RESUME DES TRAVAUX DE RECHERCHE

Jean-François Le Gall

(Juillet 2010)

Ce texte présente mes travaux de recherche autour des superprocessus et du serpent brownien, des arbres aléatoires et des processus de Lévy, ainsi que de leurs applications aux équations aux dérivées partielles, qui datent de la période 1990-2005. La partie 6 donne aussi une description détaillée de mes travaux récents, autour de la limite continue des grandes cartes planaires et de ses liens avec les arbres aléatoires continus. De plus, la première partie ci-dessous présente certains de mes travaux plus anciens sur les intersections de mouvements browniens et de marches aléatoires. Les références numérotées [1],[2], etc. renvoient à ma liste de publications à la fin de ce document.

1 Intersections de mouvements browniens et de marches aléatoires

1.1 Propriétés fines des points multiples browniens

Des articles classiques de Dvoretzky, Erdös and Kakutani [DEK1,DEK2,DEK3] ont établi l'existence de points multiples d'un ordre fini quelconque de la courbe brownienne plane, et même de points de multiplicité infinie. Une question naturelle formulée par Taylor [Ta1] était d'étudier la taille de l'ensemble des points ayant une multiplicité donnée, et en particulier de comparer la taille de l'ensemble des points de multiplicité n à celle de l'ensemble des points de multiplicité $n+1$. Précisément, si $h_\alpha(x) = x^2(\log \frac{1}{x})^\alpha$, Taylor conjecturait que la h_α-mesure de Hausdorff de l'ensemble des points de multiplicité n devrait être 0 pour $\alpha < n$ mais ∞ pour $\alpha > n$. Cette conjecture, montrant qu'en un sens il y a beaucoup plus de points de multiplicité n que de points de multiplicité $n+1$, est démontrée dans [11]. Un outil important de la preuve, utile dans de nombreuses autres applications, consiste à approcher la mesure naturelle sur l'ensemble des points de multiplicité n (construite à partir du temps local d'intersection, introduit indépendamment par Dynkin [Dy1,Dy2] et Geman-Horowitz-Rosen [GHR]) par l'aire de l'intersection de saucisses de Wiener indépendantes.

Les méthodes de [11] furent améliorées dans [21] (voir aussi [30]) pour donner la mesure de Hausdorff exacte de l'ensemble des points de multiplicité n de la courbe brownienne plane, ainsi que de l'ensemble des points doubles de la courbe brownienne en dimension 3. La fonction de mesure exacte est $x^2(\log \frac{1}{x} \log\log\log \frac{1}{x})^n$ en dimension 2 and $x(\log\log \frac{1}{x})^2$ pour les points doubles en dimension 3, ce qui généralise des résultats classiques de Lévy, Ciesielski and Taylor pour la courbe brownienne. Des méthodes voisines sont appliquées à des processus de Lévy plus généraux que le mouvement brownien dans l'article [22], qui contient la preuve de plusieurs conjectures de Taylor [Ta2] pour les points multiples des processus de Lévy. Voir aussi l'article [29] pour la preuve d'une conjecture de Hendricks-Taylor donnant une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de points de multiplicité n dans la trajectoire d'un processus de Lévy.

Toujours pour la courbe brownienne plane, l'article [17] établit le résultat un peu surprenant de l'existence de points de multiplicité infinie ayant un type d'ordre arbitraire. Précisément, si K est un sous-ensemble compact d'intérieur vide de la droite réelle $\mathbf{R}$, il existe un point z de la courbe brownienne tel que l'ensemble des temps où le mouvement brownien se trouve en z est l'image de K par un homéomorphisme croissant de $\mathbf{R}$. En particulier, ceci entraîne l'existence de points de multiplicité exactement dénombrable, qui était alors un problème ouvert.

1.2 Théorèmes limites pour la saucisse de Wiener

Si $B = (B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien dans $\mathbf{R}^d$, $d \geq 2$, et K est un sous-ensemble compact non-polaire de $\mathbf{R}^d$, la saucisse de Wiener S_t^K est la réunion des ensembles $B_s + K$ quand s varies dans l'intervalle $[0,t]$. Pour simplifier les notations, on écrit $S^K := S_1^K$. Si m désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$, le comportement de $m(S_t^K)$ quand $t \to \infty$ est (essentiellement) équivalent à celui de $m(S^{\varepsilon K})$ quand $\varepsilon \to 0$, via un argument de changement d'échelle. Un résultat classique de Kesten, Spitzer et Whitman (voir [Sp1], p.40) énonce qu'en dimension $d \geq 3$, $t^{-1}m(S_t^K)$ converge p.s. vers la capacité newtonienne de K. En dimension 2, $(\log t/t)m(S_t^K)$ converge vers π presque sûrement (cf [11]). Cette dernière convergence peut être vue comme une conséquence d'un développement asymptotique de l'espérance $E[m(S_t^K)]$ dû à Spitzer [Sp2], dans un article qui relie le volume moyen de la saucisse de Wiener à un problème de conduction de la chaleur : la différence $E[m(S_t^K)] - m(K)$ s'interprète comme la quantité totale de chaleur transmise par K au milieu environnant avant l'instant t, si on suppose que K est maintenu à la température constante 1 alors que le milieu environnant $\mathbf{R}^d \backslash K$ est initialement à la température 0.

Les articles [6], [25] et [35] précisent les résultats asymptotiques précédents pour la mesure de la saucisse de Wiener. En particulier, [25] donne des théorèmes de fluctuations correspondant à la "loi des grands nombres" de Kesten-Spitzer-Whitman. En dimension $d \geq 3$, la loi limite est normale mais de manière un peu inattendue ce n'est pas vrai en dimension deux. Dans ce cas, la loi limite est celle d'un temps local d'auto-intersection renormalisé du mouvement brownien plan (introduit par Varadhan [Va]) défini formellement par

$$\gamma := \iint_{0 \leq s < t \leq 1} (\delta_0(B_s - B_t) - E[\delta_0(B_s - B_t)])\, ds\, dt.$$

L'article [35] va plus loin dans l'étude de la saucisse de Wiener plane, en donnant un développement asymptotique complet pour la mesure $m(S^{\varepsilon K})$ quand $\varepsilon \to 0$. Le p-ième terme de ce développement fait apparaître un temps local d'auto-intersection renormalisé, noté γ_p, associé aux points de multiplicité p de la courbe brownienne plane (en particulier $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \gamma + C$ pour une certaine constante C). L'existence de ces temps locaux d'intersection renormalisés venait d'être établie par Dynkin [Dy3]. Pour énoncer le résultat, posons pour tout $\varepsilon \in]0,1[$,

$$a_\varepsilon = \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\pi} R(K),$$

où $R(K)$ désigne la constante de Robin de K (i.e. le logarithme de la capacité logarithmique de K). Alors, pour tout entier $n \geq 1$,

$$m(S^{\varepsilon K}) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1}\, a_\varepsilon^{-p}\, \gamma_p + R_n(\varepsilon),$$

où le reste $R_n(\varepsilon)$ est tel que $|\log\varepsilon|^n R_n(\varepsilon)$ converge vers 0 dans L^2, et presque sûrement quand K est étoilé.

En prenant les espérances dans le développement précédent, on obtient un développement asymptotique pour $E[m(S_t^K)]$ quand $t \to \infty$, qui précise considérablement un résultat classique de Spitzer [Sp2]. Des résultats analogues en dimension $d \geq 3$ sont établis dans [26] et améliorent des développements antérieurs dus à Spitzer et Kac.

Une question complètement différente, à nouveau motivée par le problème de conduction de la chaleur mentionné ci-dessus, est de trouver des développements asymptotiques pour $E[m(S_t^K)]$ quand $t \to 0$. Ce problème est traité dans [47], dans un article en collaboration avec M. van den Berg, sous l'hypothèse que K a une frontière lisse. Le théorème principal de [47] donne les deux premiers termes du développement, qui font apparaître respectivement la mesure de la frontière de K et l'intégrale de sa courbure moyenne.

1.3 Marches aléatoires

Beaucoup des résultats précédents ont des analogues pour les marches aléatoires sur le réseau $\mathbf{Z}^d$. Les articles [12] et [13] traitent d'une façon exhaustive le problème du comportement asymptotique du nombre de points d'intersection des trajectoires jusqu'à l'instant n de k marches aléatoires indépendantes (centrées et de variance finie) dans $\mathbf{Z}^d$. Une motivation importante était d'établir un théorème de fluctuation pour le nombre de points vistés par une marche aléatoire plane. Le nombre de points visités par une marche aléatoire avait été étudié par Dvoretzky et Erdös [DE] dans un travail pionnier, puis par Jain et Pruitt dans une série d'articles (voir notamment [JP1,JP2,JP3,JP4]). L'existence d'un théorème de fluctuation en dimension 2 était sans doute le problème ouvert le plus important restant en suspens. Ce théorème est établi dans [12] : si R_n désigne le nombre de points distincts visités par une marche aléatoire plane (centrée et de variance finie) avant l'instant n, on a

$$\frac{(\log n)^2}{n}(R_n - E[R_n]) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(d)}} -C\,\gamma,$$

où C est une constante positive, et γ est le temps local d'auto-intersection renormalisé introduit ci-dessus.

Les résultats de [12] peuvent être appliqués à des principes d'invariance pour les marches aléatoires faiblement auto-évitantes. Pour un choix adéquat des paramètres, une marche aléatoire faiblement auto-évitante sur l'intervalle $[0, n]$, convenablement changée d'échelle, convergera en loi vers la mesure de polymère en dimension deux (qui a pour densité $C\,\exp(-c\,\gamma)$ par rapport à la mesure de Wiener). L'article [65] donne une preuve simple de ce résultat, qui avait été établi par Stoll [St] avec des outils d'analyse non-standard. Dans le même esprit, l'article [52], écrit en réponse à une question de Slade, étudie l'existence de moments exponentiels positifs pour la variable γ (l'existence de moments exponentiels négatifs, établie par Varadhan [Va], permet la construction de la mesure de polymère plane). La finitude de (certains) moments exponentiels positifs permet de construire les modèles de mouvement brownien auto-attractifs étudiés par Brydges et Slade [BS] (voir aussi le second chapitre de [Bo]).

L'article [38] (en collaboration avec J. Rosen) explore des extensions des résultats de [12] et [13] aux marches aléatoires dans le domaine d'attraction de lois stables. Sous des hypothèses de régularité relativement faibles, ce travail donne un panorama assez complet des théorèmes limites pour le nombre de points visités qui peuvent être obtenus dans ce cadre.

2 Serpent brownien et superprocessus

Dans la deuxième moitié des années quatre-vingt, plusieurs auteurs dont Eugene Dynkin et Edwin Perkins entreprirent une étude approfondie des processus à valeurs mesures appelés superprocessus par Dynkin. Initialement ces processus avaient pour but de modéliser l'évolution de populations soumises à un double phénomène de branchement et de déplacement spatial. En dehors de cette motivation initiale, il apparut assez vite que les superprocessus étaient des objets importants pour de nombreuses autres raisons, dont certaines seront expliquées ci-dessous. En particulier, les superprocessus interviennent dans l'étude asymptotique de modèles variés issus de la mécanique statistique, la combinatoire ou encore la théorie des systèmes de particules en intéraction (voir par exemple [CS], [CDP], [DS], [HS], [DuP], [Sl]).

