M2 Mathématiques de l'Aléatoire — Université Paris Sud

Calcul stochastique

Feuille d'exercices n°3
Martingales et théorème d'arrêt

Dans les exercices qui suivent, on se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration complète $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$.

Exercice 1.

Soit X un processus stochastique à accroissements indépendants par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$.

1. Rappeler pourquoi, si $X_t \in L^1$ pour tout $t \geq 0$, $M_t = X_t - \mathbb{E}[X_t]$ définit une martingale ;
2. Montrer que, si $X_t \in L^2$ pour tout $t \geq 0$, $N_t = M_t^2 - \mathbb{E}[M_t^2]$ définit une martingale ;
3. Montrer que, s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}[e^{\theta X_t}] < \infty$ pour tout $t \geq 0$,

$$Z_t = \frac{e^{\theta X_t}}{\mathbb{E}[e^{\theta X_t}]}$$

définit une martingale.

Exercice 2.

Soit M une $(\mathcal{F}_t)$-martingale bornée (il existe une constante $C > 0$ telle que $|M_t| \leq C$ pour tout $t \geq 0$).

1. Soient $r \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $s_0, s_1, \dots, s_n$ des réels tels que $r = s_0 < s_1 < \cdots < s_n$. Montrer que

$$\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n}(M_{s_i} - M_{s_{i-1}})^2|\mathcal{F}_r] \leq 4C^2.$$

2. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_p$. Montrer que

$$\mathbb{E}[\big(\sum_{i=1}^{p}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2\big)^2] \leq 48C^4.$$

Exercice 3.

Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien issu de 0 et soit T un temps d'arrêt intégrable. Montrer que $\mathbb{E}[B_T] = 0$ et $\mathbb{E}[B_T^2] = \mathbb{E}[T]$.

Exercice 4.

Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien réel issu de 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $T_x = \inf\{t \geq 0 : B_t = x\}$. On fixe deux réels a et b avec $a < 0 < b$, et on note $T = T_a \wedge T_b$.

1. Montrer que, pour tout $\lambda > 0$,

$$E[\exp(-\lambda T)] = \frac{\mathrm{ch}(\frac{b+a}{2}\sqrt{2\lambda})}{\mathrm{ch}(\frac{b-a}{2}\sqrt{2\lambda})}.$$

2. Montrer de même que, pour tout $\lambda > 0$,

$$E[\exp(-\lambda T)\,\mathbf{1}_{\{T=T_a\}}] = \frac{\mathrm{sh}(b\sqrt{2\lambda})}{\mathrm{sh}((b-a)\sqrt{2\lambda})}.$$

3. A l'aide de la question 2., retrouver l'expression de $P(T_a < T_b)$.

Exercice 5.

Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien issu de 0. Soit $a > 0$ et

$$\sigma_a = \inf\{t \geq 0 : B_t \leq t - a\}.$$

1. Montrer que σ_a est un temps d'arrêt et que $\sigma_a < \infty$ p.s.
2. En introduisant une martingale exponentielle arrêtée bien choisie, montrer que, pour tout $\lambda \geq 0$,
$$E[\exp(-\lambda\sigma_a)] = \exp(-a(\sqrt{1+2\lambda} - 1)).$$
On admettra que cette formule reste vraie pour $\lambda \in [-\frac{1}{2}, 0[$.
3. Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $M_t = \exp(\mu B_t - \frac{\mu^2}{2}t)$. Montrer que la martingale arrêtée $M_t^{\sigma_a} = M_{\sigma_a \wedge t}$ est fermée si et seulement si $\mu \leq 1$ (on remarquera d'abord que cette martingale est fermée si et seulement si $E[M_{\sigma_a}] = 1$).

Exercice 6.

1. Soit M une $(\mathcal{F}_t)$-martingale à trajectoires continues telle que $M_0 = x \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $M_t \geq 0$ pour tout $t \geq 0$ et que $M_t \to 0$ quand $t \to \infty$, p.s. Montrer que, pour tout $y > x$,
$$P\Big(\sup_{t \geq 0} M_t \geq y\Big) = \frac{x}{y}.$$
2. En déduire la loi de
$$\sup_{t \leq T_0} B_t$$
lorsque B est un mouvement brownien issu de $x > 0$ et $T_0 = \inf\{t \geq 0 : B_t = 0\}$.
3. Supposons maintenant que B est un mouvement brownien issu de 0, et soit $\mu > 0$. En introduisant une martingale exponentielle bien choisie, montrer que
$$\sup_{t \geq 0}(B_t - \mu t)$$
suit la loi exponentielle de paramètre 2μ.