MOUVEMENT BROWNIEN PROCESSUS DE BRANCHEMENT ET SUPERPROCESSUS

Jean-François LE GALL

Notes de Cours de DEA 1994

Chapter 0

Introduction

Le but de ce cours est d'abord de décrire certaines relations existant entre marches aléatoires ou mouvement brownien et processus de branchement, ensuite d'appliquer ces relations à une construction trajectorielle des processus de branchement à valeurs mesures appelés superprocessus, dans le cas particulier du super-mouvement brownien. Cette construction repose sur l'introduction d'un processus de Markov à valeurs dans un espace de trajectoires, appelé ici le serpent brownien, qui présente un intérêt propre. Elle a aussi l'avantage de rendre plus évidentes certaines propriétés du super-mouvement brownien et, bien que ces applications ne soient pas développées ici, elle fournit des méthodes efficaces pour l'étude fine de ce processus et de ses liens avec les équations aux dérivées partielles. Le présent cours a été conçu de façon à exiger un minimum de connaissances préalables. En particulier, nous donnons une approche complète des temps locaux et de la théorie des excursions du mouvement brownien, qui constituent deux outils importants. Nous décrivons ci-dessous le contenu des huit chapitres de ce cours en mettant l'accent sur les liens entre les différents thèmes abordés.

Le point de départ du présent exposé est une correspondance remarquable, découverte par Harris, entre l'excursion positive de la marche aléatoire simple et l'arbre associé à un processus de Galton-Watson critique de loi de reproduction géométrique. On décrit cette correspondance de façon imagée en disant que le déplacement d'une particule qui monte et descend le long des branches de l'arbre fournit une excursion de marche aléatoire. Dans cette correspondance, le nombre de branches à un niveau k donné coïncide avec le nombre de montées de k à $k+1$ pour la marche aléatoire. On sait bien que le mouvement brownien réel apparaît comme limite de marches aléatoires de pas petit, ce qui suggère d'étudier les applications au mouvement brownien de la correspondance de Harris. Dans le chapitre 2, nous introduisons la notion importante de temps local du mouvement brownien, qui constitue le "bon" analogue des nombres de montées pour les marches aléatoires. Nous étudions aussi certaines propriétés fondamentales des temps locaux. Ensuite, le chapitre 3 développe, surtout en vue d'applications ultérieures, les liens entre temps locaux d'un mouvement brownien et nombres de montées pour certaines marches aléatoires plongées dans ce mouvement brownien. Grâce à ces liens, on obtient comme conséquence directe de la correspondance de Harris un théorème important de Ray-Knight sur la loi des temps locaux browniens considérés comme processus en la variable d'espace.

Le chapitre 4 introduit les superprocessus, dans le cas particulier fondamental du super-mouvement brownien. On décrit la construction traditionnelle, par approximation discrète, de ces processus. Pour cela on part de l'arbre de Galton-Watson évoqué ci-dessus, ou plus généralement d'un nombre fini de tels arbres, qu'on interprète comme arbres généalogiques d'un système de particules se déplaçant selon des mouvements browniens indépendants dans $\mathbb{R}^d$. Le processus de Markov qui vaut à chaque instant la somme des masses de Dirac aux positions des particules en vie est le processus de branchement brownien. Par un passage à la limite lorsque le nombre de particules présentes à l'instant initial tend vers l'infini, et la durée de vie de chaque particule vers 0, on aboutit à un processus de Markov à valeurs dans l'espace des mesures finies sur $\mathbb{R}^d$, qui est le super-mouvement brownien. Cette approche assez élémentaire donne aussi la fonctionnelle de Laplace du semi-groupe du super-mouvement brownien. Grâce à cette fonctionnelle de Laplace, nous développons dans le chapitre 5 certains calculs de moments qui conduisent rapidement à des applications intéressantes. Nous étudions en particulier la dimension de Hausdorff du support du super-mouvement brownien, ainsi que des conditions suffisantes assurant que le support rencontre un ensemble donné.

De façon schématique, le processus de branchement brownien, qui est la forme discrète du super-mouvement brownien, est construit en ajoutant des déplacements spatiaux (browniens) à un arbre de Galton-Watson. En pensant à la correspondance de Harris, on est amené à chercher un processus aléatoire qui serait à l'excursion de la marche aléatoire simple ce que le processus de branchement brownien est à l'arbre de Galton-Watson. Ce processus, le serpent (brownien) discret du chapitre 6, prend ses valeurs dans l'espace des trajectoires arrêtées dans $\mathbb{R}^d$. A chaque instant, la valeur du serpent discret est une trajectoire brownienne dans $\mathbb{R}^d$, issue d'un point fixé, dont la longueur (le temps de vie) est la valeur à l'instant considéré d'une marche aléatoire simple réfléchie sur $\mathbb{N}$. Si à l'instant suivant la marche aléatoire saute de $+1$ on prolonge d'autant la trajectoire brownienne, si au contraire la marche aléatoire saute de -1, on raccourcit la trajectoire brownienne en effaçant son extrémité. Ensuite, le même passage à la limite qui fait passer de la marche aléatoire simple au mouvement brownien conduit du serpent discret au serpent brownien, processus de Markov continu fortement markovien à valeurs dans l'espace des trajectoires arrêtées. A chaque instant, la valeur du serpent brownien est une trajectoire brownienne arrêtée dans $\mathbb{R}^d$, dont le temps de vie évolue comme un mouvement brownien réfléchi dans $\mathbb{R}_+$.

L'ensemble des valeurs prises par un serpent discret est exactement l'ensemble des trajectoires historiques d'un processus de branchement brownien. Comme le passage à la limite du processus de branchement brownien vers le super-mouvement brownien correspond au passage à la limite du serpent discret vers le serpent brownien, on s'attend aussi à ce que les valeurs prises par le serpent brownien soient les trajectoires historiques des "particules individuelles" d'un super-mouvement brownien. Une telle affirmation n'a a priori guère de sens puisqu'il n'y a pas de particules individuelles dans le super-mouvement brownien, mais seulement à chaque instant la donnée d'une mesure qui représente la distribution des particules en vie à cet instant. Néanmoins, cette idée peut être formalisée rigoureusement et conduit à la construction du super-mouvement brownien, à partir du serpent brownien, développée dans le chapitre 7. Cette construction a de multiples avantages. Elle donne immédiatement accès au "processus historique" rendant compte des trajectoires individuelles des particules. Elle permet aussi de compléter rapidement les informations trajectorielles obtenues dans le chapitre 5. Dans le chapitre 8 enfin, nous appliquons la construction du chapitre 7 à la décomposition de Lévy-Khintchine du super-mouvement brownien. Cette décomposition revient dans l'évolution du super-mouvement brownien à classer les particules en fonction de leur ancêtre à l'instant initial. En termes du serpent brownien, on distingue les différentes excursions en dehors de 0 du processus des temps de vie, qui est rappelons-le un mouvement brownien réfléchi dans $\mathbb{R}_+$. La mesure d'excursion obtenue en considérant le serpent brownien (ou le super-mouvement brownien par la correspondance du chapitre 7) sur une seule de ces excursions joue un rôle important dans de multiples applications que nous ne développons pas ici.

Il est sans doute regrettable que le cours s'arrête à ce point, puisque les outils introduits sont susceptibles de nombreuses applications. Un exemple typique d'application du serpent brownien aux propriétés trajectorielles du super-mouvement brownien est fourni par l'article [28], qui complète les résultats antérieurs obtenus dans [33] et [8] notamment. Une introduction aux liens entre le serpent brownien et les équations aux dérivées partielles se trouve dans l'article [26], motivé par les travaux de Dynkin [11], [12] pour les superprocessus. Voir aussi [27] et les références de cet article pour des développements plus récents. Enfin, il faut signaler que plusieurs versions "browniennes" de la correspondance de Harris ont été étudiées par divers auteurs, en commençant par Neveu et Pitman [31]. Aldous [2] introduit un arbre aléatoire continu qui est à l'excursion brownienne ce que l'arbre de Galton-Watson est à l'excursion de la marche aléatoire simple. L'article [25] donne une approche simplifiée, reposant sur la théorie des excursions, du résultat principal d'Aldous. L'idée d'associer un arbre aléatoire infini à l'excursion brownienne est aussi exploitée par Abraham [1]. Tous ces travaux n'étudient pas directement les super-processus mais n'en sont pas moins étroitement liés à leur structure généalogique ainsi qu'à celle du serpent brownien.

Chapter 1

Arbres de Galton-Watson et Excursions de Marches Aléatoires

L'objet principal de ce chapitre est d'établir une correspondance bijective simple, préservant la mesure, entre l'excursion positive de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ et l'arbre associé à un processus de Galton-Watson géométrique de paramètre 1/2. Cette correspondance a été observée pour la première fois par Harris [19] et a ensuite été retrouvée ou exploitée par de nombreux auteurs. Notre formulation utilise un formalisme d'arbre emprunté à Neveu [30]. En application de ce résultat, nous établirons un théorème limite pour les nombres de visites d'une marche aléatoire simple sur $\mathbb{N}$ en différents niveaux positifs.

1.1 Arbres de Galton-Watson

1.1.1 Formalisme d'arbres

Avant d'introduire la notion d'arbre, nous commençons par définir les arêtes de l'arbre. L'ensemble des arêtes est par définition

$$U = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}_*^n$$

où $\mathbb{N}_* = \{1, 2, 3, ...\}$ est l'ensemble des entiers (strictement) positifs et par convention $\mathbb{N}_*^0 = \{\partial\}$ est réduit à un seul élément ∂ qu'on interprète comme étant la suite vide, et qui dans notre formalisme d'arbre sera l'ancêtre de la population.

Un élément de U autre que ∂ est donc un n-uplet $u = (i_1, ..., i_n)$ que pour simplifier on notera $u = i_1...i_n$. La longueur (la génération) de u est alors $|u| = n$, et par convention $|\partial| = 0$.

Si $j \in \mathbb{N}_*$, on note $uj = i_1...i_nj$ qui est donc une arête de longueur $n+1$. Les éléments de la forme uj sont les "enfants" de l'arête u. Plus généralement, pour $v = k_1...k_m \in U$, on note $uv = j_1...j_nk_1...k_m$. En particulier, on a $u\partial = u$.

Définition. Un arbre $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble fini de U qui satisfait les propriétés suivantes:

(i) $\partial \in \mathcal{A}$;

(ii) si $uj \in \mathcal{A}$, alors $u \in \mathcal{A}$;

(iii) si $u \in \mathcal{A}$, il existe un entier $k_u(\mathcal{A}) \in \mathbb{N}$ tel que $uj \in \mathcal{A}$ si et seulement si $1 \leq j \leq k_u(\mathcal{A})$.

On note Δ l'ensemble de tous les arbres.

On notera simplement k_u à la place de $k_u(\mathcal{A})$ quand il n'y aura pas ambiguïté. La propriété (i) exprime que l'ancêtre appartient à l'arbre, pour tout arbre $\mathcal{A}$. La propriété (ii) signifie que le "père" d'une arête de l'arbre appartient aussi à l'arbre. Enfin, la propriété (iii) indique qu'une arête u de l'arbre a exactement k_u enfants dans l'arbre qui sont les arêtes uj pour $j \in \{1, ..., k_u\}$.

Dans la définition précédente, nous nous sommes limités aux arbres *finis*. Cela sera suffisant pour nos applications qui concernent le cas de processus de branchement critiques ou sous-critiques.

Soit $u \in \mathcal{A}$ un arbre. Pour toute arête $u \in \mathcal{A}$, on note $T_u\mathcal{A}$ le "sous-arbre" issu de l'arête u défini par

$$T_u\mathcal{A} = \{v \in U,\, uv \in \mathcal{A}\}.$$

Il est immédiat que $T_u\mathcal{A}$ est encore un arbre.

1.1.2 L'arbre associé à un processus de Galton-Watson.

Soit ν une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$. On appelle processus (de branchement) de Galton-Watson de loi de reproduction ν une chaîne de Markov $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \geq 0$, la loi conditionnelle de Z_{n+1} sachant que $Z_n = z$ est la loi de

$$\sum_{i=1}^{z} \xi_i,$$

où les variables ξ_i sont indépendantes et de loi ν. Le processus de Galton-Watson rend compte de l'évolution au cours du temps d'une population où le nombre d'enfants de chaque individu suit la loi ν.

Il est bien connu que dans les cas sous-critique (i.e. $\sum k\,\nu(k) < 1$) et critique ($\sum k\,\nu(k) = 1$), il y a extinction de la population, c'est-à-dire

$$Z_n = 0, \text{ pour tout } n \text{ assez grand, p.s.,}$$

sauf dans le cas trivial où ν est la mesure de Dirac en 1, que nous excluons systématiquement dans la suite.

La proposition suivante permet dans les cas critique et sous-critique d'associer au processus de Galton-Watson de loi de reproduction ν un arbre aléatoire qui représente la généalogie de la population.

Proposition 1.1 *Supposons que* $\sum_{i=1}^{\infty} k\,\nu(k) \leq 1$. *Il existe une unique probabilité* $\Pi(d\mathcal{A})$ *sur* Δ *qui vérifie les deux propriétés suivantes:*

(i) $\Pi(k_\partial = p) = \nu(p),\ \forall p \in \mathbb{N}$;

(ii) *pour tout* $p \geq 1$, *sous la probabilité conditionnelle* $\Pi(\cdot \mid k_\partial = p)$, *les sous-arbres* $T_1\mathcal{A}, ..., T_p\mathcal{A}$ *sont indépendants et de loi* Π.

Soit

$$Z_n(\mathcal{A}) = \mathrm{Card}\,\{u \in \mathcal{A};\, |u| = n\}.$$

La loi sous Π *du processus* (Z_n) *est la loi du processus de Galton-Watson de loi de reproduction* ν, *avec valeur initiale* $Z_0 = 1$.

Preuve. On commence par construire la probabilité Π. Pour cela, on se donne une famille $(\xi_u)_{u\in U}$ de variables aléatoires indépendantes de loi ν, indexée par U. On définit ensuite un sous-ensemble aléatoire A de U en posant

$$A = \{u = k_1...k_n \in U; \forall j \in \{1, ..., n\},\ k_j \leq \xi_{k_1...k_{j-1}}\}.$$

Par convention, $\partial \in A$. Vérifions d'abord que A est fini p.s. Posons

$$Y_n = \mathrm{Card}\,\{v \in A;\, |v| = n\}.$$

Alors $Y_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, Y_n est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(\xi_u; |u| < n\}$. De plus, par construction,

$$Y_{n+1} = \sum_{|v|=n} 1_{\{v\in A\}}\, \xi_v,$$

et lorsque $|v| = n$, $1_{\{v\in A\}}$ est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(\xi_u; |u| < n\}$, alors que les variables ξ_v sont indépendantes de cette même tribu. Il en découle que la loi conditionnellement à $\sigma(\xi_u; |u| < n\}$ de Y_{n+1} est la loi de la somme de Y_n variables aléatoires indépendantes de loi ν. Finalement, (Y_n) est un processus de Galton-Watson de loi de reproduction ν.

Comme on sait que $Y_n = 0$ pour n assez grand, p.s., on obtient que l'ensemble A est p.s. fini. Il est ensuite clair que A est un arbre. La probabilité Π est définie comme étant la loi de A. La propriété (i) est immédiate puisque $k_\partial(A) = \xi_\partial$. Pour la propriété (ii), on observe que, sur l'ensemble $\{\xi_\partial = p\}$, les sous-arbres $T_1A, ..., T_pA$

sont construits respectivement à partir des familles $(\xi_{1u}, u \in U), ..., (\xi_{pu}, u \in U)$ de la même façon que A est construit à partir de $(\xi_u, u \in U)$. Enfin la propriété concernant (Z_n) a déjà été établie.