Si on se limite au cas où le phénomène de branchement est indépendant de la position dans l'espace, un superprocessus est décrit par la donnée de deux éléments, le déplacement spatial ξ qui est un processus de Markov, et le mécanisme de branchement ψ qui est une fonction définie sur $\mathbf{R}_+$. Pour la plupart des applications, le cas de loin le plus important est le mécanisme de branchement quadratique $\psi(u) = c\,u^2$, qui apparaît dans la limite des systèmes de particules avec branchement quand la loi de reproduction est critique et de variance finie. Dans ce cas particulier, le processus de la masse totale du superprocessus est le processus de diffusion de Feller. En général, le processus de la masse totale est un processus de branchement à espace d'états continu (*continuous-state branching process* en anglais) de loi caractérisée par le mécanisme de branchement ψ.

2.1 La construction via le serpent brownien

Ma première contribution à l'étude des superprocessus [39] fut une construction trajectorielle dans le cas du mécanisme de branchement quadratique, qui sépare clairement les rôles du phénomène de branchement et du déplacement spatial. Plus précisément, l'arbre généalogique sous-jacent des “particules infinitésimales” du superprocessus est d'abord codé par une excursion brownienne (ou plutôt par un processus de Poisson de telles excursions, qu'on peut engendrer par la trajectoire d'un mouvement brownien réfléchi) et ensuite il est facile de construire les déplacements spatiaux en utilisant cette structure généalogique. L'idée que la généalogie de la diffusion de Feller peut être codée par des excursions browniennes apparaissait dans les travaux antérieurs de divers auteurs (voir notamment Neveu-Pitman [NP1,NP2], ainsi que [14] et [32]) qui établissaient des liens entre le mouvement brownien linéaire et les arbres associés aux processus de branchement. Plus tard, cette idée a été rendue précise par Aldous dans son travail [Al1,Al2,Al3] sur l'arbre brownien continu (CRT), qui n'est rien d'autre que l'arbre codé par une excursion brownienne normalisée. Dans le même esprit, l'article [45], motivé par le travail d'Aldous, donne une approche directe simple des lois marginales du CRT, qui utilise seulement les propriétés des excursions browniennes (l'approche initiale d'Aldous reposait sur des approximations discrètes du CRT). Cet approche est même encore simplifiée dans le second chapitre de la monographie [71].

L'article [44] propose une version différente de la construction de [39], qui devait s'avérer très importante pour les applications à venir. Si l'on considère les trajectoires spatiales individuelles comme étant paramétrées par le temps de l'excursion brownienne qui code la généalogie (ce temps n'a rien à voir avec celui du superprocessus !), on obtient un **processus de Markov** à valeurs dans les trajectoires finies, qui est le serpent brownien. Le comportement du serpent brownien est facile à décrire. Sa valeur à l'instant s est une trajectoire W_s du déplacement spatial ξ (partant d'un point initial fixé) avec un temps de vie aléatoire ζ_s. Le processus aléatoire $(\zeta_s)_{s\geq 0}$ suit la loi d'un mouvement brownien réfléchi. De manière informelle, quand ζ_s décroît, la trajectoire W_s est raccourcie à partir de son point terminal (le point de départ ne change jamais) et quand ζ_s croît, la trajectoire W_s est allongée en lui ajoutant au niveau de son point terminal des "petits bouts" de trajectoires suivant la loi du déplacement spatial. Pour résumer, on peut construire les trajectoires historiques d'un superprocessus (avec branchement quadratique) en considérant l'ensemble des valeurs prises par le serpent brownien, qui est un processus de Markov à valeurs dans les trajectoires, possédant de "bonnes" propriétés.

Des applications dans l'esprit de la théorie du potentiel sont données dans les articles [44] et [48]. L'article [44] s'intéresse, en particulier, au problème de décrire les ensembles polaires pour le superprocessus. Cela revient à décrire les sous-ensembles A de l'espace d'états de ξ qui sont tels que l'ensemble des trajectoires visitant A soit polaire pour le serpent brownien. Comme le serpent brownien est un processus de Markov symétrique, le critère d'énergie classique conduit à une condition suffisante de non-polarité énoncée dans [44] pour un déplacement spatial général. Dans le cas particulier du super-mouvement brownien (i.e. quand le déplacement spatial est le mouvement brownien dans $\mathbf{R}^d$), on retrouve les conditions obtenues par Perkins [Pe3] et Dynkin [Dy4] (comme Dynkin l'a montré en utilisant les liens avec les équations aux dérivées partielles, ces conditions sont dans ce cas à la fois nécessaires et suffisantes). L'article [48] continue l'étude du serpent brownien du point de vue de la théorie du potentiel, en donnant une formule simple pour l'énergie d'une mesure sur les trajectoires, et en déterminant la mesure capacitaire de l'ensemble des trajectoires qui visitent un sous-ensemble donné de l'espace d'états (ou bien de l'ensemble des trajectoires qui quittent un domaine par un sous-ensemble donné de sa frontière). En conséquence de la théorie générale, ces mesures capacitaires sont solutions de problèmes variationnels simples sur l'espace des mesures de probabilité sur les trajectoires.

Peut-être l'un des avantages les plus convaincants du serpent brownien est de fournir une image très claire, en même temps qu'un moyen de calcul effectif, pour la mesure aléatoire appelée "Integrated super-Brownian excursion" (ISE, voir [Al4]) qui s'est avérée un objet fondamental pour décrire diverses asymptotiques en mécanique statistique ou en combinatoire (voir en particulier [DS], [HS] et [Sl]). Comme cela est expliqué dans le chapitre IV de [71], ISE n'est rien d'autre que la mesure uniforme sur l'ensemble des points visités par un serpent brownien dirigé par une excursion brownienne normalisée (i.e. de durée égale à 1).

2.2 Propriétés trajectorielles du super-mouvement brownien

Dans la fin des années quatre-vingt, Perkins et ses collaborateurs [Pe1,Pe2,Pe3,DIP,DP] ont établi de nombreuses propriétés trajectorielles très précises du super-mouvement brownien, concernant en particulier la mesure de Hausdorff du support à un temps fixe, ou de la réunion des supports (range en anglais). Les deux problèmes ouverts les plus importants étaient la détermination de la fonction de mesure de Hausdorff exacte dans les dimensions critiques ($d = 2$ pour le support à un temps fixe, $d = 4$ pour la réunion des supports). Ces deux problèmes ont pu être résolus grâce au serpent brownien. D'abord l'article [57] en collaboration avec E. Perkins établit que la fonction de mesure de Hausdorff exacte pour le support en dimension 2 est $\varphi(r) = r^2 \log \frac{1}{r} \log\log\log \frac{1}{r}$ (comme pour la courbe brownienne plane). Le problème analogue pour la réunion des supports en dimension 4 est résolu dans [70], et la fonction correspondante est $\varphi(r) = r^4 \log \frac{1}{r} \log\log\log \frac{1}{r}$. Dans les deux cas, le serpent brownien joue un rôle essentiel en fournissant des outils (notamment la propriété de Markov forte du serpent) qui ne sont pas accessibles par d'autres approches.

L'article [58] en collaboration avec E. Perkins et S.J. Taylor donne des résultats semblables pour la mesure de packing du support du super-mouvement brownien. Contrairement au cas des mesures de Hausdorff, la fonction de mesure exacte est différente de celle obtenue pour la courbe brownienne.

D'autres propriétés trajectorielles du super-mouvement brownien établies dans [64] et [67] seront décrites ci-dessous dans le paragraphe consacré aux applications aux équations aux dérivées partielles. Dans leur travail de thèse sous ma direction, J.F. Delmas, J.S. Dhersin et L. Serlet ont aussi donné plusieurs applications du serpent brownien aux propriétés trajectorielles des superprocessus (voir [De1,Dh,Se1,Se2]).

3 Applications aux équations aux dérivées partielles

On savait depuis longtemps que la fonctionnelle de Laplace d'un superprocessus s'exprime en termes de la solution d'une équation aux dérivées partielles semilinéaires. Cependant, c'est seulement avec le travail de Dynkin [Dy4,Dy5,Dy6] au début des années quatre-vingt dix (et notamment avec la solution du problème de Dirichet non linéaire, et le lien entre ensembles polaires et singularités éliminables pour l'EDP associée) que la richesse de ces relations devint évidente. Ma contribution personnelle fut d'observer que pour différents problèmes (et en particulier pour le problème important de la classification des solutions dans un domaine) le serpent brownien fournit une approche plus efficace et plus “trajectorielle” pour d'abord deviner et ensuite démontrer des énoncés analytiques par des méthodes probabilistes. Bien que cette approche semble limitée au cas quadratique (et donc à l'équation $\Delta u = u^2$ ou à l'équation parabolique associée), il s'est avéré que la quasi-totalité des résultats établis dans ce cas particulier ont pu ensuite être étendus à des équations plus générales, par des méthodes aussi bien analytiques que probabilistes.

Dans ce qui suit, le mot “solution” signifie toujours “solution positive”.

3.1 Singularités éliminables

L'article [49] propose une reformulation des liens entre superprocessus et équations aux dérivées partielles dans le langage du serpent brownien. Davantage qu'une reformulation, le serpent brownien permet de simplifier considérablement certaines constructions. Ainsi les mesures de sortie, qui jourent un rôle crucial, sont obtenues aisément à partir du temps local de certains mouvements réfléchis liés au serpent brownien, alors que la construction initiale due à Dynkin utilisait les limites médiales (par la suite, Dynkin [Dy6] a contourné cette difficulté en définissant un superprocessus comme la collection de ses mesures de sortie).

Dans un domaine lisse, la solution maximale de l'équation $\Delta u = u^2$ qui s'annule à la frontière sauf éventuellement sur un sous-ensemble compact donné $K \subset \partial D$ s'exprime via la probabilité que l'une des trajectoires valeurs du serpent brownien sorte de D en un point de K. En conséquence, K est une singularité éliminable à la frontière si et seulement si l'ensemble des trajectoires qui sortent de D en un point de K est polaire pour le serpent brownien (les singularités éliminables à la frontière ont été étudiées pour des équations de la forme $\Delta u = u^p$ par Gmira et Véron [GV], qui ont montré que les singletons sont éliminables si et seulement si $d \geq \frac{p+1}{p-1}$). En utilisant l'observation précédente et les outils de théorie du potentiel probabiliste, l'article [48] montre qu'une condition suffisante pour que K ne soit pas polaire à la frontière est que K porte une mesure non-triviale ν telle que

$$\int_D G_D(x_0, y)\Big(\int_{\partial D} P_D(y,z)\,\nu(dz)\Big)^2\,dy < \infty,$$

où G_D est la fonction de Green de D, P_D est son noyau de Poisson et x_0 est un point fixé de D dont le choix n'a pas d'importance. Dynkin [Dy6] avait conjecturé que cette condition est à la fois nécessaire et suffisante pour la non-polarité. La preuve du caractère nécessaire est donnée dans [55]. Elle utilise des arguments analytiques inspirés des travaux de Baras et Pierre [BP]. Il est intéressant de noter que le résultat analogue pour l'équation $\Delta u = u^p$ a été obtenu plus tard, par Dynkin et Kuznetsov [DK1] dans le cas $1 < p < 2$ et par Marcus et Véron [MV3] dans le cas $p > 2$ (assez curieusement, les méthodes analytiques de [MV3] ne s'appliquent pas au cas $p < 2$, alors que l'approche probabiliste de [DK1] est au contraire limitée à ce cas : un bon exemple de complémentarité).

