Feuille d'exercices 2

Dérivées–Théorème des accroissements finis

Les exercices avec $\star$ sont facultatifs. On ne traitera pas toutes les questions dans les exercices composés de plusieurs questions similaires.

Exercice 1.—Calculer les dérivées des fonctions suivantes de la variable réelle x en précisant pour quelles valeurs de x votre calcul est valable :

$$a^{\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}}, a > 0$$

$$\ln \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

$$\sqrt[3]{2+(x\sin x)^2}$$

Exercice 2.— Calculer les dérivées des fonctions (on donnera les domaines de définition) :

$$f(x) = \sqrt{1+(x\cos x)^2}, \qquad g(x) = \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)+1}{\exp\left(\frac{1}{x}\right)-1},$$

$$h(x) = \ln(\tan x), \qquad k(x) = \frac{x^4}{(1+x)^4}.$$

Exercice 3.—Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, non dérivable en 0, mais que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Exercice 4.— Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = x|x|, \quad g(x) = \frac{x^2}{1+|x|}, \quad h(x) = \frac{1}{1+|x|}.$$

$$j(x) = \frac{cos(x)}{sin^2(x)}, k(x) = \frac{1}{1+sin(x)}, l(x) = \frac{x}{2+cos(x)}$$

Exercice 5.— La fonction $x \mapsto \cos|x|$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 6.— Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x^2 - x & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$. Donner une formule pour sa dérivée.
2. Quelle est la limite de $f'(x)$ lorsque $x \to 1$? La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 7.— Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction f soit dérivable en 0. On donne

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+x+a & \text{si} \quad x\geq 0 \\ bx+2 & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

Exercice 8.—Donner le domaine de définition, prolonger par continuité en 0, puis étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$g(x)=\sin\sqrt{x}$$

Exercice 9.— Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x^2-3x+6}{x-1}$. Montrer que le graphe de f admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y=-3x$.

Exercice 10.— Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
a) Calculer la dérivée de $x\mapsto \sin(f(x)^2)$ et $x\mapsto \sin(f(x^2))$.
b) On suppose que $f(x)\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $x\mapsto \ln(|f(x)|)$.

Exercice 11.— Étudier la fonction $f : x\mapsto x^5-5x+1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5-5x+1=0$ a trois solutions réelles.

Exercice 12.— **1.** Montrer que l'on a $x\cos x-\sin x<0$ si $x\in]0,\pi[$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction $x\mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ sur l'intervalle $]0,\pi]$.
3. Démontrer que pour tout $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$ on a $\frac{2x}{\pi}<\sin x<x$.

Exercice 13.— Montrer que le rectangle d'aire maximale à périmètre fixé est le carré. Que vaut son aire en fonction du périmètre ?

Exercice 14.— Trouver les dimensions d'un cylindre (une boite de conserve !) de surface minimale pour un volume fixé.

Exercice 15.— **1.** Calculer la dérivée de $x\mapsto (x^2+1)\sin x$.
2. Montrer que l'équation $(x^2+1)\cos x+2x\sin x=0$ admet au moins une solution dans $[0,\pi]$.

Exercice 16.— Soit f la fonction définie par $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$. Démontrer, sans grands calculs, que l'équation $f'(x)=0$ d'inconnue réelle x admet exactement trois solutions.

Exercice 17.— Montrer les inégalités suivantes
1. Pour tous réels a et b, $|\sin a-\sin b|\leq |a-b|$
2. Pour tous réels x et h, $|\cos(x+h)-\cos x|\leq |h|$
3. Pour tout réel x, $|e^{2x}-e^x|\leq |x|e^{2|x|}$

Exercice 18.— En utilisant le théorème des accroissements finis et en distinguant éventuellement les cas $x>0$ et $x<0$ démontrer que
1. pour tout réel x on a $e^x\geq 1+x$;
2. pour tout $x>-1$ on a $\ln(1+x)\leq x$.

Exercice 19.—Soit f une fonction continue strictement positive sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ $(a<b)$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ telle que

$$\frac{f(a)}{f(b)}=e^{\frac{(a-b)f'(c)}{f(c)}}.$$

Exercice 20.—**1.** A l'aide du théorème des acroissements finis montrer que pour tout $x>0$,

$$\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}.$$

2. Calculer $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\ln(x+1)-\ln x)$ et $\lim_{x\to+\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$.
3. En deduire que $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.
4. Calculer $\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x})^x$.

Exercice 21.—Montrer que $f(x) = x^3$ n'a pas d'extremum local.

Exercice 22.—Déterminer les extrema locaux des fonctions définies par les formules suivantes ainsi que les intervalles de croissance et de décroissance (i.e. construisez les tableaux de variations de ces fonctions)

a. $x^{4/3} + 4x^{1/3}$, **b.**$x^{2/3}(x-7)^2 + 2$, **c.** $x^2\sqrt[3]{x^2-4}$
d. $8 - \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}$, **e.** $\frac{x^2}{\sqrt{x+7}}$, **f.**$x^2(x-5)^4$

Exercice 23.—Déterminer les extrema locaux des fonctions définies par les formules suivantes ainsi que les intervalles de croissance et de décroissance (i.e. construisez les tableaux de variations de ces fonctions)

a. $\cos x + \sin x$, **b.**$\cos x - \sin x$
c.$\frac{1}{2}x - \sin x$, **d.** $x + 2\cos x$

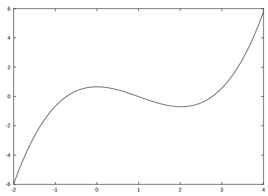
Exercice 24.-$\star$- Introduction à la convexité.
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non trivial et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur I. On suppose que f', la dérivée de f est croissante sur I.

1. Montrer que si $x, y, z \in I$, $x < y < z$ alors $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$.
Indication :Sur un schéma, indiquer les cordes au graphe de f dont les deux quantités précédentes sont les coefficients directeurs
2. Soient $x, z \in I$, montrer qu'un nombre y est strictement entre x et z si et seulement si il existe $t \in]0,1[$ tel que $y = t.x + (1-t).z$. En déduire que pour tout $t \in]0,1[$,

$$f(t.x + (1-t).z) \leq t.f(x) + (1-t).f(z).$$

3. Interpréter géométriquement cette inégalité en termes de position du graphe de f par rapport à l'une quelconque de ses cordes.

La fonction représentée schématiquement par le graphe ci-contre relève-t-elle du contexte de cet exercice ?



4. Montrer, en se servant des question précédentes les inégalités suivantes.
(i) Pour tous $x, y > 0$, tout $p \geq 1$, $(x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p)$
(ii) Montrer que pour tous $x, y > 0$, tout $0 < t < 1$, $x^{1-t}.y^t \leq (1-t).x + t.y$. Vérifier que pour $t = \frac{1}{2}$, cette inégalité peut se démontrer directement à l'aide d'une identité remarquable bien connue.
(iii) Montrer que la fonction $f(x) = x\ln(x)$ définie sur $I =]0, +\infty[$ a une dérivée croissante. Quelle inégalité obtient-on alors naturellement ?

Dérivées multiples

Exercice 25.— Calculer les fonctions dérivées d'ordre n des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sin^2 x, \quad , h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

Exercice 26.— **[Formule de Leibniz]** Soient u, v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, suffisamment dérivables pour que les formules aient un sens. Montrer par récurrence que :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

En déduire les dérivées d'ordre n des fonctions suivantes :

$$x \longmapsto x^2 e^x, \quad x \longmapsto x^2(1+x)^3, \quad x \longmapsto x^5 \ln x, \quad x \longmapsto \frac{x^2+x+1}{(x+2)^2}.$$