Il reste à vérifier que les propriétés (i) et (ii) caractérisent Π. Soit Π' une autre probabilité sur Δ satisfaisant les mêmes propriétés. Pour voir que $\Pi = \Pi'$, il suffit de vérifier que, pour tous $u_1, ..., u_p \in U$, on a

$$\Pi(u_1 \in \mathcal{A}, \cdots, u_p \in \mathcal{A}) = \Pi'(u_1 \in \mathcal{A}, \cdots, u_p \in \mathcal{A}).$$

On raisonne par récurrence sur $\max(|u_j|)$. Le résultat est trivial si $\max(|u_j|) = 0$. Ensuite, on peut supposer $u_j \neq \partial$ pour tout j, et choisir l'indexation de façon que $u_1 = i_1 v_1, ..., u_p = i_p v_p$ avec

$$i_1 = i_2 = \cdots = i_{p_1},\ i_{p_1+1} = \cdots = i_{p_2}, \cdots, i_{p_{r-1}+1} = \cdots = i_{p_r} \quad (p_r = p)$$

et $i_{p_1}, ..., i_{p_r}$ sont distincts. Alors, en utilisant (ii),

$$\begin{aligned}
&\Pi(u_1 \in \mathcal{A}, \cdots, u_p \in \mathcal{A}) \\
&\quad = \Pi(\max(i_l) \leq k_\partial,\ v_1 \in T_{i_1}\mathcal{A}, \cdots, v_p \in T_{i_p}\mathcal{A}) \\
&\quad = \Pi(\max(i_l) \leq k_\partial)\, \Pi(v_1 \in \mathcal{A}, \cdots, v_{p_1} \in \mathcal{A}) \cdots \Pi(v_{p_{r-1}+1} \in \mathcal{A}, \cdots, v_{p_r} \in \mathcal{A})
\end{aligned}$$

et, d'après (i) et l'hypothèse de récurrence, cette quantité coïncide avec celle que l'on obtiendrait en remplaçant Π par Π'. Cela termine la preuve. $\square$

Remarque. La propriété (ii) est un cas particulier de la propriété de branchement: voir Neveu [30] pour la généralisation naturelle aux sous-arbres issus des arêtes de la n^{ieme} génération.

1.2 Excursions de la marche aléatoire simple.

1.2.1 Notations

On note E l'ensemble des applications $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ telles que $\omega(0) = 0$, $\sigma(\omega) = \inf\{n > 0,\ \omega(n) = 0\} < \infty$, $\omega(k) = 0$ pour tout $k \geq \sigma(\omega)$ et

$$|\omega(k) - \omega(k-1)| = 1,\ \forall k \in \{1, \cdots, \sigma(\omega)\}.$$

De manière évidente ω est soit strictement positive, soit strictement négative sur $]0, \sigma(\omega)[$. On note E_+ le sous-ensemble de E formé des excursions positives.

Soit maintenant $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. Cela signifie que $S_n = S_0 + Y_1 + ... + Y_n$, où les variables Y_j sont indépendantes, et indépendantes de S_0, et $P(Y_j = 1) = P(Y_j = -1) = 1/2$. Prenons $S_0 = 0$ et posons

$$T = \inf\{n > 0,\ S_n = 0\}.$$

La loi de $(S_{n \wedge T})_{n \in \mathbb{N}}$ est une probabilité sur E, notée $\mathbb{P}(d\omega)$. On note aussi $\mathbb{P}_+(d\omega) = \mathbb{P}(d\omega \,|\, w(1) = 1)$, qui est donc la loi de $(S_{n \wedge T})_{n \in \mathbb{N}}$ conditionnellement à $\{S_1 > 0\}$.

1.2.2 Un résultat préliminaire

Sur l'espace E_+ des excursions positives définissons une suite de temps aléatoires $\rho_0, ..., \rho_k, ...$ en posant

$$\rho_0(\omega) = 1,\ \rho_{k+1}(\omega) = \inf\{n > \rho_k(\omega),\, \omega(n) = 1\},$$

avec la convention habituelle $\inf \emptyset = \infty$. Les instants ρ_k tels que $\rho_k < \infty$ sont donc les instants successifs de passage en 1 pour ω. Soit

$$N = \sup\{k,\, \rho_k < \infty\},$$

qui représente le nombre d'excursions au-dessus de 1 effectuées par ω. Ces excursions sont définies, pour $p \in \{1, ..., N(\omega)\}$, par

$$\tau_p\omega(n) = \omega((\rho_{p-1} + n) \wedge \rho_p) - 1$$

de façon que $\tau_p\omega \in E_+$.

Proposition 1.2 *Pour tout* $p \in \mathbb{N}$*,*

$$\mathbb{P}_+(N = p) = 2^{-p-1}$$

et pour tout $p \geq 1$*, les sous-excursions* $\tau_1\omega, ..., \tau_p\omega$ *sont sous la probabilité conditionnelle* $\mathbb{P}_+(\cdot \mid N = p)$ *indépendantes de loi* $\mathbb{P}_+$*.*

Preuve. Le résultat de la proposition est pour l'essentiel une conséquence de la propriété de Markov forte. Soit (S_n) une marche aléatoire simple avec $S_0 = 1$ et soient $R_1, ..., R_k, ...$ les temps de retour successifs de (S_n) en 0 définis par récurrence par

$$R_0 = 0,\ R_{k+1} = \inf\{n > R_k,\, S_n = 1\}.$$

Les instants R_k sont tous finis p.s. puisque la marche aléatoire simple est récurrente. Pour tout $k \geq 1$, soit Y^k l'élément aléatoire de E défini par

$$Y^k(n) = S_{(R_{p-1}+n)\wedge R_p} - 1.$$

Alors $Y^1, Y^2, ...$ sont indépendants et de loi $\mathbb{P}$ (pour toute chaîne de Markov, les excursions successives en dehors d'un point récurrent sont indépendantes et de même loi, par une application immédiate de la propriété de Markov forte). Posons aussi

$$T = \inf\{n, S_n = 0\},\ M = \sup\{p, R_p < T\}.$$

Par construction de $\mathbb{P}_+$, la loi sous $\mathbb{P}_+$ de $(N, \tau_1\omega, ..., \tau_N\omega)$ coïncide avec la loi de $(M, Y^1, ..., Y^M)$. Pour déterminer cette dernière loi, on observe d'abord que

$$P(M = p) = P(Y^1(1) = 1, \cdots, Y^p(1) = 1, Y^{p+1}(1) = -1) = 2^{-p-1},$$

grâce à l'indépendance des Y^j et au fait que $\mathbb{P}(\omega(1) = 1) = \mathbb{P}(\omega(1) = -1) = 1/2$. Enfin, il est immédiat que, conditionnellement à $\{M = p\} = \{Y^1(1) = 1, \cdots, Y^p(1) = 1, Y^{p+1}(1) = -1\}$, $Y^1, \cdots, Y^p$ restent indépendants de loi $\mathbb{P}(\cdot|\omega(1) = 1) = \mathbb{P}_+$. $\square$

1.3 La correspondance entre arbre et excursion

Dans ce paragraphe, nous notons Π la probabilité sur Δ définie par la Proposition 1 avec le choix

$$\nu(p) = 2^{-p-1}, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Remarquons que $\sum_{p=0}^{\infty} p\nu(p) = 1$. On note aussi ω_0 l'unique élément de E_+ tel que $\omega_0(1) = 1,\ \sigma(\omega_0) = 2$.

Théorème 1.3 *Il existe une unique bijection $J : E_+ \to \Delta$ qui vérifie les deux propriétés suivantes:*

(i) $J(\omega_0) = \{\partial\}$*;*

(ii) *pour tout $\omega \in E_+$, $k_\partial(J(\omega)) = N(\omega)$ et, pour $p \in \{1, \cdots, N(\omega)\}$,*

$$J(\tau_p\omega) = T_p J(\omega).$$

De plus, $J(\mathbb{P}_+) = \Pi$.

Si l'on représente l'arbre verticalement, chaque arête correspondant à un segment de longueur 1 et les descendants d'une arête étant placés au-dessus de l'arête en question, l'application J^{-1} revient à associer à l'arbre $\mathcal{A}$ le trajet d'une particule se déplaçant sur cet arbre en partant de la base, en montant et descendant les branches rencontrées successivement.

Preuve. On commence par construire $J(\omega)$, ce qui montrera aussi que J est uniquement déterminée par (i) et (ii). On procède par récurrence sur $\sigma(\omega)$. Le cas $\sigma(\omega) = 2$ est donné par (i). Supposons donc qu'on a défini $J(w)$ lorsque $\sigma(\omega) \leq 2p$, et soit ω tel que $\sigma(\omega) = 2p + 2$. Alors, pour tout $p \in \{1, ..., N(\omega)\}$, $\sigma(\tau_p\omega) \leq 2p$. On peut donc définir $J(\omega) = \mathcal{A}$ comme étant l'unique arbre tel que $k_\partial(\mathcal{A}) = N(\omega)$ et $T_p\mathcal{A} = J(\tau_p\omega)$ pour $1 \leq p \leq N(\omega)$. Par construction, (i) et (ii) sont satisfaites.

Pour établir que J est bijective, on se donne $\mathcal{A} \in \Delta$ et on vérifie par récurrence sur $\mathrm{Card}\,\mathcal{A}$ qu'il existe un unique $\omega \in E$ tel que $J(\omega) = \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A} = \{\partial\}$, on voit qu'on doit avoir $\omega = \omega_0$. Ensuite, en utilisant (ii) et l'hypothèse de récurrence appliquée aux arbres $T_p\mathcal{A}$, on voit que ω est l'élément (unique) de E tel que $N(\omega) = k_\partial(\mathcal{A})$ et, pour $p = 1, \cdots, N(\omega)$, $\tau_p\omega = \omega_p$, où ω_p est l'unique élément de E_+ tel que $J(\omega_p) = T_p\mathcal{A}$.

Il reste à montrer que $J(\mathbb{P}_+) = \Pi$. Posons $\Pi' = J(\mathbb{P}_+)$. On vérifie que Π' possède les deux propriétés caractéristiques de Π, énoncées dans la Proposition 1. D'abord, d'après la Proposition 2,

$$\Pi'(k_\partial = p) = \mathbb{P}_+(N = p) = 2^{-p-1} = \nu(p).$$

Ensuite, en utilisant toujours la Proposition 2, on a pour tout $p \geq 1$ et pour tous $a_1, ..., a_p \in \Delta$,

$$\begin{aligned}
\Pi'(k_\partial = p, T_1\mathcal{A} = a_1, ..., T_p\mathcal{A} = a_p) &= \mathbb{P}_+(N = p, J(\tau_1\omega) = a_1, ..., J(\tau_p\omega) = a_p) \\
&= \mathbb{P}_+(N = p)\mathbb{P}_+(J(\omega) = a_1)...\mathbb{P}_+(J(\omega) = a_p) \\
&= \Pi'(k_\partial = p)\Pi'(\mathcal{A} = a_1)...\Pi'(\mathcal{A} = a_p)
\end{aligned}$$

et on obtient bien que Π' vérifie la deuxième propriété de la Proposition 1. $\square$

Remarques. (a) Rappelons la notation $Z_p(\mathcal{A}) = \mathrm{Card}\,\{u \in \mathcal{A}, |u| = p\}$. On vérifie facilement par récurrence sur p que, si $J(\omega) = \mathcal{A}$,

$$Z_p(\mathcal{A}) = \mathrm{Card}\,\{n;\, \omega(n) = p, \omega(n+1) = p+1\},$$

qui représente le nombre de montées de ω du niveau p au niveau $p+1$, ou de manière équivalente le nombre d'excursions de ω au-dessus du niveau p. Comme conséquence du théorème ci-dessus, on voit donc que le nombre de montées de p à $p+1$, pour l'excursion positive de la marche aléatoire simple, est un processus de Galton-Watson de loi de reproduction géométrique.

(b) Toujours si $J(\omega) = \mathcal{A}$, on a aussi, pour tout $p \geq 1$,

$$\mathrm{Card}\,\{n, \omega(n) = p\} = Z_p(\mathcal{A}) + Z_{p-1}(\mathcal{A}).$$

Cette égalité peut aussi être vérifiée par récurrence, ou en utilisant (a) ci-dessus en observant que si $\omega(n) = p$ on a ou bien $\omega(n+1) = p+1$ (et alors n est le début d'une excursion au-dessus de p) ou bien $\omega(n+1) = p-1$, dans quel cas $n+1$ est la fin d'une excursion au-dessus de $p-1$.

(c) En utilisant (b), on trouve

$$\sigma(\omega) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{Card}\,\{n, \omega(n) = p\} = Z_0(\mathcal{A}) + \sum_{p=1}^{\infty}(Z_{p-1}(\mathcal{A}) + Z_p(\mathcal{A})) = 2\sum_{p=0}^{\infty} Z_p(\mathcal{A}).$$

A l'aide de cette formule, il est facile de retrouver la fonction génératrice de σ:

$$\mathbb{E}_+(r^\sigma) = 1 - \sqrt{1 - r^2}.$$

Cette formule peut bien sûr être rapidement obtenue par d'autres méthodes. Cependant, il est intéressant d'avoir une interprétation probabiliste du fait que la loi sous $\mathbb{P}_+$ de $\sigma/2$ est la loi de la population totale d'un processus de Galton-Watson.

1.4 Théorèmes limites

1.4.1 Approximation de diffusion pour les processus de Galton-Watson critiques

Nous nous proposons d'établir un théorème limite dû à Feller [17] qui décrit l'évolution d'un processus de branchement critique partant avec un grand nombre d'individus à l'instant 0. Nous considérons une mesure de probabilité ν sur $\mathbb{N}$ telle que $\sum k\,\nu(k) = 1$ et $\sum k^2\,\nu(k) < \infty$. Ces deux propriétés sont vérifiées par la loi géométrique $\nu(k) = 2^{-k-1}$. Soit $\alpha > 0$ une constante fixée. Pour tout $k \geq 1$, on note $(Z^k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus de Galton-Watson de loi de reproduction ν tel que $Z^k_0 = [\alpha k]$ ($[x]$ désigne la partie entière de x). On sait que p.s. pour n assez grand on a $Z^k_0 = 0$. Notre but est d'étudier l'évolution de ce processus entre l'instant 0 et l'instant d'extinction, lorsque la population initiale est grande. Pour cela un changement d'échelle approprié dans la variable de temps est nécessaire.

Théorème 1.4 *Soit $\rho^2 = \sum k^2\nu(k) - 1 = \mathrm{var}\,\nu$. Pour tout $t \geq 0$, posons*

$$Y^k_t = \frac{1}{k} Z^k_{[kt]}$$

Alors, pour tous $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p$, on a

$$\lim_{k\to\infty} \Big(Y^k_{t_0}, \cdots, Y^k_{t_p}\Big) = \Big(Y^\infty_{t_0}, \cdots, Y^\infty_{t_p}\Big),$$

où la convergence a lieu en loi, et la loi du vecteur limite est caractérisée par les deux propriétés suivantes:

(i) $Y^\infty_{t_0} = \alpha$;

(ii) *pour tout $j \geq 1$ et tout $\lambda \geq 0$,*

$$E\Big[\exp -\lambda Y^\infty_{t_j} \mid Y^\infty_{t_0}, \cdots, Y^\infty_{t_{j-1}}\Big] = \exp - \frac{\lambda Y^\infty_{t_{j-1}}}{1 + \frac{\rho^2}{2}\lambda(t_j - t_{j-1})}.$$

Remarques. On peut traduire le résultat du théorème en disant que la suite de processus $(Y^k_t, t \geq 0)$ converge, au sens de la convergence des lois marginales de dimension finie, vers le processus $(Y^\infty_t, t \geq 0)$ dont les lois marginales sont caractérisées par (i) et (ii). L'existence de ce processus découle du théorème d'extension de Kolmogorov (la condition de compatibilité nécessaire est obtenue par passage à la limite puisqu'elle est bien sûr satisfaite par les processus (Y^k_t)).