L'article [55] contient aussi la preuve d'une autre conjecture de Dynkin [Dy6] concernant les solutions de $\Delta u = u^2$ qui sont majorées par une fonction harmonique. Une telle solution est caractérisée par son majorant harmonique minimal, qui est lui-même associé via la représentation de Poisson à une mesure finie sur la frontière. L'article [55] montre que dans cette correspondance, les solutions de $\Delta u = u^2$ majorées par une fonction harmonique sont en bijection avec les mesures finies sur ∂D qui ne chargent pas les polaires (voir [DK2] pour des généralisations de ce résultat). La preuve utilise les propriétés du serpent brownien, et particulièrement la propriété de Markov spéciale qui a d'autres importantes applications dans [57], [70] et [85].

3.2 La classification des solutions

Des discussions avec Laurent Véron au début des années quatre-vingt dix m'ont amené à m'intéresser au problème de la classification des solutions de $\Delta u = u^2$ dans un domaine lisse. Schématiquement le problème, qui est analogue à la représentation de Poisson des fonctions harmoniques, est d'établir une bijection entre les solutions et leurs traces sur la frontière (définies de manière convenable), et ensuite de classifier toutes les traces possibles.

Dans le cas d'un domaine du plan, ce problème est complètement résolu dans [62] (pour le disque unité, le résultat est annoncé dans [46]). Il existe une correspondance bijective entre les solutions (positives) de $\Delta u = u^2$ dans un domaine (lisse, borné) D du plan et les couples (K, ν) où K est un sous-ensemble compact de ∂D et ν une mesure de Radon sur $\partial D \backslash K$. Le couple (K, ν) associé à la solution u est appelé la trace de u et il peut être caractérisé facilement à partir du comportement de u à la frontière. De manière informelle, K est l'ensemble des points de la frontière où u explose "fortement", et ν apparaît comme une valeur frontière généralisée de u sur $\partial D \backslash K$. Jusqu'à ce point l'énoncé est analytique, mais la preuve donnée dans [62] est probabiliste, et repose fortement sur la représentation en termes du serpent brownien de la solution u de trace (K, ν) :

$$u(x) = \mathbf{N}_x\Big(1 - 1_{\{\mathcal{R}^D \cap K = \emptyset\}} \exp(-\langle \nu, z_D \rangle)\Big),$$

où $\mathbf{N}_x$ est la mesure d'excursion du serpent brownien avec point initial $x \in D$, $\mathcal{R}^D$ est l'ensemble des points visités par les trajectoires valeurs du serpent brownien jusqu'à leur temps de sortie de D, et z^D est la densité (continue) de la mesure de sortie de D (le fait que cette densité existe pour un domaine plan de frontière lisse est établi dans l'article [51], qui donne aussi de nombreuses autres propriétés des mesures de sortie). Il est à noter que la représentation probabiliste permet facilement d'établir diverses propriétés analytiques des solutions.

Motivés par les résultats de [62], Marcus et Véron [MV2] ont étendu la correspondance bijective entre les solutions et leurs traces (K, ν) à l'équation $\Delta u = u^p$ dans un domaine lisse de $\mathbf{R}^d$, dans le cas *sous-critique* $d < \frac{p+1}{p-1}$ (c'est le cas où les singletons ne sont pas polaires, $d = 1$ et $d = 2$ sont les seules possibilités lorsque $p = 2$). Toutes les paires (K, ν) du type considéré ci-dessus sont encore des traces possibles. La représentation probabiliste a aussi été étendue dans ce cadre aux valeurs $p \in]1, 2[$ dans l'article [81].

Le cas sur-critique $d \geq \frac{p+1}{p-1}$ est plus délicat. Dans ce cas, Marcus et Véron [MV3] d'une part et Dynkin et Kuznetsov [DK3] d'autre part ont montré qu'on peut encore définir la trace d'une solution (par exemple à partir de son comportement à la frontière) et ont charactérisé les traces possibles. Cependant un contre-exemple de [61] (ce travail contient aussi une version parabolique des résultats de [62]) montre qu'une solution n'est en général pas caractérisée par sa trace, et même qu'il peut exister une infinité de solutions avec la même trace. En raison de cette difficulté, Dynkin et Kuznetsov [DK4] ont introduit une notion de trace plus fine, et conjecturé que les solutions sont caractérisées par leur trace fine. Cette conjecture majeure du sujet a d'abord été démontrée par mon étudiant B. Mselati dans le cas particulier de l'équation $\Delta u = u^2$ dans son travail de thèse [Ms]. La preuve utilise à la fois des outils analytiques et des ingrédients probabilistes reposant sur le serpent brownien. Le résultat de Mselati a été étendu au cas de l'équation $\Delta u = u^p$ pour $1 < p \leq 2$, dans une série d'articles de Dynkin et Kuznetsov : voir le livre [Dy8] pour une présentation complète de la preuve et des références plus précises. Des progrès de Marcus et Véron [MV4], [MV5] suggèrent que le cas général devrait bientôt être résolu.

3.3 Solutions avec explosion à la frontière

Dans les années cinquante, Keller [Ke] et Osserman [Os] ont observé que sous certaines conditions sur la fonction ψ (réalisées pour $\psi(u) = u^p$, $p > 1$) il existe des solutions de l'équation $\Delta u = \psi(u)$ dans un domaine lisse qui explosent partout à la frontière. Cela conduit aux deux questions suivantes.

(1) Pour un domaine général D, existe-t-il une solution qui explose partout à la frontière ?

(2) Si la réponse à la question (1) est oui, cette solution est-elle unique ?

Voir en particulier [BM],[MV1],[Ve1],[Ve2] pour une discussion analytique de ces questions.

Dans le cas particulier de l'équation $\Delta u = u^2$, l'article [64] donne une réponse complète au problème (1). Plus précisément, cet article donne une condition nécessaire et suffisante, prenant la forme d'un test de Wiener, pour que la solution maximale dans D explose en un point donné z de la frontière. Du point de vue probabiliste, cette condition signifie que le serpent brownien avec point initial z sortira immédiatement de D (au sens où il existera des valeurs de s arbitrairement petites telles que l'ensemble $\{W_s(t), 0 < t \leq \zeta_s\}$ rencontre D^c). Il est intéressant de noter que la forme analytique du résultat principal de [64] a été étendue à l'équation $\Delta u = u^p$ par Labutin [Lab].

L'article [67] fournit un analogue parabolique des résultats de [64]. Du point de vue analytique, le problème est de caractériser les fonctions $g(t)$ telles qu'il existe une solution de l'équation parabolique $\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = u^2$ dans le domaine $\{(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^d : |x| < g(t)\}$, qui explose à l'origine. En termes probabilistes, cela est équivalent à déterminer les fonctions $g(t)$ telles que pour $t > 0$ assez petit le support à l'instant t du super-mouvement brownien avec valeur initiale δ_0 soit contenu dans la boule de rayon $g(t)$ centrée à l'origine. La réponse donnée dans [67] prend la forme d'un test intégral analogue au test de Kolmogorov classique pour le mouvement brownien. D'autres analogues paraboliques du test de Wiener ont été obtenus par mes anciens étudiants Delmas et Dhersin [DD1,DD2].

Pour le problème (2) ci-dessus, il n'existe pour l'instant pas de réponse sous la forme d'une condition nécessaire et suffisante. Cependant [49] a donné une condition suffisante (en termes de la capacité newtonienne de l'intersection de la frontière avec des petites boules) pour l'unicité de la solution de $\Delta u = u^2$ avec explosion à la frontière, qui était moins contraignante que les conditions connues par des méthodes analytiques. Voir aussi [MV1] pour des développements récents.

4 Processus de branchement et processus de Lévy

La construction des superprocessus via le serpent brownien repose sur le fait que la généalogie de la diffusion de Feller peut être codée par le mouvement brownien linéaire, fait qui a d'autres applications importantes, par exemple à la construction et l'étude de l'arbre continu d'Aldous. Il était tentant de rechercher une description analogue de la généalogie de processus de branchement à espace d'états continu (critiques ou sous-critiques) plus généraux. Un premier pas dans cette direction est accompli dans l'article [63] en collaboration avec J. Bertoin et Y. Le Jan, où nous utilisons une méthode de subordination pour construire des superprocessus avec un mécanisme de branchement d'un type particulier incluant le cas stable $\psi(u) = u^p$, $1 < p < 2$, à partir du cas quadratique. La méthode de subordination de [63] a été appliquée aux propriétés trajectorielles des superprocessus dans le travail de Delmas [De2] et plus récemment aux superprocessus avec catalyse dans Dawson et al [DFM].

4.1 Le processus des hauteurs

Les articles [66,68] en collaboration avec Yves Le Jan fournissent l'analogue pour un mécanisme de branchement général du codage de la généalogie du brachement quadratique par les excursions browniennes. Ces articles considèrent un mécanisme de branchement ψ de la forme

$$\psi(u) = \alpha u + \beta u^2 + \int_{(0,\infty)} \pi(dr)\,(e^{-ru} - 1 + ru)$$

où $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et π est une mesure σ-finie sur $(0,\infty)$ telle que $\int \pi(dr)(r \wedge r^2) < \infty$. Afin d'éviter des cas particuliers plus simples, on suppose que l'une au moins des deux conditions $\beta > 0$ et $\int r\,\pi(dr) = \infty$ est vérifiée.

Alors un codage de la généalogie du ψ-processus de branchement à espaces d'états continu (ou de manière équivalente du superprocessus de mécanisme de branchement ψ) est donné par le *processus des hauteurs* H, qui est lui-même défini comme une fonctionnelle du processus de Lévy X sans sauts négatifs d'exposant de Laplace ψ. Plus précisément, pour chaque $s \geq 0$, H_s mesure la "taille" de l'ensemble $\{r \in [0,s] : X_r = \inf_{r \leq t \leq s} X_t\}$, et peut être défini via l'approximation suivante

$$H_s = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s 1_{\{X_r \leq \inf_{r \leq t \leq s} X_t + \varepsilon\}} \, dr.$$

Bien sûr si $\psi(u) = u^2$, H est simplement un mouvement brownien réfléchi, et on retrouve le codage mentionné ci-dessus sous-jacent au serpent brownien. En général cependant, H n'est pas un processus de Markov. Néanmoins, H possède de nombreuses propriétés remarquables, dont certaines sont détaillées dans [66] et dans le premier chapitre de la monographie [79] avec Thomas Duquesne. Un résultat-clé de [66] est le fait que H a une modification continue si et seulement si $\int^\infty \psi(u)^{-1} du < \infty$, propriété équivalente à l'extinction presque sûre du processus de branchement sous-jacent.

Le processus des hauteurs permet d'étendre facilement la construction des superprocessus quadratiques via le serpent brownien à des mécanismes de branchement généraux. Il suffit de considérer un processus de Markov (W_s) (appelé le serpent de Lévy) à valeurs dans les trajectoires finies, tel que le temps de vie de W_s soit H_s pour tout s et que le mécanisme d'évolution conditionnellement aux temps de vie soit exactement le même que pour le serpent brownien (la trajectoire W_s est raccourcie quand H_s décroît et allongée quand H_s augmente). Cette construction est développée dans [68] et plusieurs applications (y compris une discussion des liens avec les équations aux dérivées partielles) sont présentées dans le chapitre IV de [79]. En particulier, le serpent de Lévy permet de calculer diverses distributions explicites, telles que la loi de l'arbre réduit dans un domaine, défini comme la collection de toutes les trajectoires historiques qui atteignent la frontière (arrêtées à ce moment).

