Mouvement brownien et calcul stochastique

Partiel du 25 novembre 2022

2 heures 30, sans documents

Barème approximatif. Ex.1 : 5 pts, Ex.2 : 3 pts, Ex.3 : 5 pts, Ex.4 : 8 pts

Exercice 1. *Les questions* (2) *et* (3) *sont indépendantes de la question* (1). Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel issu de 0. Comme dans le cours, on note $S_t = \sup_{s\leq t} B_s$, pour tout $t \geq 0$.

(1) Pour tout réel $a \geq 0$, on pose $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$. Montrer que le processus $(T_a)_{a\geq 0}$ est à accroissements indépendants et stationnaires, au sens où, pour tous $0 \leq a \leq b$, la variable $T_b - T_a$ est indépendante de la tribu $\sigma(T_c, 0 \leq c \leq a)$ et a même loi que T_{b-a}.

(2) On pose $G = \sup\{s \in [0,1] : B_s = 0\}$. La variable G est-elle un temps d'arrêt de la filtration canonique de B ? On justifiera la réponse par un argument précis.

(3) Soit $t \in [0,1]$. Montrer à l'aide de la propriété de Markov simple que

$$P(G \geq t) = P(S'_{1-t} \geq |B_t|),$$

où la variable aléatoire S'_{1-t} a même loi que S_{1-t} mais est indépendante de B_t. En déduire que G a même loi que

$$\frac{N^2}{N^2 + N'^2}$$

où N et N' sont deux variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes.

Exercice 2. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel issu de 0, et $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$ la filtration canonique de $(B_t)_{t\geq 0}$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que le processus $M_t = f(B_t)$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$ si et seulement si la fonction f est affine (il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \alpha x + \beta$). *Indication: Appliquer le théorème d'arrêt.*

Dans les deux exercices suivants, on se place sur un espace de probabilité muni d'une filtration complète $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$.

Exercice 3. Pour chaque entier $n \geq 1$, soit $M^n = (M^n_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale issue de 0. On suppose dans tout l'exercice que

$$\lim_{n\to\infty} \langle M^n, M^n\rangle_\infty = 0$$

en probabilité.

(1) Soit $\varepsilon > 0$, et, pour tout $n \geq 1$, soit

$$T^n_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : \langle M^n, M^n\rangle_t \geq \varepsilon\}$$

avec la convention usuelle $\inf \varnothing = \infty$. Expliquer pourquoi T^n_ε est un temps d'arrêt, puis montrer que la martingale locale arrêtée

$$M^{n,\varepsilon}_t = M^n_{t\wedge T^n_\varepsilon} \ , \qquad \forall t \geq 0 \ ,$$

est une vraie martingale bornée dans L^2.

(2) Montrer que

$$E\Big[\sup_{t\geq 0}|M_t^{n,\varepsilon}|^2\Big] \leq 4\,\varepsilon.$$

(3) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{t\geq 0}|M_t^n|\Big) = 0$$

en probabilité.

Exercice 4 Soit M une (vraie) martingale à trajectoires continues telle que $M_0 = 0$. On suppose que $E[(M_t)^2] < \infty$ pour tout $t \geq 0$. On introduit le processus croissant $(M_t^*)_{t\geq 0}$ défini par

$$M_t^* = \sup\{|M_s| : s \leq t\}.$$

(1) Justifier le fait que, pour tout temps d'arrêt borné T, on a

$$E[(M_T)^2] = E[\langle M, M\rangle_T]\,, \qquad E[(M_T^*)^2] \leq 4\,E[\langle M, M\rangle_T].$$

(2) Soit $x > 0$, et soit T_x le temps d'arrêt défini par $T_x = \inf\{s \geq 0 : (M_s)^2 \geq x\}$ (avec la convention habituelle $\inf\varnothing = \infty$). Montrer que, pour tout temps d'arrêt borné T, on a

$$P((M_T^*)^2 \geq x) \leq \frac{1}{x}\,E[(M_{T_x\wedge T})^2] \leq \frac{1}{x}\,E[\langle M, M\rangle_T].$$

(3) Soit maintenant $S_x = \inf\{s \geq 0 : \langle M, M\rangle_s \geq x\}$, et soit $t \geq 0$ fixé. Montrer que

$$P((M_t^*)^2 \geq x) \leq \frac{1}{x}\,E[\langle M, M\rangle_{S_x\wedge t}] + P(\langle M, M\rangle_t \geq x).$$

(4) Déduire de la question précédente que

$$P((M_t^*)^2 \geq x) \leq \frac{1}{x}\,E[\langle M, M\rangle_t\,\mathbf{1}_{\{\langle M,M\rangle_t < x\}}] + 2\,P(\langle M, M\rangle_t \geq x).$$

(5) Soit $q \in]0,1[$. Montrer que

$$E[(M_t^*)^{2q}] \leq (2 + \frac{q}{1-q})\,E[\langle M, M\rangle_t^q],$$

puis que cette inégalité reste vraie si on suppose seulement que M est une martingale locale telle que $M_0 = 0$.