La formule (ii) montre que le processus limite (Y^∞_t) est markovien homogène, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Comme conséquence de résultats des chapitres suivants, nous verrons aussi que ce processus a une version continue et est p.s. identiquement nul pour t assez grand (cela correspond à la propriété d'extinction des processus de branchement). On peut montrer par le calcul stochastique que (Y_t^∞) est solution d'une équation différentielle stochastique de la forme

$$\begin{cases} dY_t^\infty = \rho\sqrt{Y_t^\infty}\, dB_t \\ Y_0^\infty = \alpha\ . \end{cases}$$

Lorsque $\rho = 2$, le processus (Y_t^∞) est appelé carré de processus de Bessel de dimension 0 (voir le chapitre XI de [35]). Dans les travaux traitant de processus de branchement, (Y_t^∞) est connu sous le nom de diffusion de Feller.

Nous pouvons dès à présent donner une description des noyaux de transition de (Y_t^∞), que nous interpréterons plus tard. Le noyau de transition $P_t(x, dy)$ de (Y_t^∞) est tel que

$$\int P_t(x, dy)\, e^{-\lambda y} = E[\exp -\lambda Y_t^\infty \mid Y_0^\infty = x] = \exp -\frac{\lambda x}{1 + \frac{\rho^2}{2}\lambda t}.$$

Or, on vérifie facilement que cette transformée de Laplace est celle de la mesure de probabilité μ_t^x sur $\mathbb{R}_+$ définie comme étant la loi de

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_M,$$

où les variables $e_1, \cdots, e_j, \cdots$ sont indépendantes de loi exponentielle de moyenne $\frac{\rho^2}{2}t$, et M est une variable de loi de Poisson de paramètre $(\frac{\rho^2}{2}t)^{-1}x$, indépendante des variables e_j.

Preuve. On raisonne par récurrence sur p. Le cas $p = 0$ est trivial. En supposant le résultat acquis à l'ordre $p - 1$, il faut montrer que, si φ est une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}^p$ et $\lambda \geq 0$,

$$\lim_{k\to\infty} E\big[\varphi(Y_{t_0}^k, ..., Y_{t_{p-1}}^k) \exp -\lambda Y_{t_p}^k\big] = E\Big[\varphi(Y_{t_0}^\infty, ..., Y_{t_{p-1}}^\infty) \exp -\frac{\lambda Y_{t_{p-1}}^\infty}{1 + \frac{\rho^2}{2}\lambda(t_p - t_{p-1})}\Big]. \tag{1.1}$$

En effet, cela entraîne que la transformée de Laplace conjointe de $(Y_{t_0}^k, ..., Y_{t_p}^k)$ converge vers celle de $(Y_{t_0}^\infty, ..., Y_{t_p}^\infty)$, ce qui suffit pour conclure.

Ensuite, soit g la fonction génératrice de ν,

$$g(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(k)\, r^k, \quad r \in [0, 1],$$

et soient g_n les itérées de g définies par récurrence par

$$g_1 = g, \quad g_{n+1} = g \circ g_n.$$

Si Z est un processus de Galton-Watson de loi de reproduction ν, on a pour tout $n \geq 1$

$$E[r^{Z_n} \mid Z_0 = k] = g_n(r)^k.$$

Nous utilisons cette égalité, avec la propriété de Markov à l'instant $[kt_{p-1}]$, dans le calcul suivant:

$$\begin{aligned} E\big[\varphi(Y^k_{t_0}, \cdots, Y^k_{t_{p-1}}) \exp -\lambda Y^k_{t_p}\big] &= E\big[\varphi(\frac{1}{k} Z^k_{[kt_0]}, \cdots, \frac{1}{k} Z^k_{[kt_{p-1}]}) \exp -\frac{\lambda}{k} Z^k_{[kt_p]}\big] \\ &= E\Big[\varphi(Y^k_{t_0}, \cdots, Y^k_{t_{p-1}})\, g_{[kt_p]-[kt_{p-1}]}(e^{-\lambda/k})^{kY^k_{t_{p-1}}}\Big]. \end{aligned}$$

Lemme 1.5 *On a*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{1 - g_m(r)} - \frac{1}{1-r} \right) = \frac{\rho^2}{2},$$

uniformément pour $r \in [0, 1[$.

Nous renvoyons au livre d'Athreya et Ney [3], p.19, pour une preuve de ce lemme. Dans le cas de la loi géométrique, qui est celui que nous utiliserons, on calcule facilement

$$g(r) = \frac{1}{2-r}, \quad g_m(r) = \frac{m - (m-1)r}{m + 1 - mr} = 1 - \frac{1-r}{m+1-mr}, \quad \rho^2 = 2,$$

et le résultat du lemme est immédiat.

On déduit du lemme que

$$\frac{1}{1 - g_m(r)} = \frac{1}{1-r} + \frac{\rho^2 r}{2} + o(m),$$

le reste $o(m)$ étant uniforme en $r \in [0, 1[$. On applique ceci en prenant

$$m = [kt_p] - [kt_{p-1}], \; r = e^{-\lambda/k}$$

et on trouve

$$(1 - g_{[kt_p]-[kt_{p-1}]}(e^{-\lambda/k}))^{-1} = k\Big(\frac{1}{\lambda} + \frac{\rho^2(t_p - t_{p-1})}{2}\Big) + o(k),$$

soit encore

$$g_{[kt_p]-[kt_{p-1}]}(e^{-\lambda/k}) = 1 - \frac{\lambda}{1 + \frac{\rho^2}{2}\lambda(t_p - t_{p-1})} \frac{1}{k} + o(\frac{1}{k}).$$

Il en découle que

$$g_{[kt_p]-[kt_{p-1}]}(e^{-\lambda/k})^{kY^k_{t_{p-1}}} = \left(\exp\Big(- \frac{\lambda}{1 + \frac{\rho^2}{2}\lambda(t_p - t_{p-1})}\Big) + o(1) \right)^{Y^k_{t_{p-1}}}.$$

La formule (1.1) est une conséquence de ce dernier résultat et de l'hypothèse de récurrence. $\square$

Dans le sous-paragraphe suivant, nous aurons besoin d'un petit résultat technique qu'on peut par exemple déduire facilement de la preuve ci-dessus. Pour tout $t > 0$, on a

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}(Z^k_{[kt]-1} - Z^k_{[kt]}) = 0, \tag{1.2}$$

avec convergence en probabilité. Pour obtenir ce résultat, on peut raisonner comme dans la preuve ci-dessus et obtenir, pour tous $\lambda, \lambda' \geq 0$,

$$\lim_{k\to\infty} E[\exp\big(- \frac{\lambda}{k} Z^k_{[kt]-1} - \frac{\lambda'}{k} Z^k_{[kt]}\big)] = E[\exp\big(- (\lambda + \lambda')Y^\infty_t\big)].$$

Cela montre que le couple $(k^{-1}Z^k_{[kt]-1}, k^{-1}Z^k_{[kt]})$ converge en loi vers (Y^∞_t, Y^∞_t), d'où (1.2).

1.4.2 Un théorème limite pour les temps de séjour d'une marche aléatoire

Dans ce paragraphe, nous considérons une marche aléatoire simple sur $\mathbb{N}$, notée $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $X_0 = 0$. Cela signifie que (X_n) a la loi de la valeur absolue d'une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, ou de manière équivalente que (X_n) est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ avec probabilités de transition $Q(0, 1) = 1$, $Q(k, k+1) = Q(k, k-1) = 1/2$ pour $k \geq 1$. On pose $\tau_0 = 0$ puis, pour tout $k \geq 1$,

$$\tau_k = \inf\{n > \tau_{k-1},\ X_n = 0\}.$$

Les processus $(X_{(\tau_{k-1}+n)\wedge\tau_k})_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendants de loi $\mathbb{P}_+$.

Pour tout $k \geq 1$, pour tout $j \in \mathbb{N}$, posons

$$N^k_j = \sum_{n=0}^{\tau_k} 1_{\{X_n=j\}},$$

qui représente le nombre de passages en j avant le k^{ieme} retour en 0. On appelle diffusion de Feller le processus limite du théorème 1.4.

Corollaire 1.6 *Les processus* $(\frac{1}{k}N^k_{[ks]}, s > 0)$ *convergent, au sens de la convergence en loi des marginales de dimension finie, vers une diffusion de Feller avec valeur initiale* $\alpha = 1$ *et* $\rho^2 = 2$.

Preuve. Notons

$$\omega^k(n) = X_{(\tau_{k-1}+n)\wedge\tau_k},$$

de sorte que les variables ω^k sont indépendantes de loi $\mathbb{P}_+$. Avec les notations introduites ci-dessus, on a pour $j \geq 1$

$$N_j^k = \sum_{l=1}^{k} \mathrm{Card}\,\{n, w^l(n) = j\} = \sum_{l=1}^{k} \big(Z_j(J(\omega^l) + Z_{j-1}(J(\omega^l))\big) = Z_j^k + Z_{j-1}^k,$$

où, d'après le théorème 1.3 le processus $(Z_j^k)_{j\in\mathbb{N}}$ est un processus de Galton-Watson de loi de reproduction géométrique, avec $Z_0^k = k$. Il suffit ensuite d'appliquer le théorème 1.4 en utilisant aussi (1.2). Remarquons qu'il faut exclure la valeur $s = 0$ dans le corollaire puisque $\frac{1}{k}N_0^k = (k+1)/k$ converge vers 1 et non pas vers 2. $\square$

Remarque. Grâce à la forme des noyaux de transition du processus (Y_s^∞), discutée ci-dessus, on voit que, pour tout $s > 0$, $\frac{1}{k}N_{[ks]}^k$ converge en loi vers $e_1 + \cdots + e_M$, où M suit une loi de Poisson de paramètre $1/s$ et les variables e_j sont des variables exponentielles de moyenne $2s$, indépendantes (entre elles) et indépendantes de M. Interprétons ce résultat. Chacune des excursions ω_j a une probabilité $[ks]^{-1}$ de visiter $[ks]$ (cela se voit très facilement par un argument de martingale). Le nombre d'excursions qui visitent le point $[ks]$ suit donc une loi binômiale $\mathcal{B}(k, [ks]^{-1})$, qui converge quand k tend vers ∞ vers une loi de Poisson de paramètre s.

De plus, conditionnellement au fait qu'une excursion donnée visite $[ks]$, le nombre correspondant de visites en $[ks]$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - 1/(2[ks])$ (i.e. $\mu(j) = (2[ks])^{-1}(1-(2[ks])^{-1})^j$). Ce résultat découle facilement de la propriété de Markov forte (un résultat analogue est valable pour n'importe quelle chaîne de Markov). Normalisée par $1/k$, cette loi géométrique converge vers une loi exponentielle de paramètre $2s$.

En termes de processus de branchement, l'ordre de grandeur à l'instant $[ks]$ d'une population initialement de k individus est encore k. Cependant, le nombre des individus de la population initiale qui ont des descendants à l'instant $[ks]$ reste petit (même quand k est grand) puisqu'il se comporte comme une variable de Poisson de paramètre $1/s$. Inversement, pour chacun de ces individus qui ont des descendants à l'instant $[ks]$, le nombre des descendants en question est grand puisqu'il se comporte comme k fois une variable exponentielle de moyenne $2s$.

L'interprétation précédente en termes de processus de branchement n'a été obtenue que pour le processus de Galton-Watson géométrique (de paramètre 1/2). Cependant elle est valable pour tout processus de Galton-Watson de loi de reproduction critique et de variance finie: voir l'exercice 1.5 ci-dessous.

Exercices

Exercice 1.1 *En utilisant le théorème 1.3 calculer la loi de l'instant d'extinction d'un processus de Galton-Watson de loi de reproduction géométrique de paramètre*

1/2, avec population initiale k individus. On note H_k cet instant. Etudier la convergence en loi de $\frac{1}{k}H_k$.

Exercice 1.2 *Soit Y^∞ une diffusion de Feller (processus limite du théorème 1.4). On admet que Y^∞ a des trajectoires continues et que, si*

$$T = \inf\{t \geq 0, Y_t^\infty = 0\},$$

on a $Y_t^\infty = 0$, $\forall t \geq T$, p.s. Montrer que T est fini p.s. et calculer la loi de T (calculer $P(Y_t^\infty = 0)$). Comparer avec la loi limite de l'exercice précédent.

Exercice 1.3 *Soient U^1, U^2 deux diffusions de Feller indépendantes, issues respectivement de α_1 et α_2. Vérifier sur les fonctionnelles de Laplace que $U^1 + U^2$ est encore une diffusion de Feller, avec valeur initiale $\alpha_1 + \alpha_2$. Interpréter ce résultat à l'aide du théorème 1.4*

Exercice 1.4 *Soit S_n une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, avec valeur initiale $S_0 = 0$. Soit T_k l'instant du k^{ieme} retour en 0 de cette marche aléatoire et pour tout $p \geq 0$, soit*

$$M_p^k = \mathrm{Card}\,\{1 \leq n \leq T_k; S_n = p\}.$$

Montrer que la suite de processus $(\frac{1}{k}M_{[kt]}^k, t \geq 0)$ converge en loi, au sens des marginales de dimension finie, vers une diffusion de Feller de valeur initiale 1 (généraliser, un peu, le théorème 1.4).

Exercice 1.5 *Soit ν une mesure de probabilité satisfaisant les hypothèses du théorème 1.4 et soit (Z_n) un processus de Galton-Watson de loi de reproduction ν, avec $Z_0 = 1$. Montrer à l'aide du lemme 1.5 que, quand $n \to \infty$,*

$$P(Z_n > 0) \sim \frac{2}{\rho^2 n},$$

puis que la loi conditionnelle de $\frac{1}{n}Z_n$ sachant que $Z_n > 0$ converge vers une loi exponentielle.

Chapter 2

Temps Locaux du Mouvement Brownien

L'une des applications du chapitre précédent concernait l'étude asymptotique des nombre de visites d'une marche aléatoire simple en différents points. Le théorème d'invariance de Donsker, selon lequel le mouvement brownien est limite en loi de marches aléatoires discrètes convenablement renormalisées, suggère fortement l'existence d'une version "brownienne" de ce résultat. Notre objectif dans ce chapitre est de construire l'analogue pour le mouvement brownien des nombres de visites pour une marche aléatoire. Cela nous conduira à la notion de temps local du mouvement brownien, dont nous étudierons aussi quelques propriétés importantes.

2.1 Construction des temps locaux

Dans tout ce chapitre, $(B_t, t \geq 0)$ désigne un mouvement brownien réel issu de 0 et $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration canonique de B ($\mathcal{F}_t$ est la tribu engendrée par $(B_u, 0 \leq u \leq t)$, complétée par les ensembles négligeables de la "grande" tribu sous-jacente, on sait que la filtration $(\mathcal{F}_t)$ est continue à droite). La plupart des résultats qui suivent peuvent être immédiatement étendus au cas d'une valeur initiale B_0 générale.

Pour tous $t \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$, on a

$$E\left(\int_0^t 1_{(B_s=a)}\, ds\right) = \int_0^t P(B_s = a)\, ds = 0,$$

ce qui montre que $\int_0^t 1_{(B_s=a)}\, ds = 0$, p.s. Si l'on cherche à mesurer le nombre de visites du mouvement brownien en a, il ne sert donc à rien de considérer le temps passé en a, $\int_0^t 1_{(B_s=a)}\, ds$. La bonne approche sera d'étudier la densité de temps d'occupation en a, définie comme la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(a-\varepsilon<B_s<a+\varepsilon)}\, ds.$$

L'existence de cette limite découle du théorème suivant.

Théorème 2.1 *Il existe un processus aléatoire* $(L^a_t, a \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$*, unique à indistinguabilité près, tel que*

(i) *p.s., l'application* $(t, a) \longrightarrow L^a_t$ *est continue, et croissante en la variable* t*;*

(ii) *p.s., pour toute fonction* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *mesurable, pour tout* $t \geq 0$*,*

$$\int_0^t \varphi(B_s)\, ds = \int da\, \varphi(a)\, L^a_t.$$

La variable L^a_t *est appelée temps local au niveau* a*, à l'instant* t *du mouvement brownien* B*.*

Remarque. En prenant (formellement) $\varphi = \delta_x$ dans (ii), on trouve

$$L^x_t = \int_0^t \delta_x(B_s)\, ds, \tag{2.1}$$

expression formelle qui nous guidera dans la construction des temps locaux.

