Contrôle 2

29 novembre 2007

Documents écrits, électroniques, calculatrices et téléphones portables interdits.
-Barème indicatif-
Les exercises sont indépendants.

Exercice 1 (Question de cours, 4 pts $= 2+2$)**.**

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]-1,1[$. Montrer comment déduire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 de f à partir de la formule de Taylor-Langrange.
2. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction définie sur l'intervalle $]-1,1[$ par
$$f(x) = e^{\sin(\ln(x+1))}$$
en utilisant Taylor-Young.

Exercice 2 (4 pts $= 2+2$)**.** On considère les fonctions $f, g :]-1,1[\to \mathbf{R}$ définies par
$$f(x) = x^2\sqrt{1+x} \qquad g(x) = x(e^x - 1)$$

1. Calculer les développements limités de f à l'ordre 4 en 0 de f et g.
2. En déduire la valeur de
$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - f(x)}{(\ln(1+x))^4}$$

Exercice 3 (4 pts $= 2+2$)**.** Soit $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ? Montrer que f se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable en 0.
2. Déterminer la tangente en 0 au graphe de f et la position du graphe par rapport à cette tangente.

Exercice 4 (5 pts $= 3+2$)**.** Soient a, b des naturels, plus précisément on suppose $a \in \mathbf{N}^*$ et $b \in \mathbf{N}$. On pose
$$I(a,b) = \int_0^1 x^a(1-x)^b dx$$

1. Montrer que $I(a,b) = \frac{a}{1+b} I(a-1, b+1)$. En déduire que
$$I(a,b) = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}$$
(Indication : Se rappeler de la méthode utilisée pour les formules de Wallis).
2. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2} \sin^{2a+1} x \cos^{2b+1} x\, dx$.

Exercice 5 (3 pts $= 2+1$)**.**

1. Indiquer le domaine de définition de la fonction $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ et démontrer qu'elle est injective si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Calculer f^{-1} (on suppose $ad - bc \neq 0$, bien entendu).

2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction injective et dérivable avec $f'(x) = (1+x^3)^{-\frac{1}{2}}$. Démontrer que $g = f^{-1}$ satisfait
$$g''(x) = \frac{3g(x)^2}{2}$$

Exercice 6 (HORS BAREME = Bonus)**.** Soit $a \in \mathbf{R}$ fixé et $u(t) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Calculer les dérivés des fonctions suivantes en un point arbitraire x.

1. $g(x) = \int_a^x x\, u(t)dt$ (Indication : la réponse *n'est pas* $x\, u(x)$).
2. $h(x) = \int_a^{\int_a^{x^3} \frac{1}{1+\sin^2 t}dt} \frac{1}{1+\sin^2 t} dt$.

Université Paris-Sud 2007-2008
IFIPS S1-Math2

Contrôle 2

Corrigé

Exercice 1.

1. Si $x \in]-1,1[$ la formule de Taylor-Young appliquée à la fonction f entre 0 et x (ce qui est possible grâce au fait que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle ouvert contenant 0 et x) nous donne

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2!}f''(c_x) \quad \text{pour } c_x \text{ entre 0 et } x$$

Si on ajoute un zéro conveniant, on obtient

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2!}f''(0) + \frac{1}{2!}(f''(c_x) - f''(0))$$

On pose $\epsilon(x) = \frac{1}{2}(f''(c_x) - f''(0))$. Or, lorsque $x \to 0$ on a $c_x \to 0$ d'après le théorème des gendermes et puisque f'' est continue en 0, on a que $\epsilon(x)$ tend vers 0. Et donc

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2!}f''(0) + \frac{1}{2!}(\epsilon(x))$$

2. On a que f est de classe $\mathcal{C}^2$ car est la composée de 3 fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,\infty[$. Donc on a

$$f(x) = e^{\sin(\ln(x+1))} \qquad f'(x) = \frac{e^{\sin(\ln(x+1))}\cos(\ln(x+1))}{x+1} \quad \text{et}$$

$$f''(x) = -\frac{e^{\sin(\ln(x+1))}\cos(\ln(x+1))}{(x+1)^2} - \frac{e^{\sin(\ln(x+1))}\sin(\ln(x+1))}{(x+1)^2} + \frac{e^{\sin(\ln(x+1))}\cos^2(\ln(x+1))}{(x+1)^2}$$

Lorsque on évalue en 0 on a

$$f(0) = 1 \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0$$

Donc le DL de f à l'ordre 2 est juste

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2\epsilon(x)$$

Exercice 2.