Corrigé.

Exercice 1. (1) Notons $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration canonique de B ($\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : 0 \leq s \leq t)$). Si $0 \leq c \leq a$, T_c est $\mathcal{F}_{T_c}$-mesurable donc aussi $\mathcal{F}_{T_a}$-mesurable puisque $T_c \leq T_a$ entraîne $\mathcal{F}_{T_c} \subset \mathcal{F}_{T_a}$. En conséquence $\sigma(T_c, 0 \leq c \leq a) \subset \mathcal{F}_{T_a}$.
Par ailleurs, la propriété de Markov forte montre que le processus $B_t^{(T_a)} = B_{T_a+t} - B_{T_a} = B_{T_a+t} - a$ est un mouvement brownien issu de 0 indépendant de $\mathcal{F}_{T_a}$. Si $a \leq b$, en remarquant que $T_b - T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t^{(T_a)} = b - a\}$, on obtient à la fois que $T_b - T_a$ a même loi que T_{b-a} et que $T_b - T_a$ est indépendant de $\mathcal{F}_{T_a}$ donc de $\sigma(T_c, 0 \leq c \leq a)$.

(2) G n'est pas un temps d'arrêt de la filtration $(\mathcal{F}_t)$. Pour le voir, remarquons d'abord que $G < 1$ p.s. puisque B_1 suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et donc $P(B_1 = 0) = 0$. Si G était un temps d'arêt, la propriété de Markov forte dirait que le processus $B_t^{(G)} = B_{G+t}$ est encore un mouvement brownien issu de 0, donc s'annule sur n'importe quel intervalle $]0, \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$, ce qui contredit le fait que, par définition de G, B ne s'annule pas sur $]G, 1]$. *Autre argument possible : si G était un temps d'arrêt, puisque G est borné (par 1), on pourrait appliquer le théorème d'arrêt à la martingale $B_t^2 - t$ au temps d'arrêt G, et trouver $E[G] = E[(B_G)^2] = 0$, ce qui est absurde puisqu'on sait que $G > 0$ p.s.*

(3) Pour $t \in]0,1[$ fixé, considérons le mouvement brownien B' issu de 0 défini par $B'_s = B_{t+s} - B_t$, qui est indépendant de $\mathcal{F}_t$ (propriété de Markov simple). Notons

$$I'_s = \inf\{B'_r : 0 \leq r \leq s\}\ , \quad S'_s = \sup\{B'_r : 0 \leq r \leq s\}.$$

On observe que, si $B_t > 0$, on a $G \geq t$ si et seulement si $I'_{1-t} \leq -B_t$. De même, si $B_t < 0$, on a $G \geq t$ si et seulement si $S'_{1-t} \geq -B_t$. Donc

$$P(G \geq t) = P(\{B_t > 0\} \cap \{I'_{1-t} \leq -B_t\}) + P(\{B_t < 0\} \cap \{S'_{1-t} \geq -B_t\}).$$

Mais puisque le mouvement brownien B' est indépendant de B_t et que B' a même loi que $-B'$, le couple $(B_t, -I'_{1-t})$ a même loi que le couple (B_t, S'_{1-t}), et donc

$$P(\{B_t > 0\} \cap \{I'_{1-t} \leq -B_t\}) = P(\{B_t > 0\} \cap \{S'_{1-t} \geq B_t\}).$$

On trouve en regroupant les deux cas que

$$P(G \geq t) = P(S'_{1-t} \geq |B_t|).$$

Si $t = 0$ ou $t = 1$ cette formule est immédiate aussi.
D'après le cours le couple (B_t, S'_{1-t}) a même loi que $(\sqrt{t}N, \sqrt{1-t}|N'|)$ où N et N' sont deux v.a. $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes. On trouve donc

$$P(G \geq t) = P(\sqrt{1-t}|N'| \geq \sqrt{t}|N|) = P((1-t)N'^2 \geq tN^2) = P\Big(\frac{N^2}{N^2 + N'^2} \geq t\Big)$$

d'où le résultat demandé.

