Université de Paris XI — **Ifips – CP1 S1 – Math1**
Mathématiques — **1er semestre 2009–2010**

Feuille d'exercices 1

Fonctions – Limites – Continuité – T.V.I.

Les exercices avec $\star$ sont facultatifs. On ne traitera pas toutes les questions dans les exercices composés de plusieurs questions similaires.

Exercice 1.— Résoudre les équations suivantes et discuter, s'il y a lieu, en fonction des valeurs des paramètres.

(a.) $x^2+x+1=0$, $x\in\mathbb{R}$ (b.) $x^2+x+1=0$, $x\in\mathbb{C}$ (c.) $x^2+x+1=0$, x de la forme $a+bi\,, a,b\in\mathbb{Q}$
(d.) $x^2+2\lambda x+\lambda=0\,, x\in\mathbb{R}$, λ un paramètre réel (e.) $x^2+2\lambda x+\lambda=0\,, \lambda\in\mathbb{R}$, x un paramètre réel
(f.) $x^2y^2+2xy-1=0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ (g.) $x^2y^2+2xy-1=0$, $x\in\mathbb{R}$, y un paramètre réel

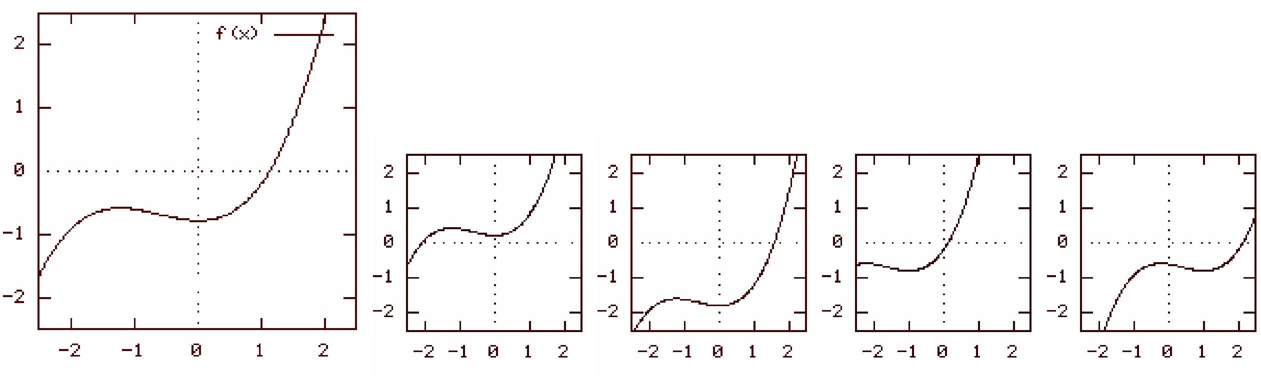
Exercice 2.— Résoudre les (in)équations suivantes et discuter, s'il y a lieu, en fonction des valeurs des paramètres.

(a.) $\sin x=\frac{1}{2}$, $x\in[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]$ (b.) $\sin x=\frac{1}{2}$, $x\in[0,\pi]$ (c.) $\sin x=\frac{1}{2}$, $x\in\mathbb{R}$
(d.) $\cos x=\frac{1}{2}$, $x\in[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]$ (e.) $\cos x=\frac{1}{2}$, $x\in[0,\pi]$ (f.) $\cos x=\frac{1}{2}$, $x\in\mathbb{R}$
(g.) $\cos x+\sin x=\lambda$, $x\in\mathbb{R}$, λ un paramètre réel (h.) $\cos x+2\sin x=\lambda$, $x\in\mathbb{R}$, λ un paramètre réel
(i.) $\sin x-\cos x>0$, $x\in[0,2\pi]$ (j.) $\sin x-\cos x>0$, $x\in[-\pi,\pi]$
(k.) $\sin x-\cos x>0$, $x\in\mathbb{R}$

Exercice 3.— Résoudre les (systèmes) d'(in)équations suivantes et représenter graphiquement leurs solutions.

(a.) $x-y=3$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ (b.) $2x+y=3$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ (c.) $x-y=-2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$
(d.) $x-y=3$ et $2x+y=3$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ (e.) $x-y=3$ et $x-y=-2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$
(f.) $x-y<3$ et $2x+y>3$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ (g.) $x-y<3$ et $x-y\geq-2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$
(h.) $x-y>3$ et $x-y<-2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ (i.) $x-y<3$ et $x-y\geq-2$ et $2x+y>3$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$
(j.) $(x-y-3)(x-y+2)(2x+y-3)\geq 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Exercice 4.— (Extrait de l'exercice "Fonctions Graphiques" de WIMS.) Le premier dessin représente le graphe d'une fonction f. Parmi les quatre dessins suivants, lequel représente la fonction $x\mapsto f(x)-1$?