1. D'après la définition de f, pour obtenir le DL de f à l'ordre 4 au voisinage de 0, de calculer celui de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2. Pour cette fonction on a

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

D'où $f(x) = x^2\sqrt{x+1} = x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$.
De même, dans le cas de $g(x)$ il suffit de connaître le DL de e^x à l'ordre 3.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

Et donc le DL de $g(x)$ est

$$g(x) = x(e^x - 1) = x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

2. Le DL de $g(x) - f(x)$ à l'ordre 4 est

$$g(x) - f(x) = x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - (x^2\sqrt{x+1} = x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{8}) = \frac{7x^4}{24} + o(x^4)$$

D'ailleurs on sait que $\ln(x+1) \sim x$ en 0 (puisque la limite $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$) $(\ln(1+x))^4 \sim x^4$ en 0. D'où la valeur de la limite est

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-f(x)}{(\ln(1+x))^4} = \frac{7}{24}$$

Exercice 3.

1. On a $D_f = \mathbf{R}\backslash\{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$. D'ailleurs,

$$f(x) = \frac{x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x\sin^2 x} = \frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x\sin^2 x}$$

en utilisant un développement limité pour f

$$f(x) = \frac{\left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + x^6\epsilon(x)\right)\left(2x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6\epsilon(x)\right)}{x^3 - \frac{x^5}{3} + x^6\epsilon(x)}$$

puisque le DL de $\sin^2(x)$ est $x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + x^6\epsilon(x)$. Lorsque on développe le produit dans le numérateur on trouve

$$f(x) = \frac{\frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45} + x^6\epsilon(x)}{x^3 - \frac{x^5}{3} + x^6\epsilon(x)} = \frac{\frac{x}{3} - \frac{2x^3}{45} + x^3\epsilon(x)}{1 - \frac{x^2}{3} + x^3\epsilon(x)}$$

par conséquent $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et donc on peut prolonger cette fonction par continuité et la définir comme $f(0) = 0$. Vérifions que cette fonction est dérivable en zéro.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{3} - \frac{2x^3}{45} + x^3\epsilon(x)}{x - \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3} - \frac{2x^2}{45} + x^2\epsilon(x)}{1 - \frac{x^2}{3} + x^2\epsilon(x)} = \frac{1}{3}$$

Donc on a montré que f est dérivable en 0.

2. L'équation de la tangente est

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{1}{3}x$$

et on va considérer le signe de la différence $f(x) - y = \frac{x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x$ à droite et à gauche du zéro. On a

$$f(x) - \frac{1}{3}x = \frac{\frac{x}{3} - \frac{2x^3}{45} + x^3\epsilon(x)}{1 - \frac{x^2}{3} + x^3\epsilon(x)} - \frac{1}{3}x = \left(\frac{x}{3} - \frac{2x^3}{45} + x^3\epsilon(x)\right)\left(1 + \frac{x^2}{3} + x^3\epsilon(x)\right) - \frac{1}{3}x$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{x^3}{15} + x^3\epsilon(x) - \frac{1}{3}x = \frac{x^3}{15} + x^3\epsilon(x)$$

Donc on ne considère que le terme $\frac{x^3}{15}$ pour x assez proche de zéro. Par conséquent lorsque x est suffisamment voisin de 0, cette différence est

(a) Négative si $x < 0$,

(b) Positive si $x > 0$.

Ceci signifie que le graphe est, au voisinage de 0

(a) *sous* sa tangente en 0 à gauche de 0,

(b) *au-dessus* de sa tangente en 0 à droite de 0.

Alors la tangent en 0 traverse le graphe en 0.

Exercice 4.

1. On va faire une intégration en parties. Pour cela on pose

$$u(x) = x^a \Rightarrow u'(x) = ax^{a-1}, \qquad v(x) = -\frac{(1-x)^{b+1}}{b+1} \Rightarrow v'(x) = (1-x)^b$$

Avec ces notations $I(a,b) = \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx$ et donc

$$I(a,b) = \left(-\frac{x^a(1-x)^{b+1}}{b+1}\right) + \frac{a}{b+1}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b+1}\,dx$$