Exercice 2. Supposons que $M_t = f(B_t)$ est une martingale. Soient $a < 0 < b$, et T le temps d'arrêt

$$T = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin]a, b[\}.$$

La martingale $M_{t\wedge T}$ est bornée par $\sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ et est donc uniformément intégrable, ce qui entraîne que $E[M_T] = E[M_0]$, c'est-à-dire $E[f(B_T)] = f(0)$. D'après le cours, on a

$$P(B_T = a) = \frac{b}{b-a}\ , \quad P(B_T = b) = \frac{-a}{b-a}.$$

L'égalité $E[f(B_T)] = f(0)$ conduit donc à

$$\frac{b}{b-a}\, f(a) + \frac{-a}{b-a}\, f(b) = f(0),$$

d'où

$$\frac{f(b)-f(0)}{b} = \frac{f(a)-f(0)}{a}.$$

Il en découle que la quantité $\frac{f(b)-f(0)}{b}$ ne dépend pas du choix de $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, ce qui veut exactement dire que f est affine.
Inversement il est immédiat que $f(B_t)$ est une martingale si f est affine.

Exercice 3. (1) T_ε^n est le temps d'entrée dans le fermé $[\varepsilon, \infty)$ par le processus adapté à trajectoires continues $\langle M^n, M^n\rangle$, et est donc un t.a. De plus, pour tout $t \geq 0$,

$$\langle M^{n,\varepsilon}, M^{n,\varepsilon}\rangle_t = \langle M^n, M^n\rangle_{t\wedge T_\varepsilon^n} \leq \varepsilon$$

donc $\langle M^{n,\varepsilon}, M^{n,\varepsilon}\rangle_\infty \leq \varepsilon$, en particulier $E[\langle M^{n,\varepsilon}, M^{n,\varepsilon}\rangle_\infty] < \infty$ ce qui assure que $M^{n,\varepsilon}$ est une vraie martingale bornée dans L^2. En conséquence, $|M_t^{n,\varepsilon}|^2 - \langle M^{n,\varepsilon}, M^{n,\varepsilon}\rangle_t$ est une vraie martingale issue de 0.

(2) D'après l'inégalité de Doob, pour tout $t \geq 0$,

$$E\Big[\sup_{0\leq s\leq t} |M_s^{n,\varepsilon}|^2\Big] \leq 4\, E[|M_t^{n,\varepsilon}|^2] = 4\, E[\langle M^{n,\varepsilon}, M^{n,\varepsilon}\rangle_t] \leq 4\varepsilon.$$

En faisant tendre $t \to \infty$, il vient $E[\sup_{s\geq 0} |M_s^{n,\varepsilon}|^2] \leq 4\,\varepsilon$.

(3) Soit $\eta > 0$. On veut montrer $P(\sup_{t\geq 0} |M_t^n| > \eta) \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$. On remarque d'abord que,

$$P[T_\varepsilon^n < \infty] \leq P[\langle M^n, M^n\rangle_\infty \geq \varepsilon] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par hypothèse. Ensuite,

$$P\Big(\sup_{s\geq 0} |M_s^n| > \eta\Big) \leq P(T_\varepsilon^n < \infty) + P\Big(\sup_{s\geq 0} |M_s^{n,\varepsilon}| > \eta\Big) \leq P(T_\varepsilon^n < \infty) + \frac{4\varepsilon}{\eta^2},$$

grâce à l'inégalité de Markov et la question 2. Il en découle que

$$\limsup_{n\to\infty} P\Big(\sup_{s\geq 0} |M_s^n| > \eta\Big) \leq \frac{4\varepsilon}{\eta^2},$$

et comme $\varepsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement petit, cela donne le résultat.

Exercice 4. (1) D'après le cours, si M une (vraie) martingale à trajectoires continues et de carré intégrable, telle que $M_0 = 0$, le processus $(M_t)^2 - \langle M, M\rangle_t$ est une vraie martingale, et on a aussi $E[\langle M, M\rangle_t] < \infty$ pour tout $t \geq 0$. En appliquant le théorème d'arrêt (cas borné) à la martingale $(M_t)^2 - \langle M, M\rangle_t$, on obtient immédiatement, pour tout t.a borné T,

$$E[(M_T)^2 - \langle M, M\rangle_T] = 0.$$

L'inégalité de Doob dans L^2, appliquée à la martingale arrêtée M^T, montre, pour tout $t \geq 0$,

$$E[(M_{t\wedge T}^*)^2] \leq 4\, E[(M_{t\wedge T})^2] = 4\, E[\langle M, M\rangle_{t\wedge T}]$$

la dernière égalité d'après la première partie de la question. Un argument de convergence monotone montre ensuite que $E[(M_{t\wedge T}^*)^2]$ converge vers $E[(M_T^*)^2]$ et $E[\langle M, M\rangle_{t\wedge T}]$ converge vers $E[\langle M, M\rangle_T]$ quand $t \uparrow \infty$, d'où le résultat demandé.

