Questions pour le test 2

Théorème des accroissements finis, inégalités, problèmes d'extrema
A préparer pour la semaine du 2 novembre

Pour chaque affirmation suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1.— Si a, b, c et d sont quatre réels, $a \neq 0$, la fonction $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ n'admet ni maximum absolu ni minimum absolu sur $\mathbb{R}$.

2.— Si a, b, c et d sont quatre réels, $a \neq 0$, la fonction $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ admet un minimum relatif et un maximum relatif sur $\mathbb{R}$.

3.— La fonction f définie par $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x - 1$ admet un minimum relatif entre -1 et 1.

4.— La fonction $x \to \frac{4}{5}x^5 + 2x^3 - 4x + 1$ admet deux extréma locaux en des réels x_0 et $-x_0$ avec $x_0 \neq 0$

5.— Toutes les fonctions périodiques continues sont bornées.

6.— Pour tous réels x et y compris entre -1 et 1, on a

$$|x^{2010} - y^{2010}| \leq 2010|x - y|.$$

7.— Pour tout entier naturel strictement positif on a

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

8.— Si $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ on a

$$S_{n+1} - 1 < \ln(n+1) < S_n.$$

9.— Si $0 < x < y$ on a

$$\frac{y}{x} - \ln \frac{y}{x} \geq 1.$$

10.—

$$\frac{1}{2\sqrt{10001}} < \sqrt{10001} - 100 < \frac{1}{200}.$$

11.— Si $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ on a

$$(\sin x)(y - x) < \cos x - \cos y < (\sin y)(y - x).$$

12.— Si $1 < a < b$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{\ln a}{\ln b} = e^{\frac{a-b}{c \ln(c)}}$.

TSVP

13.— Une primitive sur $]1,+\infty[$de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ est la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$.

14.— Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=|x|-1$.
Comme $f(1)=f(-1)=0$ il existe un réel c dans $]-1,1[$ tel que $f'(c)=0$.

15.— Pour tout réel x on a

$$|e^x-1|<|xe^x|$$

16.— Soit f une fonction dérivable sur $[-2,3]$ tel que $f'(1)=0$, alors f admet un extrémum local en 1.

17.— Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x et y ,

$$|f(x)-f(y)| \leq \sin^2(x-y).$$

Alors f est une fonction constante.

18.— Une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ tend vers plus l'infini en plus l'infini.

19.— Une fonction strictement croissante définie sur un intervalle I n'admet pas d'extréma locaux.

20.—

$$\int x\sin(x)dx=-x\cos(x)+\sin(x).$$

21.—

$$\int x^2e^{2x}dx=\frac{1}{4}e^{2x}(2x^2-2x+1).$$

22.— Il existe un réel M strictement positif, tel que pour tout réel x et y vérifiant
$-1<x<0<y<1$ on ait

$$|x^5-y^5|<M|x-y|^3.$$

Il y a 14 affirmations vraies et 8 affirmations fausses