Preuve. Nous partons de l'expression formelle (2.1) et remplaçons la mesure de Dirac δ_x par une approximation. On pourrait comme cela a été suggéré ci-dessus utiliser la fonction $(2\varepsilon)^{-1} 1_{]x-\varepsilon, x+\varepsilon[}$. Cependant, pour la commodité des calculs, il sera préférable d'utiliser le noyau gaussien:

$$p_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp(-\frac{x^2}{2\varepsilon}), \qquad \varepsilon > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Rappelons la formule d'inversion de Fourier

$$p_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\xi\ \exp(ix\xi - \frac{1}{2}\varepsilon|\xi|^2).$$

Pour tous $\varepsilon \in]0, 1]$, $t \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$L(\varepsilon, t, a) = \int_0^t p_\varepsilon(B_s - a)\, ds.$$

Le lemme suivant est l'ingrédient essentiel de la preuve.

Lemme 2.2 *Soit* $p \geq 1$ *un entier et soient* $K > 0$, $\gamma \in]0, 1/4[$*. Il existe une constante* $C = C(K, \gamma, p)$ *telle que, pour tous* $\varepsilon, \varepsilon' \in]0, 1]$, $t, t' \in [0, K]$, $a, a' \in \mathbb{R}$,

$$E\left[(L(\varepsilon, t, a) - L(\varepsilon', t', a'))^{2p}\right] \leq C\, |(\varepsilon, t, a) - (\varepsilon', t', a')|^{2\gamma p}.$$

Nous admettons provisoirement le résultat du lemme et nous montrons comment on en déduit le théorème. La première étape consiste à appliquer le classique lemme de Kolmogorov (bien que ce résultat soit très souvent appliqué, il est difficile d'en trouver une référence satisfaisante: on peut adapter les preuves données dans [29], p.116 ou dans [35], p.25).

Lemme 2.3 (Kolmogorov) *Soit I un pavé borné (i.e. un produit d'intervalles bornés, ouverts, fermés ou semi-ouverts) dans $\mathbb{R}^d$ et soit $(Y(x), x \in I)$ une famille de variables aléatoires indexée par $x \in I$. Supposons qu'il existe un réel $p > 0$ et deux constantes C_0, $\beta > 0$ telles que*

$$\forall\, x, x' \in I, \qquad E[|Y(x) - Y(x')|^p] \leq C_0 |x - x'|^{d+\beta}.$$

Alors le processus $(Y(x), x \in I)$ a une version continue, qui est même globalement höldérienne d'exposant α, pour tout $\alpha < \beta/p$.

Lorsque l'on sait déjà que le processus $(Y(x), x \in I)$ est p.s. continu, ce qui est le cas dans notre application, la preuve du lemme de Kolmogorov consiste simplement à appliquer l'inégalité de Markov puis le lemme de Borel-Cantelli pour vérifier que p.s. pour tout n assez grand, pour tout $l \in \{1, \ldots, d\}$,

$$|Y(x_1, \ldots, x_d) - Y(x_1, \ldots, x_l + 2^{-n}, \ldots, x_d)| \leq 2^{-n\alpha},$$

dès que $(x_1, \ldots, x_d)$, $(x_1, \ldots, x_l + 2^{-n}, \ldots, x_d) \in I$ et x_j est un multiple de 2^{-n} pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$. Une fois cette estimation acquise, un argument analytique élémentaire donne le caractère höldérien d'exposant α de $(Y(x), x \in I)$.

Nous appliquons le lemme 2.3 au processus $(L(\varepsilon, t, a),\ \varepsilon \in]0, 1],\ t \in [0, K],\ a \in [-K, K])$. En utilisant le lemme 2.2 avec p assez grand, on voit que l'hypothèse du lemme de Kolmogorov est vérifiée. Comme il est clair par construction que le processus $(L(\varepsilon, t, a))$ est continu, on obtient précisément que, pour tout $\alpha < 1/4$, la fonction $(\varepsilon, t, a) \longrightarrow L(\varepsilon, t, a)$ est p.s. globalement höldérienne d'exposant α, sur $]0, 1] \times [0, K] \times [-K, K]$.

En conséquence, cette fonction admet un unique prolongement continu à l'adhérence du pavé, c'est-à-dire à $[0, 1] \times [0, K] \times [-K, K]$. On pose

$$L_t^a = L(0, t, a) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} L(\varepsilon, t, a), \qquad a \in [-K, K],\ t \in [0, K].$$

Evidemment, en considérant une suite K_n convergeant vers $+\infty$, on peut étendre cette définition à tous $a \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$. La fonction $(a, t) \rightarrow L_t^a$ est localement höldérienne d'exposant α, ce qui donne (i).

Soit maintenant φ une fonction continue à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$. Alors,

$$\int_0^t \varphi(B_s)\, ds = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \varphi * p_\varepsilon(B_s)\, ds.$$

Or,

$$\int_0^t \varphi * p_\varepsilon(B_s)\, ds = \int dx\, \varphi(x) \int_0^t ds\, p_\varepsilon(B_s - x) = \int dx\, \varphi(x)\, L(\varepsilon, t, x),$$

qui par convergence dominée converge vers

$$\int dx\, \varphi(x)\, L_t^x.$$

On a donc obtenu (ii) lorsque φ est continue à support compact, ce qui suffit.

L'unicité est aussi facile. En utilisant (i) et (ii) on a en effet, p.s. pour tous $t \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$,

$$L_t^a = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} dx\, L_t^x = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(|B_s - a| < \varepsilon)}\, ds. \tag{2.2}$$

Cela montre que, si $(\tilde{L}_t^a)$ est un autre processus avec les mêmes propriétés, les deux processus $(\tilde{L}_t^a)$ et (L_t^a) sont indistinguables. □

Preuve du lemme 2.2. On a $(a+b+c)^{2p} \leq 3^{2p}(a^{2p} + b^{2p} + c^{2p})$, pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$. Il suffit donc de majorer séparément

$$E[(L(\varepsilon,t,x) - L(\varepsilon,t,x'))^{2p}],\ E[(L(\varepsilon,t,x) - L(\varepsilon,t',x))^{2p}],\ E[(L(\varepsilon,t,x) - L(\varepsilon',t,x))^{2p}].$$

Nous commençons par le premier terme. Notons $\Delta_p = \{(s_1, \ldots, s_{2p}),\ 0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_{2p} \leq t\}$. Alors,

$$\begin{aligned}
E[(L(\varepsilon,t,x) - L(\varepsilon,t,x'))^{2p}] &= E\left[\left(\int_0^t (p_\varepsilon(B_s - x) - p_\varepsilon(B_s - x'))\, ds\right)^{2p}\right] \\
&= (2p)!\, E\left[\int_{\Delta_p} ds_1 \ldots ds_{2p} \prod_{j=1}^{2p} (p_\varepsilon(B_{s_j} - x) - p_\varepsilon(B_{s_j} - x'))\right] \\
&= c_p\, E\left[\int_{\Delta_p} ds_1 \ldots ds_{2p} \prod_{j=1}^{2p} \left(\int d\xi\, e^{-\varepsilon|\xi|^2/2} \left(e^{i(B_{s_j} - x)\xi} - e^{i(B_{s_j} - x')\xi}\right)\right)\right] \\
&= c_p\, E\left[\int_{\Delta_p} ds_1 \ldots ds_{2p} \int d\xi_1 \ldots d\xi_{2p}\, e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sum|\xi_j|^2}\, e^{i\sum \xi_j B_{s_j}} \prod_{j=1}^{2p} \left(e^{-ix\xi_j} - e^{-ix'\xi_j}\right)\right] \\
&= c_p \int d\xi_1 \ldots d\xi_{2p}\, e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sum|\xi_j|^2} \left(\int_{\Delta_p} ds_1 \ldots ds_{2p}\, E\left[e^{i\sum \xi_j B_{s_j}}\right]\right) \prod_{j=1}^{2p} \left(e^{-ix\xi_j} - e^{-ix'\xi_j}\right)
\end{aligned}$$

avec $c_p = (2p)!(2\pi)^{-2p}$. Puisque $\sum \xi_j B_{s_j}$ suit une loi gaussienne centrée, on a

$$E\left[e^{i\sum \xi_j B_{s_j}}\right] = \exp -\frac{1}{2} \mathrm{var} \sum \xi_j B_{s_j}.$$

Or, en notant $\eta_j = \xi_j + \cdots + \xi_{2p}$, on a

$$\operatorname{var} \sum_{j=1}^{2p} \xi_j B_{s_j} = \operatorname{var} \sum_{j=1}^{2p} \eta_j (B_{s_j} - B_{s_{j-1}}) = \sum_{j=1}^{2p} \eta_j^2 (s_j - s_{j-1}),$$

où par convention $s_0 = 0$. Enfin, pour tout $\gamma \in]0,1]$, il existe une constante $c = c_{(\gamma)}$ telle que, pour tous $y, y' \in \mathbb{R}$,

$$\left| e^{-iy} - e^{-iy'} \right| \leq c\, |y - y'|^\gamma.$$

Compte-tenu de ces remarques, on peut majorer

$$\begin{aligned} & E[(L(\varepsilon,t,x) - L(\varepsilon,t,x'))^{2p}] \\ \leq \;& C_p \int d\xi_1 \ldots d\xi_{2p} \int_{\Delta_p} ds_1 \ldots ds_{2p}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2p} \eta_j^2 (s_j - s_{j-1})} \prod_{j=1}^{2p} |\xi_j (x - x')|^\gamma \\ \leq \;& C_p |x - x'|^{2p\gamma} \int d\xi_1 \ldots d\xi_{2p} \prod_{j=1}^{2p} |\xi_j|^\gamma \prod_{j=1}^{2p} \left(\frac{1 - \exp(-\eta_j^2 t/2)}{\eta_j^2/2} \right), \end{aligned}$$

la dernière égalité étant obtenue en intégrant sur l'ensemble $\{s_j - s_{j-1} \leq t, \forall j \in \{1, ..., 2p\}\}$ qui contient Δ_p. Il reste maintenant à voir que l'intégrale en $d\xi_1 \ldots d\xi_{2p}$ est finie. Pour cela, on fait le changement de variables $(\xi_1, \ldots, \xi_{2p}) \to (\eta_1, \ldots, \eta_{2p})$, et on utilise l'inégalité simple $|\eta_j - \eta_{j+1}| \leq (1 + |\eta_j|)(1 + |\eta_{j+1}|)$ qui permet de majorer cette intégrale par

$$\left(\int d\eta\, (1 + |\eta|)^{2\gamma} \frac{1 - \exp(-\eta^2 t/2)}{\eta^2/2} \right)^{2p}.$$

Cette dernière intégrale est finie si $2\gamma < 1$.

Le traitement des deux autres termes est tout à semblable. Les mêmes calculs montrent

$$\begin{aligned} & E[(L(\varepsilon,t,x) - L(\varepsilon',t,x))^{2p}] \\ = \;& c_p \int d\xi_1 \ldots d\xi_{2p} \prod_{j=1}^{2p} \left(e^{-\varepsilon \xi_j^2/2} - e^{-\varepsilon' \xi_j^2/2} \right) \left(\int_{\Delta_p} ds_1 \ldots ds_{2p}\, E\left[e^{i \sum \xi_j B_{s_j}} \right] \right) e^{-ix \sum \xi_j} \\ \leq \;& C_p\, |\varepsilon - \varepsilon'|^{2p\gamma} \int d\xi_1 \ldots d\xi_{2p} \prod_{j=1}^{2p} |\xi_j|^{2\gamma} \int_{\Delta_p} ds_1 \ldots ds_{2p}\, e^{-\frac{1}{2}\sum \eta_j^2 (s_j - s_{j-1})} \\ \leq \;& C'_p\, |\varepsilon - \varepsilon'|^{2p\gamma} \end{aligned}$$

grâce aux mêmes arguments que ci-dessus, qui nécessitent cette fois de supposer $4\gamma < 1$.

Enfin, en supposant par exemple $t < t'$, et en utilisant l'égalité $\int d\eta \exp(-r\eta^2) = C/\sqrt{r}$, on a

$$\begin{aligned}
&E[(L(\varepsilon,t,x) - L(\varepsilon,t',x))^{2p}] \\
&= c_p \int d\xi_1 \dots d\xi_{2p}\, e^{-ix\sum \xi_j - \frac{\varepsilon}{2}\sum \xi_j^2} \int_{\Delta_p \cap [t,t']^{2p}} ds_1 \dots ds_{2p}\, E\Big[e^{i\sum \xi_j B_{s_j}}\Big] \\
&\leq c_p \int d\xi_1 \dots d\xi_{2p} \int_{\{t \leq s_1 \leq \dots \leq s_{2p} \leq t'\}} ds_1 \dots ds_{2p}\, e^{-\frac{1}{2}\sum \eta_j^2 (s_j - s_{j-1})} \\
&= C_p \int_{\{t \leq s_1 \leq \dots \leq s_{2p} \leq t'\}} ds_1 \dots ds_{2p} \prod_{j=1}^{2p} (s_j - s_{j-1})^{-1/2} \\
&\leq C'_p\,(t'-t)^p.
\end{aligned}$$

Cela termine la preuve du lemme. □

La preuve ci-dessus fournit des renseignements précis sur la régularité de la fonction $(a,t) \to L_t^a$, que nous énonçons dans la proposition suivante.

Proposition 2.4 *Pour tout $\delta > 0$, la fonction $(a,t) \to L_t^a$ est p.s. localement höldérienne d'exposant $\frac{1}{2} - \delta$. De plus, pour tout $K > 0$ et tout $p > 0$,*

$$\sup_{a \in \mathbb{R}, t \leq K} E\left((L_t^a)^p\right) < \infty.$$

Enfin,

$$E(L_t^a) = \int_0^t ds\, p_s(a).$$

Preuve. On reprend les inégalités obtenues ci-dessus dans la preuve du lemme 2.2, en remarquant que la condition $\gamma < 1/4$ était nécessaire seulement dans la majoration de $L(\varepsilon,t,x) - L(\varepsilon',t,x)$. On trouve que, pour tout $\gamma < 1/2$ et tout entier $p \geq 1$ il existe une constante $C(K,p,\gamma)$ telle que, pour tous $t,t' \leq K$ et $a,a' \in \mathbb{R}$,

$$E\left(\left(L(\varepsilon,t,a) - L(\varepsilon,t',a')\right)^{2p}\right) \leq C\,|(t,a) - (t',a')|^{2p\gamma}.$$

En faisant tendre ε vers 0 et en utilisant le lemme de Fatou, on trouve

$$E\left((L_t^a - L_{t'}^{a'})^{2p}\right) \leq C\,|(t,a) - (t',a')|^{2p\gamma}. \tag{2.3}$$

La première assertion découle alors du lemme de Kolmogorov. Pour la seconde assertion, il suffit de prendre $t' = 0, a' = a$ dans (2.3), puisque la propriété (2.2) entraîne immédiatement $L_0^a = 0$ p.s. Enfin, pour la dernière assertion, on remarque que, si φ est mesurable et positive sur $\mathbb{R}$,

$$\int da\,\varphi(a)\,E(L_t^a) = E\left(\int da\,\varphi(a)\,L_t^a\right) = E\left(\int_0^t ds \varphi(B_s)\right) = \int_{\mathbb{R}} da\,\varphi(a) \int_0^t ds\, p_s(a).$$

Le résultat recherché en découle, puisque l'application $a \to E(L_t^a)$ est continue grâce par exemple à (2.3). $\square$

La méthode que nous avons utilisée pour construire les temps locaux est assez technique, bien que relativement élémentaire. On peut lui préférer les méthodes de calcul stochastique reposant sur la formule de Tanaka, qui s'appliquent plus généralement aux semimartingales continues (voir le chapitre VI de [35]). Remarquons cependant que notre approche pourrait être étendue à d'autres processus gaussiens et surtout à d'autres types de temps locaux comme les "temps locaux d'intersection" du mouvement brownien en dimension supérieure (voir par exemple [18]).

