Questions pour le test 1

Limites, continuité, dérivabilité
A préparer pour la semaine du 12 octobre

Pour chaque affirmation suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1.— La fonction $f : [-2, +2] \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

est définie correctement.

2.— La formule $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ peut servir à définir une fonction sur tout l'intervalle $]0, +\infty[$.

3.— Si f est définie au voisinage de 1, $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} f(x) = 3$ et si (u_n) est une suite convergente vers 0, alors $f(u_n^2 + 1)$ converge vers 3.

4.— Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $x \leq f(x) \leq e^x$, alors f admet une limite en 0.

5.— Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x}{|x|}$, alors $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \cos(f(x))$ existe.

6.— On a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{3 \ln^2 x + 2x}{e^x + (1 + \ln x)^2} = 3$$

7.— Soit H la fonction définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \frac{1}{2} \cos^2 x$ alors $H \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

8.— Si f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

9.— La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = (e^{\sin x} - 1) \ln\left(3 + \cos \frac{1}{x}\right)$ se prolonge par continuité en 0.

10.— On peut trouver une fonction f continue sur l'intervalle $I = [2, 3]$ qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $\frac{5}{2}$

TSVP

11.— La formule $f(x) = \frac{\ln(x^2-16x-17)}{x^2-30x+200}$ définit une fonction continue sur l'intervalle $]20, 100[$.

12.— La fonction $f : x \in [0,1] \mapsto x^2 - x + \frac{1}{8}$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[0,1]$ car $f(0).f(1) > 0$.

13.— On peut trouver une fonction f continue sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$ telle que $f(I) = \mathbb{R}$.

14.— Soit f la fonction définie pour $x \in [1,2]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq \sqrt{2} \\ -1 & \text{si} \quad x < \sqrt{2} \end{cases}$$

La méthode de recherche de solutions de l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie appliquée à f sur l'intervalle I produit deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) dont la limite commune est $\sqrt{2}$.

15.— Soit f une fonction dérivable à droite et à gauche en $x = 3$ alors f est dérivable en 3.

16.— La fonction qui à x associe $f(x) = |x - \pi| \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

17.— Si f est dérivable en x_0, alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + 3h) - f(x_0 + h)}{h} = 2f'(x_0)$$

18.— Soit f la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} |x + \pi| & \text{si} \quad x \geq 0 \\ |x - \pi| & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sin(f(x))$ est continue dérivable en 0.

19.— On a, pour x voisin de 0 :

$$e^{\sin(2x)} = 1 + 3x + x\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0.$$

20.— Soit f une fonction dérivable sur $[-2, 3]$ tel que $f'(1) = 0$, alors f admet un extremum local en 1.

Il y a 11 affirmations vraies et 9 affirmations fausses