4.2 Arbres discrets et continus

Une autre motivation importante pour introduire et étudier le processus des hauteurs était de comprendre les limites continues d'arbres de Galton-Watson. On sait depuis le travail de Lamperti [La] que les processus de branchement à espace d'états continu sont les seules limites possibles pour des processus de branchement de Galton-Watson changés d'échelle. De manière évidente, on peut représenter la généalogie de processus de Galton-Watson par des arbres discrets (ou des forêts), qui eux-mêmes sont codés par les fonctions discrètes appelées fonctions de contour (parce qu'elles dessinent le contour des arbres). Si une suite de processus de Galton-Watson (changés d'échelle) converge en distribution vers un processus de branchement à espace d'états continu, on s'attend à ce que leurs généalogies convergent aussi vers la structure généalogique associée au processus limite. Le processus des hauteurs permet d'énoncer cette convergence sous une forme précise : sous certaines hypothèses de régularité, les fonctions de contour codant la généalogie des processus de Galton-Watson convergent en loi, dans un sens fonctionnel, vers le processus des hauteurs associé au branchement limite. Une formulation faible de ce résultat figure déjà dans [66], mais des formes beaucoup plus précises sont données dans le chapitre II de [79]. Comme habituellement, ce principe d'invariance permet de retrouver des résultats classiques concernant le comportement asymptotique d'arbres ou de processus de Galton-Watson.

Dans le cas particulier où le branchement limite est la diffusion de Feller, une version de la convergence précédente avait déjà été obtenue par Aldous [Al3], qui considérait un seul arbre de Galton-Watson conditionné à avoir une population totale égale à n, dans la limite $n \to \infty$. La limite des fonctions de contour (changées d'échelle) est alors l'excursion brownienne normalisée qui code le CRT. Ce résultat d'Aldous pour les arbres conditionnés a été généralisé dans la thèse de Duquesne (voir [Duq]) au cas où la loi de branchement (critique) est dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice α. Dans ce cas la limite des fonctions de contour des arbres conditionnés est l'excursion normalisée du processus des hauteurs associé à $\psi(u) = u^\alpha$, qu'on peut voir comme codant l'arbre continu stable.

Plus généralement, on peut définir le ψ-arbre continu comme étant codé par l'excursion du processus des hauteurs associé au mécanisme de branchement ψ. Les propriétés du processus des hauteurs permettent le calcul de plusieurs distributions explicites relatives à ces arbres continus (voir le chapitre III de [79]). En particulier, pour un mécanisme de branchement général ψ on peut calculer la distribution de l'arbre réduit associé à des marques poissonniennes le long du ψ-arbre continu. Dans le cas stable, un argument d'invariance par changement d'échelle permet de déduire la forme explicite des marginales de dimension finie de l'arbre continu stable (généralisant ainsi un résultat important d'Aldous pour le CRT). Ces calculs ont trouvé des applications dans le travail de Miermont [Mi] qui traite des fragmentations auto-similaires de l'arbre stable.

L'article [82] peut être vu comme un prolongement de la monographie [79]. Une originalité importante de [82] consiste dans l'utilisation d'un nouveau formalisme pour les arbres continus, qui a été suggéré par l'article [EPW]. Précisément, les arbres continus aléatoires qui décrivent la généalogie des processus de branchement à espace d'états continu sont vus dans [82] comme des variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble des arbres réels (enracinés) compacts, qui est muni de la topologie de Gromov-Hausdorff. Beaucoup des propriétés des arbres aléatoires obtenus (appelés arbres de Lévy dans [82]), qui étaient quelque peu cachées dans le codage par le processus des hauteurs, prennent une forme plus simple et plus agréable dans ce nouveau formalisme. C'est en particulier le cas pour la propriété de branchement qui affirme que conditionnellement à la partie de l'arbre au-dessous du niveau a, les sous-arbres issus de ce niveau sont les atomes d'une mesure de Poisson dont l'intensité fait intervenir une mesure ou "temps local" portée par le niveau a de l'arbre. (Inversement une forme simple de la propriété de branchement suffit à caractériser les arbres de Lévy, comme cela a été montré par mon étudiante Mathilde Weill [W1].) Le formalisme des arbres réels permet aussi d'énoncer et de démontrer plusieurs propriétés nouvelles des arbres de Lévy, qui ont de nombreuses applications potentielles. A titre d'application, l'article [82] donne divers calculs explicites de dimensions fractales pour les arbres de Lévy, dont leurs dimensions de Hausdorff et de packing, ainsi que celles des ensembles de niveau. Des résultats plus fins sont obtenus dans l'article suivant [90]. Ce travail donne en particulier la bonne fonction de mesure de Hausdorff pour le CRT et ses ensembles de niveau. Il est intéressant de noter que la fonction de mesure appropriée pour le CRT, $h(r) = r^2 \log\log(1/r)$ est la même que celle qui convient pour la courbe brownienne en dimension $d \geq 3$. Des résultats un peu moins précis sont obtenus pour les arbres stables.

L'article [87] donne une présentation des résultats récents autour des arbres réels aléatoires et de certaines de leurs applications aux cartes aléatoires (voir la partie 6 ci-dessous). L'article [84] est une rédaction d'un cours présenté en DEA à l'Université Paris VI, puis à l'école d'été de probabilités de Cornell en 2005. Ce cours présente de manière détaillée les liens entre arbres discrets et continus, le formalisme d'arbre réels et le cas particulier du CRT, ainsi qu'une introduction au serpent brownien et ses applications aux équations aux dérivées partielles.

5 Coalescence et branchement

L'asymptotique de certains modèles de coalescence peut être décrite par des processus de branchement, ou inversement des modèles de coalescence apparaissent dans les limites en temps grand de la structure généalogique de grandes populations. Mon intérêt pour ces thématiques est issu d'une question de R. Durrett en 1997 : suposons qu'on fasse partir des marches aléatoires simples en tout point du réseau $\mathbf{Z}^d$, et que deux de ces marches aléatoires fusionnent dès qu'elles se rencontrent; peut-on alors décrire le comportement asymptotique quand $t \to \infty$ de l'ensemble des points de départ des marches qui auront fusionné avant l'instant t avec la marche issue de l'origine ? Des calculs de moments pour la mesure de comptage sur ces ensembles aléatoires font apparaître les différents arbres de coalescence pour p marches issues de points distincts. En reliant ces arbres à ceux qui interviennent dans la structure généalogique des excursions browniennes (cf [45]) on est conduit à la conclusion que l'ensemble aléatoire précédent, convenablement changé d'échelle, converge en loi vers le support du super-mouvement brownien sous une mesure de Palm appropriée. Ce résultat apparaît dans l'article [76] en collaboration avec M. Bramson et T. Cox, où nous avons choisi un point de vue différent et donné des énoncés pour le modèle du votant (qui est le dual des systèmes de marches aléatoires avec coalescence). Plutôt que de détailler les calculs de moments, nous proposons une approche reposant sur le principe d'invariance de Cox-Durrett-Perkins [CDP] pour le modèle du votant. Les résultats de [76] ont trouvé une belle application dans un article [Me] de mon étudiant Mathieu Merle, qui, pour le modèle de votant partant initialement avec l'opinion 1 seulement à l'origine, a déterminé le comportement asymptotique exact de la probabilité qu'un point éloigné x de $\mathbf{Z}^d$ soit atteint par l'opinion 1.

L'article [73] en collaboration avec J. Bertoin étudie le processus de coalescence de Boltausen-Sznitman, qui est apparu dans l'étude probabiliste du modèle de verres de spins de Sherington-Kirkpatrick [BoS]. Ce processus de coalescence est un cas particulier des coalescents à collisions multiples introduits par Pitman [Pi], qui sont des processus de Markov à valeurs dans l'espace $\mathcal{P}$ des partitions de $\mathbf{N}$ (il n'y a ici plus de "déplacement spatial"). Le principal résultat de [73] énonce que le processus de coalescence de Bolthausen-Sznitman correspond via un retournement du temps au processus de branchement de Neveu, qui est le processus de branchement à espace d'états continu associé à $\psi(u) = u \log u$. De manière informelle, si on choisit (uniformément et indépendamment) des individus étiquetés $1, 2, \ldots$ dans la population à l'instant t du branchement de Neveu, la valeur à l'instant s du coalescent est obtenu en regroupant les individus qui ont le même ancêtre à l'instant $t - s$. La preuve utilise une représentation de la généalogie des processus de branchement à espace d'états continus (liée bien sûr aux résultats présentés ci-dessus) basée sur la composition des subordinateurs.

Jusqu'à un certain point, l'article [80] a été motivé par l'extension des résultats de [73] à des processus de coalescence plus généraux. La classe étudiée dans [80] est la classe des coalescents échangeables, qui sont des processus de Markov à valeurs dans $\mathcal{P}$ dont le semigroupe satisfait une propriété d'échangeabilité naturelle (les coalescents à collisions multiples de Pitman sont des cas particuliers). Ces processus apparaissent comme les limites possibles pour la structure généalogique de grandes populations à taille fixée (voir les travaux de de Möhle et

Sagitov [MoS], [Sa]). Définissons un *pont* comme étant un processus à trajectoires croissantes et continues à droite, indexé par l'intervalle $[0,1]$, partant de 0 et finissant en 1, et à accroissements échangeables. Le résultat principal de [80] établit une correspondance bijective entre les coalescents échangeables et les flots de ponts. Cette correspondance doit être interprétée comme un analogue en dimension infinie de la représentation classique de Kingman pour les partitions échangeables de $\mathbf{N}$. L'article [80] propose aussi une construction poissonnienne des flots de ponts, qui est analogue à la construction des processus de Lévy à partir de processus de Poisson composés, à ceci près que l'addition est remplacée par la composition des applications (évidemment l'absence de commutativité est à l'origine de difficultés nouvelles).

L'analyse des flots de ponts est poursuivie dans l'article [83], qui donne des informations précises sur les mouvements à n points du flot. Dans le cas général, le mouvement à n points est solution d'une équation différentielle stochastique avec sauts. Dans le cas particulier du coalescent de Kingman, on obtient un processus de diffusion simple, dont les composantes fusionnent quand elles se rencontrent. Le mouvement à n points du flot dual est décrit par un autre processus de diffusion très voisin du premier. Ces deux résultats donnent une description très complète du flot de ponts correspondant au coalescent de Kingman. De plus, [83] discute un flot brownien remarquable sur le cercle, qui est à nouveau associé au coalescent de Kingman dans le sens où le vecteur des mesures des ensembles de positions initiales qui donnent la même position à l'instant t, coïncide avec le vecteur des masses des blocs du coalescent à l'instant t, et cela simultanément pour toutes les valeurs de t.

Enfin, l'article [89], aussi en collaboration avec Jean Bertoin, discute plusieurs théorèmes limites qui relient processus de coalescence et processus de branchement à espace d'états continu. En particulier nous obtenons une limite hydrodynamique pour certaines suites de coalescents à collisions multiples, qui montre que la mesure empirique associée aux tailles des blocs du coalescent converge vers une limite déterministe solution d'une forme généralisée de l'équation de coagulation de Smoluchovski.