2.2 Propriétés des temps locaux

Nous établissons dans ce paragraphe plusieurs propriétés des temps locaux browniens qui nous seront utiles dans la suite. Comme nous aurons à considérer d'autres mouvements browniens que B, nous noterons $L_t^a(B)$ au lieu de L_t^a quand il y aura risque d'ambiguïté. En particulier, soit T un temps d'arrêt de la filtration canonique de B. Le processus $B_t^T = B_{T+t} - B_T$ est encore un mouvement brownien réel issu de 0, et on peut donc considérer ses temps locaux. A l'aide de la formule de densité de temps d'occupation, on vérifie immédiatement que p.s. pour tous $t \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$,

$$L_t^a(B^T) = L_{T+t}^{B_T+a}(B) - L_T^{B_T+a}(B). \tag{2.4}$$

De même, pour tout $\lambda > 0$, le processus $B_t^{(\lambda)} = \lambda^{-1} B_{\lambda^2 t}$ est encore un mouvement brownien réel et p.s. pour tous $t \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$,

$$L_t^a(B^{(\lambda)}) = \lambda^{-1}\, L_{\lambda^2 t}^{\lambda a}(B). \tag{2.5}$$

Le résultat suivant généralise (2.2).

Proposition 2.5 *Soit (g_n) une suite de fonctions positives intégrables sur $\mathbb{R}$ telles que la suite de mesures $g_n(x)\,dx$ converge étroitement vers la mesure de Dirac $\delta_0(dx)$. Alors, p.s. pour tous $t \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$,*

$$L_t^a = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t g_n(B_s - a)\, ds.$$

Preuve. Immédiate à partir de (i) et (ii). $\square$

Pour tout $a \in 0$ fixé, le processus $(L_t^a, t \geq 0)$ est un processus croissant, continu adapté à la filtration de B (cette dernière propriété découle, par exemple, de la proposition ci-dessus). On peut associer à ce processus croissant continu une mesure aléatoire sans atomes sur $\mathbb{R}_+$, notée $d_tL_t^a$ (par définition, $\int_{]u,v]} d_tL_t^a = L_v^a - L_u^a$ pour $u < v$). La construction des temps locaux suggère que cette mesure est portée par l'ensemble des instants où le mouvement brownien est en a. La proposition suivante établit et précise cette propriété.

Proposition 2.6 *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, le support de la mesure $d_tL_t^a$ coïncide p.s. avec l'ensemble $\{t \geq 0, B_t = a\}$.*

Preuve. En utilisant l'approximation (2.2) du temps local on voit facilement que, si $[p,q]$ est un intervalle de $\mathbb{R}_+$, la propriété

$$\forall s \in [p,q],\ B_s \neq a$$

entraîne $L_q^a = L_p^a$. On en déduit que le support de $d_tL_t^a$ est contenu dans l'ensemble $\{t \geq 0, B_s = a\}$.

La réciproque est un peu plus délicate. On remarque d'abord qu'il suffit de traiter le cas $a = 0$. En effet, en introduisant le temps d'arrêt $T_a = \inf\{t \geq 0, B_t = a\}$ et en utilisant la propriété (2.4) on voit que p.s. pour tout $t \geq 0$, on a

$$L_{T_a+t}^a(B) = L_t^0(B^{T_a}).$$

Donc, la propriété recherchée pour a quelconque découle du cas particulier $a = 0$ appliqué au mouvement brownien B^{T_a}.

Ensuite, on commence par montrer que p.s. $L_t^0 > 0$ pour tout $t > 0$. Si (t_n) est une suite décroissant strictement vers 0, l'événement $A = \lim \downarrow \{L_{t_n}^0 > 0\}$ est mesurable par rapport à la tribu asymptotique $\mathcal{F}_{0+} = \cap_{t>0}\mathcal{F}_t$. La loi du tout ou rien affirme que la tribu $\mathcal{F}_{0+}$ est grossière, donc $P(A) = 0$ ou 1. D'autre part, en utilisant la propriété d'invariance par changement d'échelle (2.5), on voit facilement que la quantité $P(L_t^0 > 0)$ ne dépend pas de $t > 0$, donc

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \downarrow P(L_{t_n}^0 > 0) = P(L_1^0 > 0).$$

Cette dernière quantité est strictement positive puisque $E(L_1^0 > 0) > 0$, d'après la proposition 2.4. On conclut donc que $P(A) = 1$, ce qui était le résultat recherché.

Pour tout rationnel $q \geq 0$, posons ensuite

$$\sigma_q = \inf\{t \geq q,\ B_t = 0\} < \infty,\ \text{p.s.}$$

Utilisons alors (2.4) avec $T = \sigma_q$, et appliquons au mouvement brownien B^{σ_q} la propriété $L_t^0 > 0$ pour tout $t > 0$, p.s. On trouve immédiatement que

$$L_{\sigma_q+t}^0 > L_{\sigma_q}^0,\ \forall t > 0,\ \text{p.s.}$$

Donc les instants de la forme σ_q, q rationnel, appartiennent au support de $d_tL_t^0$. Or ces instants forment un sous-ensemble dense de $\{t \geq 0,\ B_t = 0\}$. $\square$

Remarque. L'ensemble exceptionnel de probabilité nulle de la Proposition 6 dépend de a. Il existe p.s. des niveaux a dépendant de ω tels que le support de $d_t L_t^a$ soit strictement contenu dans $\{t, B_t = a\}$ (voir exercice 2.1). En revanche, l'inclusion $\operatorname{supp} d_t L_t^a \subset \{t, B_t = a\}$ est vraie simultanément pour tout a, p.s.

Pour tout $s \geq 0$, on pose

$$\tau_s = \inf\{t \geq 0,\ L_t^0 > s\}.$$

On remarque que $L_\infty^0 = \infty$ p.s., ce qui assure que les instants τ_s sont finis p.s. En effet, la propriété (2.5) montre que pour tout $\lambda > 0$, L_∞^0 a même loi que λL_∞^0. Comme on sait que $L_\infty^0 > 0$ p.s., cela n'est possible que si $L_\infty^0 = \infty$ p.s.

La fonction $s \longrightarrow \tau_s$ est par construction croissante et continue à droite. De plus, la limite à gauche de cette fonction en $s > 0$ est

$$\tau_{s-} = \inf\{t \geq 0,\ L_t^0 = s\}.$$

Proposition 2.7 *Le processus $(\tau_s, s \geq 0)$ est un subordinateur (i.e. un processus à accroissements indépendants stationnaires croissant) stable d'indice* $1/2$*. On a p.s.*

$$\{t \geq 0,\ B_t = 0\} = \{\tau_s,\ s \geq 0\} \cup \{\tau_{s-},\ s \in D\},$$

où D désigne l'ensemble (dénombrable) des instants de discontinuité de l'application $s \to \tau_s$. Enfin, les composantes connexes de $\mathbb{R}_+ \backslash \{t \geq 0,\ B_t = 0\}$ sont exactement les intervalles $]\tau_{s-}, \tau_s[$ pour $s \in D$.

Preuve. La propriété de support du temps local entraîne que $B_{\tau_s} = 0$, pour tout $s \geq 0$, p.s. On peut aussi remarquer que les instants τ_s (ou τ_{s-}) sont des temps d'arrêt. En effet, pour tout $t > 0$, $\{\tau_s < t\} = \{L_t^0 > s\}$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable.

Soit maintenant $s > 0$ fixé. Alors, τ_s, et plus géralement $(\tau_u, u \leq s)$, sont mesurables par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{\tau_s}$. Soit $s' > s$. En appliquant la propriété (2.4) avec $T = \tau_s$, on voit que, pour tout $t \geq 0$

$$L_{\tau_s + t}^0(B) = L_t^0(B^{\tau_s}).$$

Il en découle que $\tau_{s'} - \tau_s = \tau'_{s'-s}$, où

$$\tau'_{s'-s} = \inf\{t \geq 0,\ L_t^0(B^{\tau_s}) > s' - s\}$$

a même loi que $\tau_{s'-s}$. Puisque le mouvement brownien B^{τ_s} est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_{\tau_s}$, on obtient aussi que $\tau_{s'} - \tau_s$ est indépendant de $(\tau_u, u \leq s)$. On a montré que $(\tau_s, s \geq 0)$ est un subordinateur. En utilisant la propriété (2.5), on obtient que les processus $(L_{\lambda^2 t}^0, t \geq 0)$ et $(\lambda L_t^0, t \geq 0)$ ont même loi, ce qui entraîne aussi que les processus $(\tau_{\lambda s}, s \geq 0)$ et $(\lambda^2 \tau_s, s \geq 0)$ ont même loi, donc que $(\tau_s, s \geq 0)$ est stable d'indice $1/2$.

Il est clair que $B_t = 0$ si t est de la forme τ_s ou τ_{s-}. Inversement, si $B_t = 0$, la proposition 2.6 entraîne que t est un point de croissance de l'application $t \to L_t^0$. Alors,

· ou bien $L^0_{t+\varepsilon} > L^0_t$, pour tout $\varepsilon > 0$, dans quel cas il est facile de vérifier que $t = \tau_{L^0_t}$;

· ou bien il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $L^0_{t+\varepsilon_0} = L^0_t$, alors $L^0_t > L^0_{t-\varepsilon}$, pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $t = \tau_{L^0_t -}$; de plus, $\tau_{L^0_t} \geq t + \varepsilon_0$ ce qui montre que $L^0_t = s \in D$.

La dernière assertion est maintenant facile. D'abord un intervalle de la forme $]\tau_{s-}, \tau_s[$ ne contient pas d'instant t tel que $B_t = 0$, toujours à cause de la proposition 2.6. Inversement si $]a, b[$ est une composante connexe de $\mathbb{R}_+ \backslash \{t \geq 0,\, B_t = 0\}$, on doit avoir $L^0_a = L^0_b = s$, et on vérifie immédiatement que $a = \tau_{s-}$, $b = \tau_s$. □

Remarque. Soit $H = \{t \geq 0,\, B_t = 0\}$ l'ensemble des zéros de B. L'ensemble H est p.s. fermé, totalement discontinu et sans point isolé. (cette dernière propriété découle par exemple de la proposition 2.6 qui montre que H est exactement le support d'une mesure sans atomes). L'intersection de H avec un intervalle compact $[0, M]$, $M > 0$ est donc homéomorphe à l'ensemble de Cantor. Les composantes connexes de $\mathbb{R}_+ \backslash H$, les intervalles de la forme $]\tau_{s-}, \tau_s[$, $s \in D$ sont les intervalles d'excursion de B en dehors de 0. Le but de la *théorie des excursions* est de décrire le comportement du mouvement brownien sur ces intervalles.

Proposition 2.8 *Pour* $a \in]0, \infty[$, *soient* $T_a = \inf\{t \geq 0,\, B_t = a\}$, $R_a = \inf\{t \geq 0,\, |B_t| = a\}$. *Les variables* $L^0_{T_a}$ *et* $L^0_{R_a}$ *suivent des lois exponentielles de moyennes respectives* $2a$ *et* a.

Preuve. Nous allons vérifier que, pour tout $s > 0$, la loi de $L^0_{T_a} - s$ conditionnellement à $\{L^0_{T_a} > s\}$ coïncide avec la loi (non conditionnée) de $L^0_{T_a}$. On sait qu'il s'agit d'une propriété caractéristique des lois exponentielles. D'après la propriété (2.4) appliquée avec $T = \tau_s$, on a p.s. pour tout $t \geq 0$

$$L^0_t(B^{\tau_s}) = L^0_{\tau_s + t}(B) - L^0_{\tau_s}(B) = L^0_{\tau_s + t}(B) - s.$$

De plus, sur l'ensemble $\{L^0_{T_a} > s\} = \{\sup_{\{t \leq \tau_s\}} B_t < a\} = \{T_a > \tau_s\}$ on a

$$T'_a := \inf\{t, B^{\tau_s}_t = a\} = T_a - \tau_s.$$

On voit donc que sur l'ensemble $\{L^0_{T_a} > s\}$, qui est $\mathcal{F}_{\tau_s}$-mesurable, on a $L^0_{T_a} - s = L^0_{T'_a}(B^{\tau_s})$, qui est une variable aléatoire indépendante de $\mathcal{F}_{\tau_s}$ de même loi que $L^0_{T_a}$. On a obtenu la propriété caractéristique recherchée. Exactement le même argument montre aussi que $L^0_{R_a}$ suit une loi exponentielle.

Il reste à calculer les moyennes de ces lois exponentielles. Soit φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ à support compact contenu dans $[0, a]$. On pose $\varphi(x) = 0$ si $x \leq 0$, et pour $x \geq 0$,

$$\varphi(x) = 2\int_0^x dy \int_0^y du\, g(u) = 2\int_0^x du\, (x - u)\, g(u) = 2\int_0^\infty du\, (x - u)_+\, g(u),$$

de façon que $\frac{1}{2}\varphi'' = g$. En appliquant le théorème d'arrêt à la martingale $\varphi(B_t) - \int_0^t ds\, g(B_s)$, on trouve

$$\int_0^a db\, g(b)\, E\big(L^b_{t\wedge R_a}\big) = E\left(\int_0^{t\wedge R_a} ds\, g(B_s)\right) = E\big(\varphi(B_{t\wedge R_a})\big)$$
$$= 2\int_0^a db\, g(b)\, E\big((B_{t\wedge R_a} - b)_+\big).$$

L'application $b \to E\big(L^b_{t\wedge R_a}\big)$ est continue, grâce à la continuité p.s. du temps local et aux bornes de la proposition 2.4. On trouve donc que, pour tous $b \in [0,a]$, $t \geq 0$,

$$E\big(L^b_{t\wedge R_a}\big) = 2E\big((B_{t\wedge R_a} - b)_+\big),$$

et, en faisant tendre t vers ∞,

$$E\big(L^b_{R_a}\big) = 2E\big((B_{R_a} - b)_+\big) = a - b,$$

en distinguant les deux cas $B_{R_a} = a$, $B_{R_a} = -a$. Le même argument donne pour $b \in [0,a]$

$$E\big(L^b_{T_a}\big) = 2E\big((B_{T_a} - b)_+\big) = 2(a-b).$$

□

Remarque. La proposition ci-dessus est un analogue brownien du résultat facile, déjà mentionné dans le chapitre 1, selon lequel le nombre de visites en x d'une chaîne de Markov partant de x, avant d'atteindre un autre point (ou un ensemble d'autres points), suit une loi géométrique. Le calcul des moyennes dans la preuve précédente serait immédiat si nous avions utilisé l'approche du calcul stochastique pour construire les temps locaux. C'est un petit inconvénient de notre méthode.

Exercices

Exercice 2.1 *Soient $u < v$ deux réels positifs et soit $M = \sup_{t\in[u,v]} B_t$. Vérifier que $M > \sup(B_u, B_v)$ p.s. puis que le support de la mesure $d_t L^M_t$ est strictement contenu dans $\{t \geq 0, B_t = M\}$.*

Exercice 2.2 *Montrer que, p.s. pour tout $t \geq 0$,*

- *ou bien $\tau_{L^0_t -} < t < \tau_{L^0_t}$ et alors $B_t \neq 0$, et $]\tau_{L^0_t -}, \tau_{L^0_t}[$ est l'intervalle d'excursion de B hors de 0 qui contient t;*
- *ou bien $\tau_{L^0_t -} = t < \tau_{L^0_t}$ et alors $B_t = 0$ et t est l'extrémité gauche d'une composante connexe de $\mathbb{R}_+\backslash\{u, B_u = 0\}$;*

· *ou bien* $\tau_{L_t^0-} < t = \tau_{L_t^0}$ *et alors* $B_t = 0$ *et* t *est l'extrémité droite d'une composante connexe de* $\mathbb{R}_+ \backslash \{u, B_u = 0\}$*;*

· *ou bien* $\tau_{L_t^0-} = t = \tau_{L_t^0}$ *et tout intervalle de la forme* $]t-\varepsilon, t[$*, ou* $]t, t+\varepsilon[$ *contient des zéros de* B*.*

Vérifier que p.s. pour tout $t > 0$*,*

$$\tau_{L_t^0} = \inf\{u > t, B_u = 0\}, \quad \tau_{L_t^0-} = \sup\{u < t, B_u = 0\}.$$

Exercice 2.3 *Avec les notations de la proposition 2.8, calculer la loi de* $L^b_{R_a}$ *pour* $b \in]-a, a[$*, puis celle de* $L^b_{T_a}$ *pour* $b \in]-\infty, a[$ *(calculer d'abord la probabilité pour le mouvement brownien partant de* 0 *d'atteindre un point* $u > 0$ *avant un point* $v < 0$*).*

Chapter 3

Marches Aléatoires Plongées dans le Mouvement Brownien et Applications aux Temps Locaux

L'objectif principal de ce chapitre est de mettre en place les outils généraux qui permettent de faire le lien entre les résultats concernant les marches aléatoires établis au chapitre 1 et l'étude du mouvement brownien. Dans ce but, nous montrons d'abord comment l'on plonge des marches aléatoires de pas de plus en plus petit dans la trajectoire d'un mouvement brownien réel. Ce plongement conduit ensuite à des approximations des temps locaux browniens par les nombres de montées des marches aléatoires plongées. En combinant ces approximations avec un théorème limite du chapitre 1, on aboutit à un théorème important sur la loi du processus des temps locaux browniens vu comme fonction de la variable d'espace. Comme autre application, nous calculons la dimension de Hausdorff de l'ensemble des zéros du mouvement brownien.