(2) La propriété $(M_T^*)^2 \geq x$ a lieu si et seulement si $T_x \leq T$, et alors on a $(M_{T_x \wedge T})^2 = (M_{T_x})^2 = x$. Donc,

$$P(M_T^* \geq x) = P(T_x \leq T) \leq P((M_{T_x \wedge T})^2 = x) \leq \frac{1}{x} E[(M_{T_x \wedge T})^2]$$

en utilisant l'inégalité de Markov. Ensuite, en utilisant la question (1),

$$E[(M_{T_x \wedge T})^2] = E[\langle M, M \rangle_{T_x \wedge T}] \leq E[\langle M, M \rangle_T].$$

(3) L'événement $\{(M_t^*)^2 \geq x\}$ est contenu dans la réunion de $\{(M_{S_x \wedge t}^*)^2 \geq x\}$ et de $\{S_x \leq t\}$ (simplement parce que si $S_x > t$ on a $M_{S_x \wedge t}^* = M_t^*$). En appliquant la question (2) au t.a. $T = S_x \wedge t$ on a

$$P((M_{S_x \wedge t}^*)^2 \geq x) \leq \frac{1}{x} E[\langle M, M \rangle_{S_x \wedge t}],$$

et par ailleurs les événements $\{S_x \leq t\}$ et $\{\langle M, M \rangle_t \geq x\}$ coïncident, donc

$$P(S_x \leq t) = P(\langle M, M \rangle_t \geq x).$$

En combinant ces deux majorations, on a

$$P((M_t^*)^2 \geq x) \leq P((M_{S_x \wedge t}^*)^2 \geq x) + P(S_x \leq t) \leq \frac{1}{x} E[\langle M, M \rangle_{S_x \wedge t}] + P(\langle M, M \rangle_t \geq x).$$

(4) En utilisant à nouveau le fait que $\{S_x \leq t\} = \{\langle M, M \rangle_t \geq x\}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} E[\langle M, M \rangle_{S_x \wedge t}] &= \frac{1}{x} E[\langle M, M \rangle_t \, \mathbf{1}_{\{S_x > t\}}] + \frac{1}{x} E[\langle M, M \rangle_{S_x} \, \mathbf{1}_{\{S_x \leq t\}}] \\
&= \frac{1}{x} E[\langle M, M \rangle_t \, \mathbf{1}_{\{\langle M, M \rangle_t < x\}}] + P(\langle M, M \rangle_t \geq x)
\end{aligned}$$

puisque $\langle M, M \rangle_{S_x} = x$ sur $\{S_x < \infty\}$. Il suffit ensuite de reporter cette majoration dans celle de la question (3).
(5) Le théorème de Fubini montre que

$$\begin{aligned}
E[(M_t^*)^{2q}] &= q \int_0^\infty P((M_t^*)^2 \geq x) \, x^{q-1} \, \mathrm{d}x \\
&\leq q \int_0^\infty \Big(\frac{1}{x} E[\langle M, M \rangle_t \, \mathbf{1}_{\{\langle M, M \rangle_t < x\}}] + 2 \, P(\langle M, M \rangle_t \geq x)\Big) x^{q-1} \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

et d'une part

$$2q \int_0^\infty P(\langle M, M \rangle_t \geq x) \, x^{q-1} \, \mathrm{d}x = 2 \, E[(\langle M, M \rangle_t)^q],$$

d'autre part,

$$q \int_0^\infty E[\langle M, M \rangle_t \, \mathbf{1}_{\{\langle M, M \rangle_t < x\}}] x^{q-2} \mathrm{d}x = qE\Big[\langle M, M \rangle_t \int_{\langle M, M \rangle_t}^\infty x^{q-2} \mathrm{d}x\Big] = \frac{q}{1-q} E[(\langle M, M \rangle_t)^q].$$

Si M est seulement une martingale locale issue de 0, il suffit d'appliquer le résultat obtenu à la (vraie) martingale bornée $M_{t \wedge T_n}$, où $T_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$, puis de faire tendre $n \to \infty$ en utilisant le théorème de convergence monotone.