6 Arbres browniens et limites continues de grandes cartes planaires

Cette partie présente mon activité de recherche récente, autour des limites continues de grandes cartes planaires (voir notamment les articles [92],[95],[97]). Rappelons qu'une carte planaire est un plongement d'un graphe connexe dans la sphère de dimension deux. Les faces de la carte sont les composantes connexes du complémentaire de la réunion des arêtes. Pour des raisons techniques, il est commode de considérer des cartes enracinées, ce qui veut dire qu'on a distingué une arête orientée privilégiée, appelée l'arête racine, et dont l'origine est le sommet racine. L'ensemble des sommets est équipé de la distance de graphe : si a et a' sont deux sommets, $d_{gr}(a,a')$ est le nombre minimal d'arêtes sur un chemin allant de a à a'. Deux cartes planaires sont équivalentes s'il existe un homéomorphisme de la sphère préservant l'orientation qui envoie la première carte sur la seconde, en préservant les arêtes racines. De manière systématique, on identifie deux cartes équivalentes. Les cartes planaires sont un objet important en combinatoire mais aussi en géométrie (voir le livre [LZ] de Lando et Zvonkin) et en physique : d'une part les problèmes d'énumération pour les cartes planaires sont liés aux asymptotiques des intégrales de matrices (voir en particulier [BIPZ]), d'autre part les cartes planaires ont aussi été interprétées comme des modèles de géométrie aléatoire, en particulier dans le cadre de la théorie de la gravité quantique (voir le livre [ADJ], et l'article récent [DSh]). Les travaux de physique théorique contiennent un certain nombre de résultats non-rigoureux concernant l'objet continu qui devrait apparaître comme la limite de cartes planaires rééchelonnées : de manière analogue à la convergence des marches aléatoires vers le mouvement brownien, on s'attend à une propriété d'universalité de l'objet limite continu. Du point de vue mathématique, des propriétés intéressantes des cartes aléatoires infinies (non-rééchelonnées) ont été obtenues par Angel et Schramm [An],[AS].

Mon intérêt pour les cartes planaires est né de l'article pionnier de Chassaing et Schaeffer [CS], qui établit certaines distributions asymptotiques pour les quadrangulations enracinées aléatoires (une carte planaire est une quadrangulation si chaque face a 4 arêtes adjacentes). Ces distributions limites s'expriment en termes du serpent brownien dirigé par une excursion brownienne normalisée. La raison de l'apparition du serpent brownien s'explique par l'existence d'une bijection entre les quadrangulations enracinées et les arbres bien étiquetés. Un arbre bien étiqueté est un arbre (discret) enraciné ordonné, dont les sommets sont munis d'étiquettes entières, de façon que l'étiquette de la racine est 1, les étiquettes de deux sommets voisins diffèrent d'au plus 1, et toutes les étiquettes sont strictement positives. Si l'on s'éloigne de la racine le long d'un rayon de l'arbre, les étiquettes évoluent comme une marche aléatoire sur les entiers (avec sauts possibles $-1, 0$ ou 1) avec la contrainte que la marche aléatoire doit rester positive. En combinant cette observation avec le résultat d'Aldous [Al3] mentionné ci-dessus, on voit que l'analogue continu d'un arbre bien étiqueté est l'arbre des chemins générés par un serpent brownien (en dimension un) d'origine 0, dirigé par une excursion brownienne normalisée et conditionné à rester dans la demi-droite positive. Ce dernier conditionnement est très dégénéré : il l'est déjà lorsque l'on considère une seule trajectoire brownienne (dans ce cas on obtient le méandre) et on s'intéresse ici à un arbre continu de trajectoires browniennes issues de l'origine. La difficulté vient en particulier du fait qu'on ne peut pas traiter séparément la structure généalogique de l'arbre et les déplacements spatiaux, puisque le conditionnement influencera les deux simultanément.

La définition de l'arbre brownien conditionné est rendue précise dans [85], via différentes approches qui toutes conduisent au même objet. Ces approches donnent aussi une description de l'arbre conditionné, analogue à un résultat célèbre de Vervaat reliant le pont brownien et l'excursion brownienne. De façon informelle, l'arbre brownien conditionné est obtenu en réenracinant l'arbre généalogique continu sous-jacent au sommet qui correspond au minimum des positions spatiales, et en translatant ensuite toutes les positions spatiales de façon que la racine se trouve encore à l'origine. En termes de ISE (voir la fin du paragraphe 2.1 ci-dessus), si on veut définir ISE (en dimension un) conditionné à ne pas charger la demi-droite négative, la manière la plus simple est d'abord de conditionner le support de ISE à être contenu dans $]-\varepsilon, \infty[$, puis de faire tendre ε vers 0. Les résultats de [85] montrent que cela revient à translater ISE (non-conditionné) vers la droite, de telle manière que le point le plus à gauche de son support devienne l'origine. L'article [85] contient aussi de nombreux calculs et estimations explicites (par exemple, la probabilité que le support de ISE soit contenu dans $]-\varepsilon, \infty[$ se comporte comme $2\varepsilon^4/21$ quand $\varepsilon \to 0$, ce qui complète des estimations antérieures d'Abraham et Werner [AW]).

L'article [86] établit un principe d'invariance pour les arbres browniens conditionnés, qui démontre, dans une généralité bien plus grande, une conjecture de [MM]. Précisément on considère un arbre de Galton-Watson dont la loi de reproduction est critique (de moyenne 1) et a des moments exponentiels, et on conditionne cet arbre à avoir exactement n sommets (dans le cas particulier de la loi géométrique, cela donne naissance à un arbre planaire de loi uniforme parmi les arbres à n sommets). On combine ensuite la structure de branchement avec un déplacement spatial qui est une marche aléatoire symétrique à sauts bornés sur $\mathbf{Z}$. En supposant que la racine est en l'origine de $\mathbf{Z}$, cet arbre spatial est alors conditionné à rester du coté positif. Le résultat principal de [86] montre que la limite continue quand $n \to \infty$ (modulo un changement d'échelle convenable) de cet arbre discret conditionné est l'arbre brownien conditionné discuté dans [85]. Même si le résultat n'est pas surprenant, la preuve demande de résoudre des difficultés techniques importantes. Les asymptotiques obtenues dans [CS] pour les quadrangulations planaires aléatoires découlent ensuite directement de ce principe d'invariance.

En fait l'approche de [86] donne des asymptotiques pour des classes plus générales de cartes planaires (biparties). Cela a été exploité par mon étudiante Mathilde Weill [W2], qui a utilisé une bijection entre les cartes planaires biparties et certains arbres à deux types, mise en évidence par les physiciens Bouttier, Di Francesco et Guitter [BDG] (des résultats similaires à ceux de [W2], dans un contexte un peu différent avaient été obtenus précédemment par Marckert et Miermont [MMi]). Les résultats de [W2] s'appliquent en particulier aux $2p$-angulations, c'est-à-dire aux cartes planaires où chaque face a exactement $2p$ arêtes adjacentes.

L'article [92], publié dans Inventiones Mathematicae, attaque le problème central de la convergence de grandes cartes planaires (changées d'échelle) vers un objet limite continu. Si M est une carte planaire à n faces, on munit l'ensemble de ses sommets de la distance de graphe multipliée par le facteur $n^{-1/4}$ (le choix de ce facteur est dicté, par exemple, par les résultats de [CS] sur le diamètre d'une carte aléatoire à n faces), et l'objectif est d'étudier l'espace métrique compact ainsi obtenu quand n tend vers l'infini. L'article [92] suppose que la carte M est choisie uniformément dans l'ensemble des $2p$-angulations (enracinées) à n faces et discute la convergence en loi des espaces métriques aléatoires associés, au sens de la distance de Gromov-Hausdorff entre les espaces métriques compacts. Ce problème avait été posé, pour les triangulations, par Oded Schramm dans l'article [Sc] issu de sa conférence plénière au Congrès International de Madrid. Une question analogue avait déjà été discutée dans l'article [MM] de Marckert et Mokkadem, mais ce travail ne traite que la convergence des fonctions de contour, et en particulier ne considère pas les distances entre deux points de la carte autres que la racine.

Bien que [92] échoue à établir la convergence en loi recherchée, cet article donne un résultat de compacité des lois (donc il existe des limites faibles) et surtout identifie les espaces métriques aléatoires limites à homéomorphisme près. Un tel espace métrique aléatoire s'écrit toujours comme un quotient du CRT par une relation d'équivalence qui est définie de manière simple à partir d'étiquettes browniennes affectées aux sommets du CRT (ces étiquettes sont facilement construites à l'aide du serpent brownien) : deux sommets du CRT sont identifiés si et seulement si ils ont même étiquette et si on peut aller d'un sommet à l'autre en suivant le contour de l'arbre, en ne rencontrant que des étiquettes de valeur plus grande. La topologie limite est la topologie-quotient associée à cette relation d'équivalence, et il existe aussi un candidat naturel pour la distance sur l'objet limite (mais jusqu'à présent seule une borne supérieure a été établie). Comme l'avaient déjà remarqué Marckert et Mokkadem, le fait que la limite continue des grandes cartes planaires puisse s'écrire sous la forme précédente n'est pas surprenant au vu des bijections discrètes existant entre cartes et arbres étiquetés. La difficulté est de montrer qu'à la limite on n'identifie pas davantage de sommets que ne le prescrit la relation d'équivalence donnée ci-dessus. Pour cela on utilise certains arguments combinatoires délicats ainsi que des résultats fins sur le serpent brownien. Entre autres conséquences on peut ensuite montrer que tout espace métrique limite des grandes $2k$-angulations aléatoires a nécessairement une dimension de Hausdorff égale à 4, un fait qui avait été conjecturé par les physiciens.

L'espace compact métrique aléatoire obtenu comme limite dans [92] est appelé la *carte brownienne* (avec un abus d'écriture puisque l'unicité de la limite n'est pas encore établie). L'article [95] avec Frédéric Paulin applique les résultats de [92] pour montrer que la carte brownienne est p.s. homéomorphe à la sphère de dimension deux. Ce résultat, qui avait été conjecturé auparavant (O. Schramm, communication personnelle) a des conséquences intéressantes : soit M_n une carte aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble des $2p$-angulations à n faces, et rappelons que le diamètre de M_n est de l'ordre de $n^{1/4}$. Alors, avec une probabilité proche de 1 quand n tend vers l'infini, il n'existe pas de "goulot d'étranglement" de M_n de taille $o(n^{1/4})$, tel que les deux cotés du goulot aient un diamètre de l'ordre de $n^{1/4}$. La preuve du résultat principal de [95] est basée sur la description de l'espace limite donnée dans [92], et sur une analyse des propriétés de certaines laminations géodésiques aléatoires du disque unité, qui est intéressante en elle-même. Une approche différente du résultat de [95] a été donnée par Miermont [Mi2].

L'article [97], à paraître dans Acta Mathematica, obtient des résultats très précis sur les géodésiques dans la carte brownienne (voir aussi [Mi3] pour certains résultats liés à ce travail). Le résultat principal de [97] identifie toutes les géodésiques issues du point privilégié appelé le sommet racine (mais la propriété d'invariance par réenracinement de la carte brownienne montre que le sommet racine peut être remplacé par un point "typique"). Comme cela a été décrit ci-dessus, la carte brownienne est un espace-quotient du CRT, et on montre que dans ce quotient seules les feuilles du CRT peuvent être identifiées à d'autres points. Le "squelette" du CRT, c'est-à-dire l'ensemble des points qui ne sont pas des feuilles, s'identifie donc à un sous-ensemble de la carte brownienne, homéomorphe à un arbre réel non compact dense dans la carte brownienne. L'article [97] montre que ce squelette est précisément le cut-locus de la carte brownienne relatif au sommet racine, c'est-à-dire l'ensemble des points qui peuvent être joints à la racine par au moins deux géodésiques distinctes. De plus, pour un tel point, le nombre de géodésiques distinctes vers la racine est la multiplicité du point dans le squelette. Ces résultats sont des analogues frappants de résultats classiques de géométrie riemannienne remontant à Poincaré. Ils montrent aussi que la construction de la carte brownienne comme quotient du CRT, qui pouvait apparaître comme très dépendante de l'approche spécifique utilisant le codage des cartes discrètes par des arbres, a en fait une signification géométrique intrinsèque, puisque le squelette du CRT est caractérisé par des propriétés géométriques.