3.1 Marches aléatoires plongées dans le mouvement brownien

Nous considérons à nouveau un mouvement brownien réel $(B_t, t \geq 0)$ avec $B_0 = 0$, et nous conservons les notations introduites dans le chapitre 2. Pour tout entier $n \geq 0$ fixé, on définit une suite de temps d'arrêt $(T^n_k, k = 0, 1, 2, \ldots)$ en posant

$$T^n_0 = 0\,, \qquad T^n_{k+1} = \inf\{t > T^n_k, |B_t - B_{T^n_k}| = 2^{-n}\}.$$

On pose aussi

$$S^n_k = 2^n\, B_{T^n_k}.$$

Proposition 3.1 *Pour tout $n \geq 0$, la suite $(S^n_k, k = 0, 1, \ldots)$ est une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, issue de 0. De plus, pour tout $K > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\leq K} |2^{-n} S^n_{[2^{2n}t]} - B_t| = 0, \ \ p.s.$$

Remarque. Le théorème d'invariance de Donsker entraîne que si (S_k) est une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, la suite de processus $(2^{-n} S_{[2^{2n}t]}, t \geq 0)$ converge en loi vers le mouvement brownien réel issu de 0. La proposition précédente réalise cette convergence comme une convergence presque sûre sur l'espace de probabilité du mouvement brownien.

Preuve. La première assertion est facile. On a $S^n_{k+1} - S^n_k = 2^n(B_{T^n_{k+1}} - B_{T^n_k})$. On applique alors la propriété de Markov forte à l'instant T^n_k. La variable $B_{T^n_{k+1}} - B_{T^n_k}$ est la valeur du mouvement brownien $B^{T^n_k}$ au premier instant où il sort de l'intervalle $]-2^{-n}, 2^{-n}[$, donc prend les valeurs -2^{-n} et 2^{-n} chacune avec probabilité 1/2. De plus, toujours grâce à la propriété de Markov forte, cette variable est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_{T^n_k}$, donc en particulier des variables $S^n_j = 2^n B_{T^n_j}$ pour $j \leq k$.

Cet argument montre aussi que, pour n fixé, les variables $T^n_{k+1} - T^n_k$, $k = 0, 1, \ldots$ sont indépendantes et de même loi. Cette loi commune est la loi de T^n_1 qui par un argument de changement d'échelle est aussi la loi de $2^{-2n}T^0_1$. En appliquant le théorème d'arrêt à la martingale $B^2_t - t$, on trouve $E(T^0_1) = 1$. De plus, pour tout entier $p \geq 1$,

$$P(T^0_1 \geq p) \leq P(\forall j \in \{1, \ldots, p\}, |B_j - B_{j-1}| \leq 2\}) = c^p,$$

avec $c = P(|B_1| \leq 2) < 1$. Il en découle que T^0_1 a des moments exponentiels (i.e. $E(\exp(\lambda T^0_1)) < \infty$ pour $\lambda > 0$ assez petit) et en particulier que $E((T^0_1)^2) < \infty$.

Ensuite, en écrivant $T^n_{[2^{2n}t]} = \sum_{k=1}^{[2^{2n}t]} (T^n_k - T^n_{k-1})$, on a

$$\begin{aligned} &E\big(T^n_{[2^{2n}t]}\big) = [2^{2n}t]\, E(T^n_1) = 2^{-2n}[2^{2n}t], \\ &\operatorname{var} T^n_{[2^{2n}t]} = [2^{2n}t] \operatorname{var} T^n_1 = 2^{-4n}\,[2^{2n}t] \operatorname{var} T^0_1 \leq C\, 2^{-2n}. \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $t \geq 0$, p.s.

$$\lim_{n\to\infty} T^n_{[2^{2n}t]} = t, \qquad \text{p.s.} \tag{3.1}$$

Il existe un ensemble négligeable tel que la convergence ci-dessus ait lieu pour tout t rationnel à l'extérieur de cet ensemble. Comme il s'agit de fonctions croissantes de la variable t et que la limite est continue, un argument élémentaire montre qu'il y a aussi convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}_+$, p.s. On conclut en remarquant que par définition

$$2^{-n}\, S^n_{[2^{2n}t]} = B_{T^n_{[2^{2n}t]}}.$$

□

3.2 Approximations du temps local brownien

Notre but dans ce paragraphe est de donner des approximations du temps local de B faisant intervenir les marches aléatoires plongées S^n. L'idée, déjà évoquée en motivation du chapitre 2, est que le temps local est l'analogue brownien du nombre de visites en un point donné k par une marche aléatoire simple. Plutôt que d'utiliser les nombres de visites, il sera commode de travailler avec les "nombres de montées" de la marche aléatoire de k à $k+1$, qui sont déjà intervenus dans le chapitre 1.

Pour tout $a \in 2^{-n}\mathbb{Z}(= \{k2^{-n};\, k \in \mathbb{Z}\})$ et tout $s \geq 0$, on pose

$$\begin{aligned} l_s^{a,n} &= 2^{-n}\mathrm{Card}\,\{k \leq [2^{2n}s] - 1;\, S_k^n = 2^n a,\, S_{k+1}^n = 2^n a + 1\}, \\ \tilde{l}_s^{a,n} &= 2^{-n}\mathrm{Card}\,\{k \in \mathbb{N};\, T_{k+1}^n \leq s,\, S_k^n = 2^n a,\, S_{k+1}^n = 2^n a + 1\}. \end{aligned}$$

La quantité $2^n \tilde{l}_s^{a,n}$ s'interprète comme le nombre de montées du niveau a au niveau $a + 2^{-n}$ effectuées par le mouvement brownien avant l'instant s.

Théorème 3.2 *Pour tout $n \geq 0$, soit $a_n \in 2^{-n}\mathbb{Z}$. Supposons que la suite (a_n) converge vers $a \in \mathbb{R}$. Alors,*

$$\begin{aligned} \left(l_s^{a_n,n}, s \geq 0\right) &\longrightarrow \left(\frac{1}{2}L_s^a,\, s \geq 0\right) \\ \left(\tilde{l}_s^{a_n,n}, s \geq 0\right) &\longrightarrow \left(\frac{1}{2}L_s^a,\, s \geq 0\right) \end{aligned}$$

où dans les deux cas la convergence a lieu uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+$, p.s.

Remarque. Le résultat concernant $\tilde{l}_s^{a_n,n}$ correspond à une approximation du temps local par les nombres de montées du mouvement brownien. En revanche, le résultat concernant $l_s^{a_n,n}$ conduit plutôt à un "principe d'invariance" pour les marches aléatoires (voir la discussion à la fin de ce paragraphe).

Preuve. Remarquons que le processus limite est continu et croissant (en la variable s) et que les processus $(l_s^{a_n,n}, s \geq 0)$ et $(\tilde{l}_s^{a_n,n}, s \geq 0)$ sont aussi croissants. D'après un argument déjà utilisé dans le paragraphe précédent, il suffit donc de montrer que la convergence a lieu p.s. pour tout s fixé. Remarquons ensuite que le résultat pour l découle du résultat pour $\tilde{l}$. En effet, d'après (3.1), on a p.s. pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout n assez grand,

$$(1 - \varepsilon)\, s \leq T_{[2^{2n}s]}^n \leq (1 + \varepsilon)\, s,$$

ce qui entraîne

$$\tilde{l}_{(1-\varepsilon)s}^{a_n,n} \leq l_s^{a_n,n} \leq \tilde{l}_{(1+\varepsilon)s}^{a_n,n}.$$

On introduit alors les temps d'arrêt M_k^n, N_k^n, $k = 1, 2, \ldots$ définis par récurrence par

$$\begin{aligned} M_1^n &= \inf\{t \geq 0;\, B_t = a_n\}, \\ N_k^n &= \inf\{t \geq M_k^n;\, B_t = a_n + 2^{-n}\}, \\ M_{k+1}^n &= \inf\{t \geq N_k^n;\, B_t = a_n\}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\tilde{l}_s^{a_n,n} = 2^{-n} \sup\{j \geq 1;\, N_j^n \leq s\} \qquad (\sup \emptyset = 0)$$

et donc

$$N^n_{2^n \tilde{l}_s^{a_n,n}} \leq s < N^n_{2^n \tilde{l}_s^{a_n,n}+1}. \tag{3.2}$$

Lemme 3.3 *Pour tout $t \geq 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} L^{a_n}_{N^n_{[2^n t]}} = 2t, \qquad p.s.$$

Preuve. Grâce à la propriété de support des temps locaux browniens (proposition 2-6), on a

$$L^{a_n}_{N^n_{[2^n t]}} = \sum_{k=1}^{[2^n t]} \Big(L^{a_n}_{N_k^n} - L^{a_n}_{M_k^n} \Big).$$

Les variables $L^{a_n}_{N_k^n} - L^{a_n}_{M_k^n}$ sont indépendantes, à cause de la propriété de Markov forte aux instants de la forme M_k^n. De plus, toujours à cause de la propriété de Markov forte et en utilisant la proposition 2-8, ces variables suivent la loi exponentielle de moyenne $2 \cdot 2^{-n}$. Il en découle que

$$\begin{aligned} E\Big(L^{a_n}_{N^n_{[2^n t]}} \Big) &= 2 \cdot 2^{-n}\, [2^n t] \longrightarrow 2t \\ \operatorname{var} L^{a_n}_{N^n_{[2^n t]}} &= C\, 2^{-2n}\, [2^n t] \leq C\, t\, 2^{-n} \end{aligned}$$

d'où le résultat du lemme. $\square$

Revenons à la preuve du théorème. Par des arguments déjà utilisés ci-dessus, la convergence du lemme a lieu uniformément pour t variant dans un compact de $\mathbb{R}_+$, p.s. On peut donc en particulier prendre $t = \frac{1}{2} L_s^a + \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$. Alors, pour tout n assez grand,

$$2t = L_s^a + 2\varepsilon > L_s^{a_n},$$

grâce à la continuité de L_s^b en la variable b. D'après le lemme, on a p.s. pour n assez grand,

$$L^{a_n}_{N^n_{[2^n t]}} > L_s^{a_n},$$

et donc

$$N^n_{[2^n t]} > s \geq N^n_{2^n \tilde{l}_s^{a_n,n}},$$

d'après (3.2). Cela entraîne aussi

$$[2^n(\frac{1}{2}L_s^a + \varepsilon)] = [2^n t] \geq 2^n\, \tilde{l}_s^{a_n,n}.$$

On a donc obtenu que p.s. pour tout n assez grand

$$\tilde{l}_s^{a_n,n} \leq \frac{1}{2}L_s^a + \varepsilon.$$

Un raisonnement analogue, en prenant maintenant $t = \frac{1}{2}L_s^a - \varepsilon$, montre qu'on a aussi p.s. pour tout n assez grand,

$$\tilde{l}_s^{a_n,n} \geq \frac{1}{2}L_s^a - \varepsilon.$$

Cela termine la preuve du théorème. □

Remarque. Il existe d'autres résultats d'approximation des temps locaux par les nombres de montées, dont certains sont valables pour des semimartingales générales (voir notamment le chapitre III de [4]). L'énoncé ci-dessus est adapté aux applications qui seront développées dans les chapitres suivants.

Discutons quelques conséquences de la deuxième assertion du théorème. Soit $(S_n, n \in \mathbb{N})$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ avec $S_0 = 0$. Pour tous $n \geq 1$, $p \in \mathbb{Z}$, notons

$$\lambda_p^n = \mathrm{Card}\,\{j \leq n-1;\, S_j = p,\, S_{j+1} = p+1\}$$

qui représente le nombre de montées de la marche aléatoire de p à $p+1$ avant l'instant n. Alors, pour tous $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$,

$$\Big(2^{-n}\lambda_{2^{2n}}^{[2^n a_1]}, \ldots, 2^{-n}\lambda_{2^{2n}}^{[2^n a_k]}\Big) \xrightarrow{\text{(loi)}} \Big(\frac{1}{2}L_1^{a_1}, \ldots, \frac{1}{2}L_1^{a_k}\Big).$$

Cela découle du théorème précédent, puisque d'après la proposition 1 on a pour tout $n \geq 1$,

$$\Big(2^{-n}\lambda_{2^{2n}}^{[2^n a_1]}, \ldots, 2^{-n}\lambda_{2^{2n}}^{[2^n a_k]}\Big) \overset{\text{(loi)}}{=} \Big(l_1^{[a_1]_n,n}, \ldots, l_1^{[a_k]_n,n}\Big),$$

avec la notation $[a]_n = 2^{-n}[2^n a]$. Un raisonnement de symétrie montre que le résultat du théorème est aussi valable si on remplace nombres de montées par nombres de descentes. En combinant les deux, on obtient que, si

$$\nu_p^n = \mathrm{Card}\,\{j \leq n,\, S_j = p\},$$

on a

$$\Big(2^{-n}\nu_{2^{2n}}^{[2^n a_1]}, \ldots, 2^{-n}\nu_{2^{2n}}^{[2^n a_k]}\Big) \xrightarrow{\text{(loi)}} \Big(L_1^{a_1}, \ldots, L_1^{a_k}\Big).$$

Il n'est pas nécessaire dans les convergences précédentes de se limiter à des instants de la forme 2^{2n}. On montre facilement à partir des résultats précédents (voir l'exercice 3.1) qu'on a aussi, par exemple,

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\nu_n^{[n^{1/2}a_1]}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\nu_n^{[n^{1/2}a_k]}\Big) \xrightarrow{\text{(loi)}} \Big(L_1^{a_1}, \dots, L_1^{a_k}\Big). \tag{3.3}$$

Cette convergence a lieu conjointement avec la convergence en loi de $\big(n^{-1/2}S_{[nt]}, t \geq 0\big)$ vers le mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$. C'est le résultat "naturel" qui relie nombres de visites de la marche aléatoire simple et temps locaux browniens (il est facile de généraliser encore un peu en regardant les processus $(n^{-1/2}\nu_{[nt]}^{[n^{1/2}a_j]}, t \geq 0)$, qui convergent en loi vers $(L_t^{a_j}, t \geq 0)$).

3.3 Théorème de Ray-Knight

Nous allons maintenant utiliser le théorème limite pour les processus de branchement démontré dans le chapitre 1 pour établir un résultat important concernant les temps locaux browniens. Comme dans le chapitre 2, on note

$$\tau_s = \inf\{t \geq 0;\, L_t^0 > s\}.$$

L'application $s \to \tau_s$ est alors continue à droite. De plus, pour tout s_0 fixé, p.s. l'application $s \to \tau_s$ est aussi continue à gauche en $s = s_0$ (l'ensemble négligeable dépend ici bien sûr de s_0 puisque sinon $s \to \tau_s$ serait p.s. continue !). Pour établir ce dernier résultat on peut utiliser la proposition 2-7 et un résultat général sur les processus à accroissements indépendants. Ou alors on applique la propriété de Markov forte au temps d'arrêt

$$\tau_{s_0-} = \inf\{t \geq 0;\, L_t^0 = s_0\}$$

et en utilisant la proposition 2-6 on trouve immédiatement que $\tau_{s_0} = \tau_{s_0-}$, p.s. Rappelons qu'on appelle diffusion de Feller le processus limite du théorème 1-4.

