si f et g sont croissantes sur E, alors la fonction somme $f + g$ est croissante sur E.*

2. *Montrer que si f et g sont positives et croissantes sur E, alors la fonction produit fg est croissante sur E.*

3. *On suppose que $f \circ g$ est définie sur E. Montrer que si f et g sont toutes deux croissantes ou bien toutes deux décroissantes sur E, alors $f \circ g$ est croissante sur E.*

4. *Etudier la monotonie (en utilisant la monotonie des fonctions logarithme et exponentielle et sans utiliser une variation de fonction) de la fonction $h : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définie par :*

$$h(x) = (\ln(e + x^2) - 1)e^{(2\sqrt{x}+3)}.$$

Soit a un nombre réel, $a > 0$, la fonction h est-elle bornée sur l'intervalle $[0, a]$?