Même question pour les fonctions $x\mapsto f(x)+1$, $x\mapsto f(x+1)$, $x\mapsto f(x-1)$.

Exercice 5.— Soit a et b deux réels, et f la fonction donnée par $f(x) = ax + b$. On travaille dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Quelle est l'équation du graphe de f ? De quelle sorte de courbe s'agit-il ?
2. Déterminer l'equation de l'image de cette courbe par la symétrie d'axe Ox, puis par la symétrie d'axe Oy, et enfin par la symétrie de centre O.
3. Pour chacune des courbes obtenues, donner une fonction dont elle est le graphe. Pouvez-vous exprimer ces fonctions à l'aide de f ?
4. Déterminer l'équation de l'image du graphe de f par la symétrie d'axe $y = x$. A quelle condition la courbe obtenue est-elle le graphe d'une fonction ?

Exercice 6.— Déterminer le domaine de définition naturel des fonctions définies par les formules suivantes

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}, \qquad g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 5}, \qquad h(x) = \ln(4x + 3).$$

Exercice 7.— Pour chacune des formules suivantes, décrire le domaine D de définition naturel de la fonction définie par cette formule. Détailler les compositions et opérations algébriques en jeu pour affirmer la continuité de la fonction sur le domaine D.

1. $f(x) = \sqrt{x^3 - 3}$
2. $g(x) = \ln\{(x-1)^2(x+2)^4\}$
3. $h(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - 2)$

Exercice 8.— On se donne trois fonctions réelles de variable réelle, f, g et h. On ne dispose que des informations suivantes

1. Le domaine de définition de f est $]-2, 2[$, f s'annule en -1,0,1, elle est strictement négative sur $]0, 1[$ et strictement positive sur les autres points,
2. Le domaine de définition de g est $[0, 3]$, g s'annule en 0,1, 2, elle est strictement positive en dehors de ces points.
3. Le domaine de définition de h est $]-1, 1]$, h est positive sur son ensemble de définition.

Déterminer les domaines de définitions de

1. $f + g$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $f.g.h$ définie par $(f.g.h)(x) = f(x).g(x).h(x)$
3. $\ln(f.g)$, $\ln(f.g.h)$, $\ln(g + h)$
4. $\sqrt{f.g}$, $\sqrt{g+h}$.

Exercice 9.— Etudier les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x}, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 10.— On suppose connu seulement le fait que $\frac{\sin x}{x} \to 1$ lorsque $x \to 0$.

1. Déterminer la limite de $\frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$ lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$.
2. Déterminer la limite de $\frac{\tan x}{x}$ lorsque $x \to 0$
3. En utilisant la formule de duplication du cosinus montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Exercice 11.— Déterminer les limites des fonctions suivantes au(x) point(s) indiqué(s)

1. $\frac{2x^3-3x^2+1}{-4x^3+3x+1}$ en $+\infty$, en $x_0 = 1$.
2. $(3x^4 - 2x^2)e^{-x}$ en $+\infty$
3. $(3x^2 - 2x)e^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty$
4. $(3x^2 - 2x)e^{-2\ln x}$ en $+\infty$
5. $\frac{2x+3}{3x^4+2}e^{x}$ en $+\infty$
6. $\frac{2x+3}{3x^4+2}e^{\ln x}$ en $+\infty$
7. $\sqrt{x}\ln(x^2 + 2x)$ en $x_0 = 0$, en $+\infty$
8. $\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(x^2 + 2x)$ en $x_0 = 0$, en $+\infty$

Exercice 12.— Dans cet exercice les fonctions notées ϵ sont définies (au moins) dans un certain voisinage de 0 et ont pour limite 0 en 0.

1. Déterminer les domaines de définition, resp D_a, D_b des fractions rationnelles suivantes
$$\textbf{a. } a(x) = \frac{2x+4}{x^2+x-2} \quad \textbf{b. } b(x) = \frac{x-1}{x^4+2x^2+1}$$
2. Justifier l'existence de deux fonctions ϵ_1 et ϵ_2 telles que pour tout x dans D_a
$$a(x) = \frac{2}{3} + \epsilon_1(x-4) \text{ et } a(x) = -\frac{2}{5} + \epsilon_2(x+4)$$
Ces fonctions ϵ's sont-elles égales ?.
3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence d'une fonction ϵ_{x_0} telle que pour tout h dans $\mathbb{R}$, $b(x_0+h) = \frac{x_0-1}{x_0^4+2x_0^2+1}+\epsilon(h)$. Donner une formule pour la fonction ϵ_{x_0}.