Théorème 3.4 (Ray-Knight) *Pour tout $s > 0$, le processus $(L_{\tau_s}^a, a \geq 0)$ est une diffusion de Feller de valeur initiale s et de paramètre $\rho^2 = 4$.*

Remarques. On énonce habituellement le théorème 3.4 en disant que le processus $(L_{\tau_s}^a, a \geq 0)$ est un carré de processus de Bessel de dimension 0 issu de s (voir par exemple [35]). Une conséquence importante de ce résultat est le caractère markovien homogène du processus $(L_{\tau_s}^a, a \geq 0)$, qui était loin d'être évident a priori.

Preuve. On traite seulement le cas $s = 1$ (le cas général est analogue, et on peut aussi se ramener au cas $s = 1$ par un changement d'échelle). Soit σ_n l'instant terminal de la 2^{n-1}-ème excursion positive de la marche aléatoire (S^n) au-dessus de 0. Par construction,

$$l^{0,n}_{2^{-2n}\sigma_n} = \frac{1}{2}.$$

Le théorème 3.2 entraîne alors que la suite $(2^{-2n}\sigma_n)$ est bornée p.s., et de plus

$$\lim_{n\to\infty} \left(l^{0,n}_{2^{-2n}\sigma_n} - \frac{1}{2}L^0_{2^{-2n}\sigma_n}\right) = 0\,, \qquad \text{p.s.}$$

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} L^0_{2^{-2n}\sigma_n} = 1\,, \qquad \text{p.s.}$$

En utilisant la continuité de l'application $s \to \tau_s$ en $s = 1$ (ou de manière équivalente le fait que $L^0_{\tau_1-\varepsilon} < 1 < L^0_{\tau_1+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, p.s.), on obtient que

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-2n}\sigma_n = \tau_1\,, \qquad \text{p.s.} \tag{3.4}$$

Notons $\omega^n_1, \ldots, \omega^n_{2^{n-1}}$ les excursions positives de S^n jusqu'à l'instant σ_n. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$2^n l^{2^{-n}p,n}_{2^{-2n}\sigma_n} = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \mathrm{Card}\,\{k;\, \omega^n_j(k) = p, \omega^n_j(k+1) = p+1\} = Z^{(n)}_p,$$

où d'après le théorème 1-3, le processus $(Z^{(n)}_p, p \in \mathbb{N})$ est un processus de branchement de Galton-Watson de loi de reproduction géométrique de paramètre 1/2, avec $Z^{(n)}_0 = 2^{n-1}$. En utilisant le théorème 1-4, on trouve que la suite de processus

$$(l^{[a]_n,n}_{2^{-2n}\sigma_n}, a \geq 0)$$

converge en loi, au sens des marginales de dimension finie, vers une diffusion de Feller issue de 1/2 avec paramètre $\rho^2 = 2$. D'autre part, d'après le théorème 3.2 et (3.4), on a pour tout $a \geq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} l^{[a]_n,n}_{2^{-2n}\sigma_n} = \frac{1}{2}L^a_{\tau_1}\,, \qquad \text{p.s.}$$

Le théorème 3.4 en découle. □

Remarques. L'existence d'une version continue pour le processus que nous appelons diffusion de Feller découle de la continuité du processus $(L^a_{\tau_1}, a \geq 0)$. De même, la propriété d'extinction de ce processus, également mentionnée au chapitre 1, correspond au fait que $L^a_{\tau_1} = 0$ pour tout $a \geq \sup_{s\leq\tau_1} B_s$. L'interprétation donnée dans le chapitre 1 du noyau de transition de la diffusion de Feller peut aussi être formulée, de manière même plus éclairante, en termes du mouvement brownien: voir exercice 3.3.

L'idée de voir le théorème de Ray-Knight comme conséquence de théorèmes limites pour les processus de branchement apparaît dans Kawazu et Watanabe [21] (voir aussi [22]). Cette idée s'applique aussi à un autre théorème de Ray-Knight, également important, qui donne la loi du processus $(L^a_{T_1}, a \leq 1)$, où $T_1 = \inf\{t \geq 0,\, B_t = 1\}$.

3.4 Résultats analogues pour le mouvement brownien réfléchi

Le processus $(\beta_t, t \geq 0)$ défini par $\beta_t = |B_t|$ est appelé mouvement brownien réfléchi. Le caractère symétrique des densités de transition $p_t(x)$ du mouvement brownien réel entraîne facilement que (β_t) est un processus de Markov homogène. En effet, pour toute fonction f mesurable positive sur $\mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} E\Big(f(\beta_{t+s})\Big|\mathcal{F}_t\Big) &= \int_{\mathbb{R}} f(|y|)\, p_s(y - B_t)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} f(y)\, (p_s(y-\beta_t) + p_s(y+\beta_t))\, dy, \end{aligned}$$

ce qui montre que les densités de transition de (β_t) sont données par

$$p(t,x,y) = p_t(y-x) + p_t(y+x).$$

On peut reformuler la plupart des résultats de ce chapitre, et du chapitre précédent, en termes du processus (β_t). Pour commencer, les temps locaux de (β_t) sont définis par

$$L^a_t(\beta) = L^a_t(B) + L^{-a}_t(B)\,, \qquad a, t \in \mathbb{R}_+,$$

de façon que la formule de densité d'occupation

$$\int_0^t f(\beta_s)\, ds = \int f(a)\, L^a_t(\beta)\, da$$

reste valable pour toute fonction f mesurable positive sur $\mathbb{R}_+$. L'application $(a,t) \to L^a_t(\beta)$ est p.s. continue sur $(\mathbb{R}_+)^2$.

En notant comme dans la proposition 2-8

$$R_a = \inf\{t \geq 0, \beta_t = a\}, \qquad (a > 0)$$

la variable $L^0_{R_a}(\beta)$ suit une loi exponentielle de moyenne $2a$ (remarquer que $L^0_t(\beta) = 2\, L^0_t(B)$).

Il est aussi facile d'étendre le résultat du théorème 3.2. Posons pour $a \in 2^{-n}\mathbb{N}$ et $s \geq 0$

$$\bar{l}_s^{a,n} = 2^{-n}\mathrm{Card}\,\{k \leq [2^{2n}s] - 1;\ |S_k^n| = 2^n a,\ |S_{k+1}^n| = 2^n a + 1\}.$$

Alors $2^n \bar{l}_s^{a,n}$ est le nombre de montées, de $2^n a$ à $2^n a + 1$ avant l'instant $[2^{2n}s]$, du processus $(|S_k^n|, k \in \mathbb{N})$ qui est une marche aléatoire simple sur $\mathbb{N}$. Le théorème 2, et le résultat analogue en remplaçant nombres de montées par nombres de descentes, entraînent que si $a_n \in 2^{-n}\mathbb{N}$ converge vers $a \in \mathbb{R}_+$,

$$\Big(\bar{l}_s^{a_n,n}, s \geq 0\Big) \longrightarrow \Big(\frac{1}{2}L_s^a(\beta),\ s \geq 0\Big) \tag{3.5}$$

p.s. uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+$.

Enfin, on a aussi une version du théorème de Ray-Knight en termes du mouvement brownien réfléchi. Si

$$\bar{\tau}_s = \inf\{t \geq 0,\ L_t^0(\beta) > s\} = \tau_{s/2},$$

le processus $(L_{\bar{\tau}_s}^a(\beta), a \geq 0)$ est encore une diffusion de Feller avec valeur initiale s et paramètre $\rho^2 = 4$. Pour obtenir ce résultat, on peut soit reprendre la preuve du théorème 3.4 en utilisant maintenant (3.5) au lieu du théorème 3.2, soit utiliser directement le théorème 3.4 en observant que les deux processus

$$(L_{\tau_s}^a(B), a \geq 0)\ , \quad (L_{\tau_s}^{-a}(B), a \geq 0)$$

sont indépendants et de même loi (cf exercice 3.4).

3.5 Dimension de Hausdorff de l'ensemble des zéros

En application des résultats précédents, nous allons maintenant calculer la dimension de Hausdorff de l'ensemble $\{t \geq 0,\ B_t = 0\}$. Nous rappelons d'abord la définition de la dimension de Hausdorff. Soit A un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $\alpha > 0$, on pose

$$x^\alpha - m(A) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{(D_i)_{i\in I} \in \mathcal{R}_\varepsilon(A)} \sum_{i \in I} (\mathrm{diam}\, D_i)^\alpha,$$

où $\mathcal{R}_\varepsilon(A)$ désigne l'ensemble des recouvrements dénombrables de A par des boules de rayon inférieur à ε, et $\mathrm{diam}\, D_i$ est le diamètre de la boule D_i. Remarquons que l'infimum ci-dessus est une fonction croissante de ε, et donc que la limite existe dans $[0, \infty]$. Il est facile de voir qu'il existe une valeur critique $\alpha_0(A)$ telle que

$$x^\alpha - m(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > \alpha_0(A), \\ \infty & \text{si } \alpha < \alpha_0(A). \end{cases}$$

Le nombre $\alpha_0(A)$ est noté $\dim A$ et appelé dimension de Hausdorff de A. On vérifie aisément sur la définition que la dimension de Hausdorff d'une réunion dénombrable d'ensembles A_n est $\sup \dim A_n$.

Lemme 3.5 *Soient ν une mesure sur $\mathbb{R}^d$ et $\alpha > 0$. Supposons qu'il existe une constante C telle que pour toute boule D dans $\mathbb{R}^d$,*

$$\nu(D) \leq C\,(\operatorname{diam} D)^\alpha.$$

Alors, si A est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$ tel que $\nu(A) > 0$, on a $\dim A \geq \alpha$.

Preuve. Soit (D_i) un recouvrement dénombrable de A par des boules. Alors,

$$\sum_i (\operatorname{diam} D_i)^\alpha \geq \frac{1}{C} \sum_i \nu(D_i) \geq \frac{1}{C}\nu(A).$$

Cela entraîne $x^\alpha - m(A) \geq C^{-1}\nu(A) > 0$ et donc $\dim A \geq \alpha$. □

Théorème 3.6 *On a p.s.*

$$\dim \{t \geq 0,\ B_t = 0\} = \frac{1}{2}.$$

Preuve. Notons $H = \{t \geq 0,\ B_t = 0\}$. Pour minorer $\dim H$, on applique le lemme précédent à la mesure $1_{[0,1]}(t)\, d_t L_t^0(B)$. D'après la proposition 2-4, il existe p.s. pour tout $\varepsilon \in]0, 1/2[$ une constante C_ε (dépendant de ω) telle que, pour tous $u, v \in [0,1]$,

$$|L_v^0(B) - L_u^0(B)| \leq C_\varepsilon\, |v-u|^{1/2-\varepsilon}.$$

Cela montre que la mesure $1_{[0,1]}(t)\, d_t L_t^0(B)$ satisfait l'hypothèse du lemme avec $\alpha = 1/2 - \varepsilon$. Comme d'après la proposition 2-6 cette mesure est non triviale et portée par H on conclut que $\dim H \geq 1/2 - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, p.s.

Pour majorer $\dim H$, il suffit de majorer $\dim H \cap [0,T]$ pour tout $T > 0$. Un argument de changement d'échelle permet de se ramener à $\dim H \cap [0,1]$. Soit $\alpha > 1/2$. Nous devons montrer que $\dim H \cap [0,1] \leq \alpha$ p.s. Pour cela, on construit des recouvrements explicites. Pour tout entier $n \geq 1$, considérons les deux suites de temps d'arrêt (U_k^n), (V_k^n) définies par récurrence par

$$\begin{aligned}
&U_1^n = 0\\
&V_k^n = \inf\{t \geq U_k^n, |B_t| = 2^{-n}\}\\
&U_{k+1}^n = \inf\{t \geq V_k^n, B_t = 0\}.
\end{aligned}$$

Soit $N_n = \sup\{k \geq 1,\, U_k^n \leq 1\}$. Alors N_n est la somme du nombre de montées de -2^{-n} à 0 et du nombre de descentes de 2^{-n} à 0 effectuées par le mouvement brownien avant l'instant 1. Le théorème 3.2 entraîne donc

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n}\, N_n = L_1^0(B) \qquad \text{p.s.} \tag{3.6}$$

Observons que

$$\big(H \cap [0,1]\big) \subset \bigcup_{k\in\{1,\ldots,N_n\}} [U_k^n, V_k^n], \tag{3.7}$$

et qu'on peut majorer

$$\sum_{k=1}^{N_n} (V_k^n - U_k^n)^\alpha \le N_n \sup_{k\in\{1,\ldots,N_n\}} (V_k^n - U_k^n)^\alpha.$$

Le problème est donc maintenant de majorer ce dernier supremum. Grâce à la propriété de Markov forte, les variables $V_k^n - U_k^n$, $k = 1, 2, \ldots$, sont indépendantes et de même loi, cette loi commune étant la loi de $2^{-2n} T_1^0$, où $T_1^0 = \inf\{t \ge 0, |B_t| = 1\}$ comme dans la partie 1 ci-dessus. Rappelons qu'on peut choisir $\lambda > 0$ assez petit de façon que $E(\exp \lambda T_1^0) = C < \infty$. Alors, si $K \ge 1$ est un entier,

$$\begin{aligned} P\Big(\sup_{k\in\{1,\ldots,K2^n\}} (V_k^n - U_k^n)^\alpha > 2^{-n} \Big) &\le K 2^n \, P\big(2^{-2n\alpha} (T_1^0)^\alpha > 2^{-n}\big) \\ &= K 2^n \, P\big(T_1^0 > 2^{n(2-1/\alpha)}\big) \\ &\le K C 2^n \, \exp\big(- \lambda 2^{n(2-1/\alpha)}\big). \end{aligned}$$

Puisque $2 - 1/\alpha > 0$, le lemme de Borel-Cantelli montre que p.s. pour tout n assez grand

$$\sup_{k\in\{1,\ldots,K2^n\}} (V_k^n - U_k^n)^\alpha \le 2^{-n}.$$

Finalement, en utilisant (3.6), on a sur l'ensemble $\{L_1^0(B) < K\}$ p.s. pour tout n assez grand, $N_n \le K 2^n$ et

$$\sum_{k=1}^{N_n} (V_k^n - U_k^n)^\alpha \le K 2^n \times 2^{-n} = K,$$

ce qui compte-tenu de (3.7) et de la définition même des quantités $x^\alpha - m(A)$ entraîne que $x^\alpha - m(H \cap [0,1]) \le K$. On a donc obtenu $\dim (H \cap [0,1]) \le \alpha$ p.s. sur l'ensemble $\{L_1^0(B) < K\}$. Comme cela est vrai pour tout entier K, la preuve est terminée. □

Remarque. Des résultats beaucoup plus précis sur la mesure de Hausdorff de l'ensemble des zéros de B ont été établis par Perkins [32]

Exercices

Exercice 3.1 *Soit m_n une suite d'entiers croissant vers l'infini et $\varepsilon_n = 1/m_n$. On modifie les définitions de ce chapitre en posant $T_{k+1}^n = \inf\{t \ge T_k^n, |B_t - B_{T_k^n}| = \varepsilon_n\}$, $S_k^n = m_n B_{T_k^n}$, et pour $a \in \varepsilon_n \mathbb{Z}$,*

$$l_s^{a,n} = \varepsilon_n \mathrm{Card}\, \{k \le [m_n^2 s] - 1;\ S_k^n = m_n a,\ S_{k+1}^n = m_n a + 1\}.$$

Vérifier alors que sous l'hypothèse $\sum \varepsilon_n < \infty$, le résultat concernant $l_s^{a,n}$ dans le théorème 3.2 reste vrai. En déduire une preuve de la convergence (3.3) *(on pourra remarquer que pour qu'une suite (U_m) de variables aléatoires converge en loi vers une variable U, il suffit que pour toute suite d'entiers (m_n) croissant "assez vite" vers l'infini la sous-suite (U_{m_n}) converge en loi vers U).*

Exercice 3.2 *Pour tout $\varepsilon > 0$, soit N_ε le nombre de montées du mouvement brownien B de* 0 *à ε sur l'intervalle de temps* $[0,1]$. *Montrer à l'aide du théorème 3.2 et en s'inspirant de l'exercice précédent qu'on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon N_\varepsilon = \frac{1}{2} L_1^0, \qquad p.s.$$

(on prendra d'abord $\varepsilon = \varepsilon_m = m^{-2}$).