D'où $I(a,b) = \frac{a}{b+1}(I(a-1,b+1))$.
D'après le résultat précédant on a pour k tel que $0 \le k \le a-1$ que

$$I(a-k,b+k) = \frac{a-k}{b+k+1} I(a-k-1,b+k+1)$$

Il suffit juste de remplacer a par $a-k$ et b par $b+k$ dans la relation obtenue plı
Si on fait les produit des égalités pour toutes les valeurs de k on trouve

$$\prod_{k=0}^{a-1} I(a-k,b+k) = \left(\prod_{k=0}^{a-1}\frac{a-k}{b+k+1}\right)\left(\prod_{k=0}^{a-1} I(a-k-1,b+k+1)\right)$$

Ce qui après une simplification nous donne

$$I(a,b) = \left(\prod_{k=0}^{a-1}\frac{a-k}{b+k+1}\right) I(0,a+b)$$

Mais

$$I(0,a+b) = \int_0^1 (1-x)^{a+b}\,dx = \left[-\frac{(1-x)^{a+b+1}}{a+b+1}\right]_0^1 = \frac{1}{a+b+c}$$

Donc

$$I(a,b) = \frac{1}{a+b+1}\frac{\prod_{k=0}^{a-1}(a-k)}{\prod_{k=0}^{a-1}(b+k+1)} = \frac{a!}{\prod_{k=0}^{a}(b+k+1)}$$

On remarque finalement que $\prod_{k=0}^{a}(b+k+1) = \frac{a+b+1}{b!}$, d'où

$$I(a,b) = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}$$

2. On effectue le changement de variable $u = \sin^2 x$ et donc $du = 2\sin x\cos x dx$ l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2a+1} x \cos^{2b+1} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2a} x \cos^{2b} x \sin x \cos x\,dx$$

lors du remplacement on obtient

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2a+1} x \cos^{2b+1} x\, dx = \int_0^1 \frac{1}{2} u^a (1-u)^b\, du = \frac{1}{2} I(a,b) = \frac{a!b!}{2(a+b+1)!}$$

Exercice 5.

1. $D_f = \mathbf{R}\backslash\{\frac{-d}{c}\}$. Si on a

$$\frac{ax_1+b}{cx_1+d} = \frac{ax_2+b}{cx_2+d}$$

ce qui implique

$$acx_1x_2 + bcx_2 + adx_1 + db = acx_1x_2 + adx_2 + bcx_1 + bd$$

$$adx_1 - bcx_1 = adx_2 - bcx_2$$

donc

$$(ad-bc)(x_1-x_2) = 0$$

Or si $ad - bc \neq 0$ alors $x_1 = x_2$ et donc f est injective. Réciproquement si $ad - bc = 0$, alors $f(x_1) = f(x_2)$ pour tous x_1, $x_2 \in D_f$. Si $y = f^{-1}(x)$, alors $x = f(y)$, c'est à dire

$$x = \frac{ay+b}{cy+b}$$

on en déduit

$$cxy - ay = b - dx$$

$$y(cx-a) = b - dx$$

donc

$$f^{-1}(x) = y = \frac{b-dx}{cx-a}$$

pour tout $x \neq \frac{a}{c}$.

2. On sait que

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Par conséquent

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = g'(x) = \frac{1}{(1+g(x)^3)^{-1/2}} = (1+g(x)^3)^{1/2}$$

et donc

$$g''(x) = \frac{3g(x)^2 g'(x)}{2(1+g(x)^3)^{1/2}} = \frac{3g(x)^2(1+g(x)^3)^{1/2}}{2(1+g(x)^3)^{1/2}} = \frac{3g(x)^2}{2}$$

Exercice 6.

1. On fait d'abord une manipulation assez currante pour les intégrales $g(x) = \int_a^x x\,u$
$x\int_a^x u(t)dt$. Soit $F(x) = \int_a^x u(t)dt$. De manière que $g(x) = xF(x)$ et donc

$$g'(x) = xF'(x) + F(x) = x\,u(x) + \int_a^x u(t)dt$$

2. Nous avons que

$$h(x) = \int_a^{\int_a^{x^3} \frac{1}{1+\sin^2 t}dt} \frac{1}{1+\sin^2 t}dt$$

Soit $F(x) = \int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}dt$ et $G(x) = x^3$. Donc $h(x) = F(F(G(x)))$. Par con
$h'(x) = F'(F(G(x)))F'(G(x))G'(x)$ et d'où

$$h'(x) = \frac{1}{1+\sin^2\left(\int_a^{x^3}\frac{1}{1+\sin^2 t}dt\right)} \frac{1}{1+\sin^2(x^3)} 3x^2$$