Les résultats de [97] ont des applications directes aux propriétés des géodésiques dans les grandes cartes planaires. Il n'y a dans ce cas pas d'unicité des géodésiques au sens strict, mais on peut parler d'unicité macroscopique en identifiant deux géodésiques qui sont à une distance petite en comparaison du diamètre de la carte. On obtient alors l'unicité macroscopique de la géodésique joignant deux points typiques de la carte, et on peut aussi décrire le nombre maximal de géodésiques "macroscopiquement différentes" joignant un point arbitraire de la carte à un point typique.

Les résultats de [92] et ceux d'autres travaux récents qui considèrent des cartes planaires plus générales que les $2p$-angulations (voir notamment [MMi], [MW], [W2]) suggèrent très fortement que la carte brownienne est la limite d'échelle universelle des grandes cartes planaires aléatoires dont le degré des faces n'est "pas trop grand" (un peu comme le mouvement brownien est la limite d'échelle de toutes les marches aléatoires satisfaisant des conditions de moments appropriées). L'article [100] avec G. Miermont traite pour des cartes aléatoires distribuées selon des poids de Boltzmann un cas où le degré d'une face typique est dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice $\alpha \in]1,2[$. On obtient alors dans la limite d'échelle un objet continu différent de la carte brownienne, qui topologiquement ressemblerait davantage au tapis de Sierpinski qu'à la sphère de dimension deux. La description (encore partielle) de cet objet continu fait intervenir l'arbre stable d'indice α étudié dans [79], et un nouveau processus aléatoire appelé le processus des distances qui joue un peu le même rôle que les étiquettes browniennes sur le CRT dans le cas de la carte brownienne. Ces quantités aléatoires permettent ensuite de décrire les limites d'échelle du rayon et du profil des distances pour les cartes aléatoires considérés dans [100], ainsi que de montrer que la dimension de Hausdorff de l'espace métrique continu limite (dont l'unicité reste là aussi à établir) est égale à 2α.

L'article [103], en collaboration avec Laurent Ménard, étudie certaines lois asymptotiques pour le graphe aléatoire infini appelée la quadrangulation infinie uniforme, qui est la limite (sans rééchelonnement) des quadrangulations à n faces de loi uniforme, lorsque n tend vers l'infini. On obtient en particulier la loi limite du volume des boules, en termes du "serpent brownien éternel conditionné" qui avait été introduit dans [85]. Enfin, l'article [104], en collaboration avec Nicolas Curien, étudie un modèle récursif de construction de triangulations aléatoires continues du disque unité (les sommets des triangles sont ici des points du cercle) obtenu en jetant au hasard des cordes sur le cercle mais en ne gardant à chaque fois que les cordes qui ne croisent pas les précédentes. Ce modèle est voisin mais différent de celui considéré par Aldous [Al5] (ce dernier modèle, qui est étroitement lié au CRT, jouait un rôle important dans [95]). L'article [104] donne un ensemble complet de résultats pour le modèle récursif et établit en particulier que la dimension du compact aléatoire obtenu en jetant une infinité de cordes est égale à $(\sqrt{17}-1)/2$, à comparer avec la valeur $3/2$ pour le modèle d'Aldous. Les preuves de [104] reposent sur des résultats récents de la théorie des fragmentations aléatoires.

Références

[AW] Abraham, R., Werner, W. Avoiding probabilities for Brownian snakes and super-Brownian motion. *Electron. J. Probab.* **2** no. 3, 27 pp. (1997)

[Al1] Aldous, D.: The continuum random tree I. *Ann. Probab.* **19**, 1-28 (1991)

[Al2] Aldous, D.: The continuum random tree II: An overview. In: *Stochastic Analysis* (M.T. Barlow, N.H. Bingham eds), pp. 23-70. Cambridge University Press, Cambridge 1991

[Al3] Aldous, D.: The continuum random tree III. *Ann. Probab.* **21**, 248-289 (1993)

[Al4] Aldous, D.: Tree-based models for random distribution of mass. *J. Stat. Phys.* **73**, 625-641 (1993)

[Al5] Aldous, D.: Recursive self-similarity for random trees, random triangulations and Brownian excursion. *Ann. Probab.* **22**, 527-545 (1994)

[ADJ] Ambjorn, J., Durhuus, B., Jonsson, T.: *Quantum Geometry. A statistical field theory approach.* Cambridge Monogr. Math. Phys. 1, 1997.

[An] Angel, O.: Growth and percolation on the uniform infinite planar triangulation. *Geom. Funct. Anal.* **13**, 935-974 (2003)

[AS] Angel, O, Schramm, O.: Uniform infinite planar triangulations. *Comm. Math. Phys.* **241**, 191-213 (2003).

[BM] Bandle, C., Marcus, M.: Large solutions of semilinear elliptic equations: Existence, uniqueness and asymptotic behavior. *J. Analyse Math.* **58**, 8-24 (1992)

[BP] Baras, P., Pierre, M.: Singularités éliminables pour des équations semilinéaires. *Ann. Inst. Fourier* **34**, 185-206 (1984)

[Bo] Bolthausen, E.: Large deviations and interacting random walks. In: *Lectures on Probability and Statistics, Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour 1999.* Lecture Notes Math. **1781**. Springer 2002

[BoS] Bolthausen, E., Sznitman, A.S.: On Ruelle's probability cascades and an abstract cavity method. *Comm. Math. Physics* **197**, 247-276 (1998)

[BDG] Bouttier, J., Di Francesco, P., Guitter, E.: Planar maps and labelled mobiles. *Electr. J. Combinatorics* **11**, R69 (2004)

[BIPZ] Brézin, E., Itzykson, C., Parisi, G., Zuber, J.B.: Planar diagrams. *Comm. Math. Phys.* **59**, 35-51 (1978)

[BS] Brydges, D.C., Slade, G.: The diffusive phase of a model of self-interacting walks. *Probab. Theory Related Fields* **103**, 285–315 (1995)

[CS] Chassaing, P., Schaeffer, G. Random planar lattices and integrated superBrownian excursion. *Probab. Th. Rel. Fields* **128**, 161-212 (2004)

[CDP] Cox, J.T., Durrett, R., Perkins, E.A.: Rescaled voter models converge to super-Brownian motion. *Ann. Probab.* **28**, 185-234 (2000)

[DFM] Dawson, D.A., Fleischmann, K., Mörters, P.: Strong clumping of super-Brownian motion in a stable catalytic medium. *Ann. Probab.* **30**, 1990-2045 (2002)

[DIP] Dawson, D.A., Iscoe, I., Perkins, E.A.: Super-Brownian motion: Path properties and hitting probabilities. *Probab. Th. Rel. Fields* **83**, 135-205 (1989)

[DP] Dawson, D.A., Perkins, E.A.: Historical processes. *Memoirs Amer. Math. Soc.* **454** (1991)

[De1] Delmas, J.F.: Some properties of the range of super-Brownian motion. *Probab. Th. Rel. Fields* **114**, 505-547 (1999)

[De2] Delmas, J.F.: Path properties of superprocesses with a general branching mechanism. *Ann. Probab.* **27**, 1099–1134 (1999)

[DD1] Delmas, J.F., Dhersin, J.S.: Characterization of G-regularity for super-Brownian motion and consequences for parabolic partial differential equations. *Ann. Probab.* **27**, 731-750 (1999)

[DD2] Delmas, J.F., Dhersin, J.S.: Kolmogorov's test for the Brownian snake. *Ann. Probab.* **29**, 305–316 (2001)

[DS] Derbez, E., Slade, G.: The scaling limit of lattice trees in high dimensions. *Commun. Math. Phys.* **193**, 69-104 (1998)

[DSh] Duplantier, B., Sheffield, S.: Liouville quantum gravity and KPZ. Preprint (2008)

[Duq] Duquesne, T.: A limit theorem for the contour process of conditioned Galton-Watson trees. *Ann. Probab.* **31**, 996-1027 (2003)

[Dur] Durhuus, B.: Probabilistic aspects of trees and surfaces. *Acta Physica Polonica B* **34**, 4795-4811 (2003)

[DuP] Durrett, R., Perkins, E.A.: Rescaled contact processes converge to super-Brownian motion for $d \geq 2$. *Probab. Theory Related Fields* **114**, 309–399 (1999)

[DE] Dvoretzky, A., Erdös, P.: Some problems on random walks in space. Proc. Second Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability, pp. 353-367. Berkeley 1951.

[DEK1] Dvoretzky, A., Erdös, P., Kakutani, S.: Double points of paths of Brownian motion in n-space. *Acta Sci. Math. (Szeged)* **12**, 64-81 (1950)

[DEK2] Dvoretzky, A., Erdös, P., Kakutani, S.: Multiple points of paths of Brownian motion in the plane. *Bull. Res. Council Isr. Sect. F* **3**, 364-371 (1954)

[DEK3] Dvoretzky, A., Erdös, P., Kakutani, S.: Points of multiplicity c of plane Brownian paths. *Bull. Res. Council Isr. F* **7**, 175-180 (1958)

[Dy1] Dynkin, E.B.: Additive functionals of several time-reversible Markov processes. *J. Funct. Anal.* **42**, 64-101 (1984)

[Dy2] Dynkin, E.B.: Random fields associated with multiple points of the Brownian motion. *J. Funct. Anal.* **62**, 397-434 (1985)

[Dy3] Dynkin, E.B.: Self-intersection gauge for random walks and for Brownian motion. *Ann. Probab.* **16**, 1-57 (1988)

[Dy4] Dynkin, E.B.: A probabilistic approach to one class of nonlinear differential equations. *Probab. Th. Rel. Fields* **89**, 89-115 (1991)

[Dy5] Dynkin, E.B.: Superdiffusions and parabolic nonlinear differential equations. *Ann. Probab.* **20**, 942-962 (1992)

[Dy6] Dynkin, E.B.: Superprocesses and partial differential equations. *Ann. Probab.* **21**, 1185-1262 (1993)

[Dy7] Dynkin, E.B.: *Diffusions, Superdiffusions and Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, Providence, 2002

[Dy8] Dynkin, E.B.: *Superdiffusions and Positive Solutions of Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, Providence, 2004

[DK1] Dynkin, E.B., Kuznetsov, S.E.: Superdiffusions and removable singularities for quasilinear partial differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **49**, 125-176 (1996)

[DK2] Dynkin, E.B., Kuznetsov, S.E.: Solutions of $Lu = u^\alpha$ dominated by L-harmonic functions. *J. Analyse Math.* **68**, 15-37 (1996)

[DK3] Dynkin, E.B., Kuznetsov, S.E.: Trace on the boundary for solutions of nonlinear differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **350**, 4499-4519 (1998)

[DK4] Dynkin, E.B., Kuznetsov, S.E.: Fine topology and fine trace on the boundary associated with a class of semilinear differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **51**, 897-936 (1998)

[EPW] Evans, S.N., Pitman, J.W., Winter, A.: Rayleigh processes, real trees, and root growth with re-grafting. *Probab. Th. Rel. Fields* **134**, 81-126 (2006)

[GHR] Geman, D., Horowitz, J., Rosen, J.: A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. *Ann. Probab.* **12**, 86-107 (1984)

[GV] Gmira, A., Véron, L.: Boundary singularities of some nonlinear elliptic equations. *Duke Math. J.* **64**, 271-324 (1991)

[HS] Hara, T., Slade, G.: The scaling limit of the incipient infinite cluster in high-dimensional percolation. II. Integrated super-Brownian excursion. *J. Math. Phys.* **41**, 1244-1293 (2000)

[JP1] Jain, N.C., Pruitt, W.E.: The range of recurrent random walk in the plane. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete* **16**, 279–292 (1970)

[JP2] Jain, N.C., Pruitt, W.E.: The range of transient random walk. *J. Anal. Math.* **24**, 369-373 (1971)

[JP3] Jain, N.C., Pruitt, W.E.: The law of the iterated logarithm for the range of random walk. *Ann. Math. Statist.* **43**, 1692-1697 (1972)

[JP4] Jain, N.C., Pruitt, W.E.: The range of random walk. Proc. Sixth Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability, vol.3, pp. 31-50. Berkeley 1972.