Exercice 13.-$\star$- Soit f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules
$$f(x) = \frac{1}{2}(x+|x|) \text{ et } g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
Donner une formule pour $f \circ g$, une pour $g \circ f$. Sur quels ensembles ces fonctions sont-elles continues ?

Exercice 14.— Peut-on prolonger par continuité à tout $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^*$:
$$f_1 : x \mapsto 2x + \frac{\sqrt{9x^2}}{x}, \quad f_2 : x \mapsto \sin(x)\log(|x|), \quad f_3 : x \mapsto \frac{e^x}{x}, \quad f_4 : x \mapsto \frac{(1+x^3)-1}{x}.$$

Exercice 15.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par
$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 0, \\ 2+x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue ?
2. Donner l'image par f de chacun des intervalles suivants : $[-2,-1]$, $[0,+\infty[$, $[-1,1]$.

Exercice 16.— Donner un exemple de fonction f (éventuellement par son graphe) continue sur $[0,1]$, telle que $f(0)f(1) < 0$ et telle que l'équation $f(x) = 0$ ait

1. une racine et une seule en $x = \frac{1}{2}$.
2. exactement deux racines distinctes.
3. une infinité de racines.

Exercice 17.— Montrer que les équations suivantes ont au moins une racine dans l'intervalle I indiqué :

1. $x^7 - x^2 + 1 = 0$ sur $I = [-2, 0]$.
2. $\sqrt[3]{x^3 + 6x + 1} - 3x = 2$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $\tan x = \dfrac{3}{2}x$ sur $I =]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}[$.

On pourra donner une valeur approchée de l'une de ces racines en utilisant la méthode de la dichotomie (à l'aide du moyen de calcul de son choix !).

Exercice 18.—

1. Montrer que l'équation $\cos x = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une solution dans l'intervalle $[0, 1]$.

2. Montrer que plus généralement, si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est une fonction continue alors l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet au moins une solution.

3. * Donner des exemples de fonctions f comme dans le point précédent telles que
   (i) l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet exactement une solution.
   (ii) l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet exactement deux solutions.
   (iii) l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet une infinité de solutions.

Exercice 19.— Montrer que l'équation $\sin x = \frac{x}{x+1}$ d'inconnue $x \in [0, +\infty[$ admet une infinité de solutions.
Indication: Introduire la fonction différence entre les deux membres de l'égalité et tester ses valeurs aux points de la forme $2k\pi$ et $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 20.— Pour un entier naturel $n \geq 2$, on considère la fonction polynomiale définie par

$$p_n(x) = x^n - n.x + n - 2$$

1. Montrer que l'équation $p_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet une unique solution que l'on note α_n.
2. Quel est le signe de $p_{n+1}(\alpha_n)$?. La suite (α_n) est-elle monotone ?
3. A quelle condition naturelle sur $\beta > 0$ peut-on affirmer que pour tous les entiers n à partir d'un certain rang, $1 - \frac{\beta}{n} \leq \alpha_n \leq 1$. Quelle est la limite de (α_n) ?
4. A quelle condition naturelle sur $\beta > 0$ peut-on affirmer qu'à partir d'un certain rang, $\alpha_n \leq 1 - \frac{\beta}{n}$?
Indication : il pourra être utile d'étudier le signe de la fonction $\beta \mapsto e^{-\beta} + \beta - 2$
5. Quelle est la limite de $(n.(1 - \alpha_n))$?

Exercice 21.-⋆- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit

$$p_n(x) = x^3 - 3nx + n$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_n a trois racines α_n, β_n et γ_n telles que $\alpha_n < -\sqrt{n}$, $\frac{1}{3} \leq \beta_n \leq 1$, $\gamma_n > \sqrt{n}$.
2. Montrer que $p_{n+1}(\beta_n) < 0$. En déduire que $\beta_n > \beta_{n+1}$.
3. Montrer que la suite $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. Soit c la limite de la suite $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $c = 1/3$.

Exercice 22.-⋆- On considère un cycliste qui parcourt 90km en 4 heures.

1. Est-il raisonnable de considérer que la fonction d donnant la distance parcourue jusqu'à un instant t est continue ?
2. Montrer qu'il existe un intervalle de deux heures pendant son trajet durant lequel il a parcouru exactement 45km.
3. Montrer que si 3 points sont dans un intervalle I, alors leur moyenne est aussi dans I. Qu'en est-il pour 4 points ?, pour n points ?
4. Montrer qu'il existe un intervalle de 80mn pendant le trajet du cycliste durant lequel il a parcouru exactement 30km.
5. Généralisation ?