[Ke] Keller, J.B.: On solutions of $\Delta u = f(u)$. *Comm. Pure Appl. Math.* **10**, 503-510 (1957)

[Lab] Labutin, D.: Wiener regularity for large solutions of nonlinear equations. *Arkiv Math.* **41**, 307-339 (2003)

[La] Lamperti, J.: The limit of a sequence of branching processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **7**, 271-288 (1967)

[LZ] Lando, S.K., Zvonkin, A.K.: *Graphs on Surfaces and Their Applications.* Encyclopedia of Mathematical Science. Springer 2004.

[MV1] Marcus, M., Véron, L.: Uniqueness and asymptotic behavior of solutions with boundary blow up for a class of nonlinear elliptic equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **14**, 237-274 (1997)

[MV2] Marcus, M., Véron, L.: The boundary trace of positive solutions of semilinear equations I: The subcritical case. *Arch. Rat. Metch. Anal.* **144**, 201-231 (1998)

[MV3] Marcus, M., Véron, L.: The boundary trace of positive solutions of semilinear equations II: The supercritical case. *J. Math. Pures Appl.* **77**, 481-524 (1998)

[MV4] Marcus, M., Véron, L.: Capacitary estimates of solutions of a class of nonlinear elliptic equations. *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I, **336**, 913-918 (2003)

[MV5] Marcus, M., Véron, L.: Capacitary estimates of positive solutions of semilinear elliptic equations with absorption. *J. Eur. Math. Soc.* **6**, 483–527 (2004)

[MMi] Marckert, J.F., Miermont, G.: Invariance principles for random bipartite planar maps. *Ann. Probab.* **35**, 1642-1705 (2007)

[MM] Marckert, J.F., A. Mokkadem Limits of normalized quadrangulations. The Brownian map. *Ann. Probab.* **34**, 2144-2202 (2006)

[Me] Merle, M. Hitting probability of a distant point for the voter model started with a single one. *Ann. Probab.* **36**, 807-861 (2008)

[Mi] Miermont, G.: Self-similar fragmentations derived from the stable tree I. Splitting at heights. *Probab. Theory Related Fields* **127**, 423–454 (2003)

[Mi2] Miermont, G.: On the sphericity of scaling limits of random planar quadrangulations. *Elect. Comm. Probab.* **13**, 248-257 (2008)

[Mi3] Miermont, G.: Tessellations of random maps of arbitrary genus *Ann. Sci. Ec. Norm. Supér.* **42**, 725-781 (2009)

[MW] Miermont, G., Weill, M.: Radius and profile of random planar maps with faces of arbitrary degrees. *Electron. J. Probab.* **13**, 79–106 (2008)

[MoS] Möhle, M., Sagitov, S.: A classification of coalescent processes for haploid exchangeable population models. *Ann. Probab.* **29**, 1547-1562 (2001)

[Ms] Mselati, B.: Classification and probabilistic representation of the positive solutions of a semilinear partial differential equation. *Memoirs Amer. Math. Soc.* no **798** (2004)

[NP1] Neveu, J., Pitman, J.W.: Renewal property of the extrema and tree property of the excursion of a one-dimensional Brownian motion. Séminaire de Probabilités XXIII. *Lecture Notes Math.* **1372**, pp. 239-247. Springer (1989)

[NP2] Neveu, J., Pitman, J.W.: The branching process in a Brownian excursion. Séminaire de Probabilités XXIII. *Lecture Notes Math.* **1372**, pp. 248-257. Springer (1989)

[Os] Osserman, R. On the inequality $\Delta u \geq f(u)$. *Pacific J. Math.* **7**, 1641-1647 (1957)

[Pe1] Perkins, E.A.: A space-time property of a class of measure-valued branching diffusions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **305**, 743-795 (1988)

[Pe2] Perkins, E.A.: The Hausdorff measure of the closed support of super-Brownian motion. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Stat.* **25**, 205-224 (1989)

[Pe3] Perkins, E.A.: Polar sets and multiple points for super-Brownian motion. *Ann. Probab.* **18**, 453-491 (1990)

[Pi] Pitman, J.: Coalescents with multiple collisions. *Ann. Probab.* **27**, 1870-1902 (1999)

[Sa] Sagitov, S. The general coalescent with asynchronous mergers of ancestral lines. *J. Appl. Probab.* **36**, 1116-1125 (1999)

[Sc] Schramm, O. Conformally invariant scaling limits: an overview and a collection of problems. *International Congress of Mathematicians.* Vol.I, 513-543. European Math. Society, Zürich 2007.

[Se1] Serlet, L.: Some dimension results for super-Brownian motion. *Probab. Th. Rel. Fields* **101**, 371-391 (1995)

[Se2] Serlet, L.: On the Hausdorff measure of multiple points and collision points of super-Brownian motion. *Stochastics Stoch. Rep.* **54**, 169-198 (1995)

[Sl] Slade, G.: Scaling limits and super-Brownian motion. *Notices Amer. Math. Soc.* **49**, 1056-1067 (2002)

[Sp1] Spitzer, F.: *Principles of Random Walk*. Princeton, Van Nostrand 1964

[Sp2] Spitzer, F.: Electostatic capacity, heat flow and Brownian motion. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **4**, 248-252 (1965)

[St] Stoll, A.: Invariance principles for Brownian intersection local times and polymer measures. *Math. Scand.* **64**, 133-160 (1989)

[Ta1] Taylor, S.J.: Sample path properties of processes with stationary independent increments. In: *Stochastic Analysis* (D. Kendall and E. Harding eds). Wiley, London 1973

[Ta2] Taylor, S.J.: The measure theory of random fractals. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **100**, 383-406 (1986)

[Var] Varadhan, S.R.S.: Appendix to “Euclidean quantum field theory” by K. Symanzik. In: *Local Quantum Theory* (R. Jost ed.). Academic, New York 1969

[Ve1] Véron, L.: Semilinear elliptic equations with uniform blow-up at the boundary. *J. Analyse Math.* **59**, 231-250 (1992)

[Ve2] Véron, L.: *Singularities of solutions of second order quasilinear equations.* Pitman Research Lecture Notes in Math. 353. Longman, Harlow 1996

[W1] Weill, M.: Regenerative real trees. *Ann. Probab.* **35**, 2091-2121 (2007)

[W2] Weill, M.: Asymptotics for rooted planar maps and scaling limits of two-type spatial trees. *Electron. J. Probab.* **13**, 79-106 (2008)

LISTE DE PUBLICATIONS

Jean-François Le Gall

1. Temps locaux et équations différentielles stochastiques. *Thèse de troisième cycle*, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris, 1982.

2. Applications du temps local aux équations différentielles stochastiques unidimensionnelles. *Séminaire de Probabilités XVII. Lecture Notes Math.* **986**, 15-31. Springer, Berlin, 1983.

3. Sur l'équation stochastique de Tsirelson. *Séminaire de Probabilités XVII. Lecture Notes Math.* **986**, 81-88. Springer, Berlin, 1983. (avec **M. Yor**)

4. Sur la mesure de Hausdorff des points multiples du mouvement brownien. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **299**, 627-630 (1984)

5. One-dimensional stochastic differential equations involving the local times of the unknown process. *Stochastic Analysis. Lecture Notes Math.* **1095**, 51-82. Springer, Berlin 1985.

6. Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan. *Séminaire de Probabilités XIX. Lecture Notes Math.* **1123**, 314-331. Springer, Berlin 1985.

7. Sur la mesure de Hausdorff de la courbe brownienne. *Séminaire de Probabilités XIX. Lecture Notes Math.* **1123**, 297-313. Springer, Berlin 1985.

8. Un théorème central limite pour le nombre de points visités par une marche aléatoire plane récurrente. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **300**, 505-508 (1985)

9. Propriétés d'intersection des marches aléatoires. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **301**, 387-390 (1985)

10. Etude asymptotique de certains mouvements browniens complexes avec drift. *Probab. Th. Rel. Fields* **71**, 183-229 (1986) (avec **M. Yor**)

11. Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement brownien. *Ann. Probab.* **14**, 1219-1244 (1986)

12. Propriétés d'intersection des marches aléatoires I. Convergence vers le temps local d'intersection. *Comm. Math. Phys.* **104**, 471-507 (1986)

13. Propriétés d'intersection des marches aléatoires II. Etude des cas critiques. *Comm. Math. Phys.* **104**, 509-528 (1986)

14. Une approche élémentaire des théorèmes de décomposition de Williams.*Séminaire de Probabilités XX. Lecture Notes Math.* **1204**, 447-464. Springer, Berlin 1986.

15. Mouvement brownien, cônes et processus stables. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **302**, 641-643 (1986)

16. Excursions browniennes et carrés de processus de Bessel. *C. R. Acad. Sci. Paris Série I* **303**, 73-76 (1986) (avec **M. Yor**)

17. Le comportement du mouvement brownien entre les deux instants où il passe par un point double. *J. Funct. Anal.* **71**, 246-262 (1987)

18. Etude asymptotique des enlacements du mouvement brownien autour des droites de l'espace. *Probab. Th. Rel. Fields* **74**, 617-635 (1987) (avec **M. Yor**)

19. Mouvement brownien, cônes et processus stables. *Probab. Th. Rel. Fields* **76**, 587-627 (1987)

20. The packing measure of planar Brownian motion. *Seminar on Stochastic Processes 1986*, 139-147. Birkhäuser, Boston 1987. (avec **S. J. Taylor**)

21. The exact Hausdorff measure of Brownian multiple points. *Seminar on Stochastic Processes 1986*, 107-137. Birkhäuser, Boston 1987.

22. Temps locaux d'intersection et points multiples des processus de Lévy. *Séminaire de Probabilités XXI. Lecture Notes Math.* **1247**, 341-374. Springer, Berlin 1987.

23. Un processus qui ressemble au pont brownien. *Séminaire de Probabilités XXI. Lecture Notes Math.* **1247**, 270-275. Springer, Berlin 1987. (avec **P. Biane** et **M. Yor**)

24. Some intersection properties of Brownian motion and random walks. *Proceedings of the First World Congress of the Bernoulli Society (Taschkent 1986), Vol. 1,* pp. 547-556. V.N.U. Science Press, Utrecht 1987.

25. Fluctuation results for the Wiener sausage. *Ann. Probab.* **16**, 991-1018 (1988)

26. Sur une conjecture de M. Kac. *Probab. Th. Rel. Fields* **78**, 389-402 (1988)

27. Sur les fonctions polaires pour le mouvement brownien. *Séminaire de Probabilités XXII. Lecture Notes Math.* **1321**, 186-189. Springer, Berlin 1988.

28. Propriétés trajectorielles d'une classe de processus de diffusion hypoelliptiques. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **307**, 1005-1010 (1988) (avec **M. Chaleyat-Maurel**)

29. Multiple points for Lévy processes. *Ann. Probab.* **17**, 503-515 (1989) (avec **J. Rosen** et **N.R. Shieh**)

30. The exact Hausdorff measure of Brownian multiple points II. *Seminar on Stochastic Processes 1988*, 193-197. Birkhäuser, Boston 1989.

31. Introduction au mouvement brownien. *Gazette des Mathématiciens* **40**, 43-64 (1989)

32. Marches aléatoires, mouvement brownien et processus de branchement. *Séminaire de Probabilités XXIII. Lecture Notes Math.* **1372**, 258-274. Springer, Berlin 1989.

33. Green function, capacity and sample path properties for a class of hypoelliptic diffusion processes. *Probab. Th. Rel. Fields* **83**, 219-264 (1989) (avec **M. Chaleyat-Maurel**)

34. Une construction trajectorielle de certains processus de Markov à valeurs mesures. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **308**, 533-538 (1989)

35. Wiener sausage and self-intersection local times. *J. Funct. Anal.* **88**, 299-341 (1990)

36. Enlacements du mouvement brownien autour des courbes de l'espace. *Trans. Amer. Math. Soc.* **317**, 687-721 (1990) (avec **M. Yor**)

37. On polar sets for hypoelliptic diffusion processes. *Stochastic Analysis and Related Topics. Lecture Notes Math.* **1444**, 204-212. Springer, Berlin 1990. (avec **M. Chaleyat-Maurel**)

38. The range of stable random walks. *Ann. Probab.* **19**, 650-705 (1991) (avec **J. Rosen**)

39. Brownian excursions, trees and measure-valued branching processes. *Ann. Probab.* **19**, 1399-1439 (1991)

40. On the connected components of the complement of a two-dimensional Brownian path. *Random Walks, Brownian Motion and Interacting Particle Systems*, pp.323-338. Birkhäuser, Boston 1991.

41. Points cônes du mouvement brownien plan, le cas critique. *Probab. Th. Rel. Fields* **93**, 231-247 (1992) (avec **T. Meyre**)

42. Some properties of planar Brownian motion. In: *Ecole d'été de probabilités de Saint Flour XX - 1990. Lecture Notes Math.* **1527**, 111-235. Springer, Berlin 1992.

43. The geometry of the Brownian curve. *Bull. Sci. Math.* **117**, 91-106 (1993) (avec **B. Duplantier**, **G.F. Lawler** et **T.J. Lyons**)

44. A class of path-valued Markov processes and its connections with superprocesses. *Probab. Th. Rel. Fields* **95**, 25-46 (1993)

45. The uniform random tree in a Brownian excursion. *Probab. Th. Rel. Fields* **96**, 369-383 (1993)

46. Les solutions positives de $\Delta u = u^2$ dans le disque unité. *C.R. Acad. Sci. Paris* **317**, Série I, 873-878 (1993)

47. Mean curvature and the heat equation. *Math. Z.* **215**, 437-464 (1994) (avec **M. van den Berg**)

48. Hitting probabilities and potential theory for the Brownian path-valued process. *Ann. Inst. Fourier* **44**, 277-306 (1994)

49. A path-valued Markov processes and its connections with partial differential equations. In: *Proceedings First European Congress of Mathematics, Vol.II*, pp.185-212. Birkhäuser, Boston 1994.

50. A lemma on super-Brownian motion with some applications. In: *The Dynkin Festschrift*, M.I. Freidlin ed., pp.237-251. Birkhäuser, Boston 1994.

51. Sur la mesure de sortie du super mouvement brownien. *Probab. Th. Rel. Fields* **99**, 251-275 (1994) (avec **R. Abraham**)

52. Exponential moments for the renormalized self-intersection local time of planar Brownian motion. *Séminaire de Probabilités XXVIII. Lecture Notes Math.* **1583**, 172-180. Springer, Berlin 1994.

53. The Brownian path-valued process and its connections with partial differential equations. Stochastic Analysis (Cranston, Pinsky eds). Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 57, pp.427-437. AMS, Providence 1995.

54. A new approach to the single-point catalytic super-Brownian motion. *Probab. Th. Rel. Fields* **102**, 63-82 (1995) (avec **K. Fleischmann**)

55. The Brownian snake and solutions of $\Delta u = u^2$ in a domain. *Probab. Th. Rel. Fields* **102**, 393-432 (1995)

56. A new class of exceptional times of linear Brownian motion. *Ann. Probab.* **23**, 1605-1626 (1995) (avec **S. Aspandiiarov**)

57. The Hausdorff measure of the support of two-dimensional super Brownian motion. *Ann. Probab.* **23**, 1719-1747 (1995) (avec **E. Perkins**)

58. The packing measure of the support of super-Brownian motion. *Stoch. Process. Appl.* **59**, 1-20 (1995) (avec **E. Perkins** et **S.J. Taylor**)

59. Super-Brownian motions in catalytic media. In: *Branching Processes*, C.C. Heyde ed. *Lecture Notes in Statistics* **99**, pp. 122-134. Springer, Berlin 1995. (avec **D. Dawson** et **K. Fleischmann**)

60. Arbres aléatoires et processus de Lévy. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I* **321**, 1241-1244 (1995) (avec **Y. Le Jan**)

61. A probabilistic approach to the trace at the boundary for solutions of a semilinear parabolic partial differential equation. *J. Appl. Math. Stoch. Anal.* **9**, 399-414 (1996)

62. A probabilistic Poisson representation for solutions of $\Delta u = u^2$ in a planar domain. *Comm. Pure Appl. Math.* **50**, 69-103 (1997)

63. Spatial branching processes and subordination. *Canadian Math. J.* **49**, 24-54 (1997) (avec **J. Bertoin** et **Y. Le Jan**)

64. Wiener's test for super-Brownian motion and the Brownian snake. *Probab. Th. Rel. Fields* **108**, 103-129 (1997) (avec **J.S. Dhersin**)

65. Marches aléatoires auto-évitantes et mesures de polymère. *Séminaire de Probabilités XXXI. Lecture Notes Math.*, **1655**, 103-112. Springer, Berlin 1997.

66. Branching processes in Lévy processes: The exploration process. *Ann. Probab.* **26**, 213-252 (1998). (avec **Y. Le Jan**)

67. Kolmogorov's test for super-Brownian motion. *Ann. Probab.* **26**, 1041-1056 (1998) (avec **J.S. Dhersin**)

68. Branching processes in Lévy processes: Laplace functionals of snakes and superprocesses. *Ann. Probab.* **26**, 1407-1432 (1998) (avec **Y. Le Jan**)

69. Branching processes, random trees and superprocesses. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berlin 1998. Documenta Mathematica.

70. The Hausdorff measure of the range of super-Brownian motion. In: *Perplexing Problems in Probability. Festschrift in Honor of Harry Kesten*, M. Bramson, R. Durrett eds, pp. 285-314. Birkhäuser, 1999.

71. *Spatial Branching Processes, Random Snakes and Partial Differential Equations.* Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser, 1999.

72. Dynkin's contributions to superprocesses and partial differential equations. In: *Selected papers of E.B. Dynkin with commentary*, pp. 781-791. American Mathematical Society, Providence 2000

73. The Bolthausen-Sznitman coalescent and the genealogy of continuous-state branching processes. *Probab. Th. Rel. Fields* **117**, 249-266 (2000) (avec **J. Bertoin**)

74. Processus de branchement et superprocessus. In: *Développement des mathématiques 1950-2000*, pp. 763-793. Birkhaüser 2000.

75. *Random trees and spatial branching processes.* Maphysto Lecture Notes Series (University of Aarhus), vol. 9 (80 pp.), 2000.

    Disponible à l'adresse http://www.maphysto.dk/publications/MPS-LN/2000/9.pdf

76. Super-Brownian limits of voter model clusters. *Ann. Probab.* **29**, 1001-1032 (2001) (avec **M. Bramson** et **T. Cox**)

77. Super-Brownian motion with reflecting historical paths. *Probab. Th. Rel. Fields* **121**, 447-491 (2001) (avec **K. Burdzy**)

78. Exposants critiques pour le mouvement brownien et les marches aléatoires. Séminaire Bourbaki, Novembre 1999. *Astérisque* **276**, 29-51 (2002)

79. *Random Trees, Lévy Processes and Spatial Branching Processes.* *Astérisque* **281** (2002) (avec **T. Duquesne**)

80. Stochastic flows associated to coalescent processes. *Probab. Th. Rel. Fields* **26**, 261-288 (2003) (avec **J. Bertoin**)

81. Stochastic integral representation and regularity of the density for the exit measure of super-Brownian motion. *Ann. Probab.* **33**, 194-222 (2005) (avec **L. Mytnik**)

82. Probabilistic and fractal aspects of Lévy trees. *Probab. Th. Rel. Fields* **131**, 553-603 (2005) (avec **T. Duquesne**)

83. Stochastic flows associated to coalescent processes II: Stochastic differential equations. *Annales Inst. H. Poincaré Probab. Stat.* **41**, 307-333 (2005) (avec **J. Bertoin**)

84. Random trees and applications. *Probability Surveys* **2**, 245-311 (2005)

85. Conditioned Brownian trees. *Annales Inst. H. Poincaré Probab. Stat.* **42**, 455-489 (2006) (avec **M. Weill**)

86. A conditional limit theorem for tree-indexed random walk. *Stochastic Process. Appl.* **116**, 539-567 (2006)

87. Random real trees. *Annales Fac. Sci. Toulouse*, vol. XV, 35-62 (2006)

88. On the occupation measure of super-Brownian motion. *Electronic Comm. Probab.* **11**, 252-265 (2006) (avec **M. Merle**)

89. Stochastic flows associated to coalescent processes III: Infinite population limits. *Illinois J. Math.* **50**, 147-181 (2006) (avec **J. Bertoin**)

90. The Hausdorff measure of stable trees. *Alea* **1**, 393-415 (2006) (avec **T. Duquesne**)

91. Probabilistic approach to a class of semilinear partial differential equations. To appear in the volume "Perspectives in Nonlinear Partial Differential Equations: In honor of Haim Brezis", *Contemporary Mathematics*, AMS.

92. The topological structure of scaling limits of large planar maps. *Inventiones Math.* **169**, 621-670 (2007)

93. Les travaux de Wendelin Werner. *Gazette des Mathématiciens* **112**, 7-17 (2007)

94. Brownian motion and stochastic processes. In the volume *Princeton Companion to Mathematics*, T. Gowers ed., Princeton University Press 2008.

95. Scaling limits of bipartite planar maps are homeomorphic to the 2-sphere. *Geomet. Funct. Anal.* **18**, 893-918 (2008) (avec **F. Paulin**).

96. The continuous limit of large random planar maps. Fifth Colloquium on Mathematics and Computer Science. *DMTCS proceedings* **AI**, 1-18 (2008) (electronic)

97. Geodesics in large planar maps and in the Brownian map. *Acta Math.*, to appear.

98. On the re-rooting invariance property of Lévy trees. *Electronic Comm. Probab.* **14**, 371-326 (2009) (avec **T. Duquesne**)

99. Large random planar maps and their scaling limits. Proceedings 5th European Congress of Mathematics (Amsterdam 2008) pp. 253–276. European Math. Society, Zürich 2010.

100. Scaling limits of random planar maps with large faces. *Ann. Probab.*, to appear. (avec **G. Miermont**)

101. Itô's excursion theory and random trees. *Stoch. Process. Appl.* **120**, 721-749 (2010)

102. Escape probabilities for branching Brownian motion among mild obstacles. Preprint (avec **A. Véber**)

103. Scaling limits for the uniform infinite quadrangulation. Preprint (avec **L. Ménard**)

104. Random recursive triangulations of the disk via fragmentation theory. Preprint (avec **N. Curien**)