Exercice 3.3 *Soient $a > 0$ et (U_n), (V_n) les deux suites de temps d'arrêt définies par récurrence par*

$$\begin{aligned} &U_1 = 0 \\ &V_k = \inf\{t \geq U_k,\ B_t = a\} \\ &U_{k+1} = \inf\{t \geq V_k,\ B_t = 0\}. \end{aligned}$$

Pour tout $s \geq 0$, soit aussi $M_s = \mathrm{Card}\,\{k,\ V_k \leq \tau_s\}$. Montrer que les variables aléatoires $L^a_{U_{k+1}} - L^a_{U_k}$ sont indépendantes de même loi exponentielle de moyenne $2a$, et indépendantes du processus $(M_s, s \geq 0)$. Montrer aussi que le processus $(M_s, s \geq 0)$ est un processus de Poisson de paramètre $(2a)^{-1}$. En écrivant

$$L^a_{\tau_s} = \sum_{k=1}^{M_s} (L^a_{U_{k+1}} - L^a_{U_k})$$

retrouver ainsi l'interprétation, décrite dans le chapitre 1, du noyau de transition de la diffusion de Feller .

Exercice 3.4 *En utilisant l'indépendance des excursions positives et négatives pour une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, et la méthode de preuve du théorème 3.4, montrer que les deux processus $(L^a_{\tau_1}, a \geq 0)$ et $(L^{-a}_{\tau_1}, a \geq 0)$ sont indépendants et de même loi. En combinant ce résultat avec l'exercice 1-3, donner une preuve du théorème de Ray-Knight pour le mouvement brownien réfléchi.*

Chapter 4

Processus de Branchement Brownien et Super-Mouvement Brownien

Nous introduisons dans ce chapitre de nouveaux objets probabilistes qui rendent compte de l'évolution d'un système de “particules” soumises à un double phénomène de branchement et de déplacement spatial aléatoire. Nous supposerons que ce déplacement spatial est gouverné par la loi du mouvement brownien en dimension d, mais on pourrait par les mêmes méthodes traiter le cas d'un processus de Markov bien plus général. Le modèle dans lequel le phénomène de branchement ne se produit qu'à des instants discrets est le processus de branchement brownien, que nous définissons rigoureusement à l'aide de la notion d'arbre introduite dans le Chapitre 1. Un passage à la limite convenable conduit ensuite au super-mouvement brownien, processus à valeurs dans l'espace des mesures finies sur $\mathbb{R}^d$, qui grossièrement représente l'évolution d'un système infini de particules, où les particules ont chacune un poids infinitésimal et sont continuellement soumises à un phénomène de branchement critique.

4.1 Processus de branchement brownien

On se propose d'étudier un système de particules dont l'évolution est régie par les règles suivantes. On se fixe un entier $N \geq 1$, un réel $T > 0$ et une loi de probabilité ν sur $\mathbb{N}$ qui est une loi de branchement critique de variance finie (i.e. $\sum k\nu(k) = 1$ et $\sum k^2\nu(k) < \infty$). A l'instant $t = 0$, on a N particules situées aux points $x_1, \ldots, x_d$ de $\mathbb{R}^d$. Ces particules se déplacent entre les instants $t = 0$ et $t = T$ selon des mouvements browniens indépendants dans $\mathbb{R}^d$. A l'instant T, toutes les particules meurent et chacune donne naissance à k descendants avec probabilité $\nu(k)$. Les nombres de descendants des différentes particules sont indépendants (entre eux) et aussi indépendants des déplacements spatiaux. Les particules nées à l'instant T se déplacent à leur tour entre les instants T et $2T$ selon des mouvements browniens indépendants, puis meurent à l'instant T en donnant naissance à de nouvelles particules, toujours selon la loi de branchement ν, etc.

Pour donner une description mathématique précise du système décrit ci-dessus, on utilise la notion d'arbre introduite au chapitre 1. Sur un espace de probabilité, on se donne

– N arbres aléatoires indépendants $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_N$ de loi $\Pi(d\mathcal{A})$, la loi de l'arbre de Galton-Watson de loi de reproduction ν définie dans la proposition 1-1;

– une famille $(B^{j,u}, j \in \{1, \ldots, N\}, u \in U\}$ de mouvements browniens dans $\mathbb{R}^d$ issus de 0, indépendants entre eux et aussi indépendants des arbres aléatoires $\mathcal{A}_j$.

Ensuite, pour tous $j \in \{1, \ldots, N\}$, $u = u_1 \ldots u_p \in \mathcal{A}_j$, on pose

$$V_t^{j,u} = x_j + \sum_{k=0}^{|u|-1} B_T^{j,u_1 \ldots u_k} + B_{t-pT}^{j,u}, \qquad \forall t \in [pT, (p+1)T[.$$

Cette définition s'interprète de la manière suivante. L'arbre $\mathcal{A}_j$ est l'arbre généalogique des descendants de la j-ième particule présente à l'instant 0. Le mouvement brownien $B^{j,u}$ gouverne pendant l'intervalle de temps $[|u|T, (|u|+1)T[$ le déplacement de la particule descendant de la j-ième particule ancêtre correspondant à l'arête u de $\mathcal{A}_j$. Une particule en vie à l'instant $t \in [pT, (p+1)T[$ est associée à un entier $j \in \{1, \ldots, N\}$ et une arête $u \in \mathcal{A}_j$ telle que $|u| = p$. Sa position à l'instant t est obtenue en faisant la somme des déplacements successifs de ses ascendants et de son propre déplacement entre les instants pT et t.

Les positions des particules en vie à l'instant $t \in [pT, (p+1)T[$ sont donc les

$$(V_t^{j,u},\ j \in \{1, \ldots, N\},\ u \in \mathcal{A}_j,\ |u| = p)$$

Dans la suite, nous nous intéresserons surtout à l'état de la population aux instants de la forme $t = kT$, $k \in \mathbb{N}$. A cette fin, on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$Z_k = \sum_{j=1}^{N} \sum_{u \in \mathcal{A}_j, |u|=k} \delta_{V_{kT}^{j,u}}$$

et on a en particulier

$$Z_0 = \sum_{j=1}^{N} \delta_{x_j}.$$

Le processus $(Z_k, k \in \mathbb{N})$ est appelé processus de branchement brownien de loi de reproduction ν, de durée de vie T, issu de $\lambda = \sum_{j=1}^{N} \delta_{x_j}$ (cette terminologie n'est pas "canonique", il existe de nombreux autres modèles voisins de processus de branchement brownien). Le processus Z prend ses valeurs dans l'espace $M_p(\mathbb{R}^d)$ des mesures ponctuelles sur $\mathbb{R}^d$, i.e. des sommes finies de masses de Dirac, muni de la topologie de la convergence étroite.

Dans toute la suite, la loi de reproduction ν restera fixée, et nous noterons P_λ^T la loi du processus $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (il est facile de voir que cette loi ne dépend de $x_1, \ldots, x_N$ que par l'intermédiaire de la mesure λ). La probabilité P_λ^T est définie sur l'espace canonique des processus à valeurs dans $M_p(\mathbb{R}^d)$ et, par abus de notation, nous noterons encore Z le processus canonique sur cet espace.

Proposition 4.1 (i) *Soient Z, Z' deux processus indépendants de lois respectives P_λ^T, $P_{\lambda'}^T$. Alors $Z + Z'$ a pour loi $P_{\lambda+\lambda'}^T$.*

(ii) *Le processus $(Z_k, k \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $M_p(\mathbb{R}^d)$.*

(iii) *Soit φ une fonction mesurable positive sur $\mathbb{R}^d$. Alors,*

$$E_\lambda^T(< Z_k, \varphi >) =< \lambda, Q_{kT}\varphi >,$$

où $(Q_t, t \geq 0)$ désigne le semigroupe du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$. Pour $t > 0$,

$$Q_t\varphi(y) = \int dz\, q_t(z-y)\,\varphi(y)\,,$$
$$q_t(z) = (2\pi t)^{-d/2} \exp -\frac{|z|^2}{2t}\,.$$

Preuve La propriété (i) est presque évidente par construction: on peut supposer que Z et Z' sont construits à partir d'arbres $\mathcal{A}_j$, $\mathcal{A}'_j$ et de mouvements browniens $B^{j,u}$, $B'^{j,u}$ indépendants, et alors il est clair que $Z + Z'$ est construit comme le processus de loi $P_{\lambda+\lambda'}^T$.

Etablissons (iii). On a

$$\begin{aligned} E(< Z_k, \varphi >) &= \sum_{j=1}^N \sum_{|u|=k} P(u \in \mathcal{A}_j)\, E(\varphi(V_{kT}^{j,u})) \\ &= \sum_{j=1}^N Q_{kT}\varphi(x_j) \sum_{|u|=k} P(u \in \mathcal{A}_j) \\ &= \sum_{j=1}^N Q_{kT}\varphi(x_j) \\ &= < \lambda, Q_{kT}\varphi > \end{aligned}$$

en utilisant le caractère critique de la loi de branchement (qui entraîne que Card $\{u \in \mathcal{A}_j, |u| = k\}$ est une martingale) et le fait que, $V_{kT}^{j,u} = x_j + \sum_{l=0}^{k-1} B_T^{j,u_1\ldots u_l}$ a la loi d'un mouvement brownien issu de x_j, à l'instant kT.

Il reste à établir la propriété (ii). Cette propriété est claire intuitivement, puisque si l'on connait la mesure Z_k donnant les positions des particules qui viennent de naître à l'instant kT, l'évolution future du processus ne fait intervenir que des quantités indépendantes du passé. De plus, le processus $(Z_{k+n}, n \in \mathbb{N})$ est construit comme $(Z_n, n \in \mathbb{N})$ au changement de valeur initiale près. Pour rendre ces considérations plus précises, introduisons pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$ et tout $k \in \mathbb{N}$ l'arbre tronqué

$$\mathcal{A}_j^{(k)} = \mathcal{A}_j \cap \{u \in U; |u| \leq k\}.$$

Soit $\mathcal{G}_k$ la tribu

$$\mathcal{G}_k = \sigma(B^{j,u}, j \in \{1, \ldots, N\}, |u| < k\} \vee \sigma(\mathcal{A}_j^{(k)}, j \in \{1, \ldots, N\}).$$

Remarquons que Z_k est $\mathcal{G}_k$-mesurable. On vérifie ensuite que la loi conditionnelle du processus $(Z_{k+n}, n \in \mathbb{N})$ connaissant $\mathcal{G}_k$ est $P^T_{Z_k}$. Pour cela on écrit

$$Z_{k+n} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{u \in \mathcal{A}_j, |u|=k} \left(\sum_{v \in T_u \mathcal{A}_j, |v|=n} \delta_{V^{j,uv}_{(k+n)T}} \right).$$

Or en utilisant la propriété de branchement des arbres de Galton-Watson (établie dans le chapitre 1 pour la première génération et facilement généralisable à la k-ième par la même preuve) et l'indépendance des mouvements browniens $B^{j,u}$, on vérifie aisément que conditionnellement à $\mathcal{G}_k$ les processus

$$\left(\sum_{v \in T_u \mathcal{A}_j, |v|=n} \delta_{V^{j,uv}_{(k+n)T}}, n \in \mathbb{N} \right)$$

pour $u \in \mathcal{A}_j$, $|u| = k$, sont indépendants et de loi conditionnelle

$$P^T_{\delta_{V^{j,u}_{kT}}}.$$

On termine en utilisant (i). $\square$

4.2 Convergence vers le super-mouvement brownien

Nous notons $M_f(\mathbb{R}^d)$ l'espace des mesures finies sur $\mathbb{R}^d$, qui contient $M_p(\mathbb{R}^d)$. L'espace $M_f(\mathbb{R}^d)$ est muni de la topologie induite par la distance de la convergence étroite, qui en fait un espace polonais.

Pour tout $n \geq 1$, soit Z^n un processus de branchement de loi de reproduction ν (critique et de variance finie), de temps de vie $1/n$ et de valeur initiale $\lambda_n \in M_p(\mathbb{R}^d)$. On note $\sigma^2 = \operatorname{var} \nu$ et $BL(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions lipschitziennes bornées et positives sur $\mathbb{R}^d$.

Théorème 4.2 *Supposons que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\lambda_n = \mu,$$

où $\mu \in M_f(\mathbb{R}^d)$, *et la convergence a lieu au sens de la convergence étroite. Pour tout* $n \geq 1$, *soit* $X_t^n = \frac{1}{n} Z^n_{[nt]}$. *Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \big(X_t^n, t \geq 0\big) = \big(X_t, t \geq 0\big),$$

au sens de la convergence des lois marginales de dimension finie. Le processus limite est un processus de Markov homogène à valeurs dans $M_f(\mathbb{R}^d)$. *Sa loi peut être caractérisée de la manière suivante. Si* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p$, *on a* $X_0 = \mu$ *et, pour toute fonction* $f \in BL(\mathbb{R}^d)$,

$$E\Big(\exp - < X_{t_p}, f > \,\Big|\, X_{t_0}, \ldots, X_{t_{p-1}}\Big) = \exp - < X_{t_{p-1}}, v_{t_p - t_{p-1}} >, \qquad (4.1)$$

où la fonction $v_t(x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ *est l'unique solution positive de l'équation intégrale*

$$v_t(x) = Q_t f(x) - \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t Q_{t-s}(v_s^2)(x)\,ds. \qquad (4.2)$$

Le processus limite X est appelé super-mouvement brownien en dimension d (issu de μ). La preuve du théorème 4.2 occupe l'essentiel du reste de ce chapitre. Avant de détailler cette preuve, commençons par quelques remarques sur cet énoncé.

(a) La donnée initiale $X_0 = \mu$ et la formule (4.1) caractérisent complètement les lois marginales de dimension finie du processus X. En effet, soit X' un autre processus à valeurs dans $M_f(\mathbb{R}^d)$ possédant les mêmes propriétés. En appliquant (4.1) avec $p = 1$, on a d'abord, pour tout $t > 0$ et toute fonction $f \in BL(\mathbb{R}^d)$,

$$E(\exp - < X_t, f >) = \exp - < \mu, v_t >= E(\exp - < X'_t, f >). \qquad (4.3)$$

La tribu borélienne sur $M_f(\mathbb{R}^d)$ est engendrée par les applications

$$\theta \longrightarrow \exp - < \theta, f >, \qquad f \in BL(\mathbb{R}^d)$$

(en effet, il est facile de voir que la distance sur $M_f(\mathbb{R}^d)$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par ces applications). De plus, ces applications forment un ensemble stable par produit. D'après un théorème de classe monotone fonctionnel (voir par exemple [9], p.20), la formule (4.3) entraîne que, pour toute fonction F mesurable bornée sur $M_f(\mathbb{R}^d)$,

$$E(F(X_t)) = E(F(X'_t))$$

donc que X_t et X'_t ont même loi. Notons $R_t(\mu, d\mu')$ la loi de X_t, qu'on peut définir pour n'importe quelle mesure $\mu \in M_f(\mathbb{R}^d)$ en choisissant la suite (λ_n) de façon convenable. On a pour toute fonction $f \in BL(\mathbb{R}^d)$,

$$\int R_t(\mu, d\mu')\ \exp - < \mu', f >= \exp - < \mu, v_t >$$

et le terme de droite est une fonction mesurable de μ. A nouveau un argument de classe monotone montre que, pour toute fonction F mesurable bornée sur $M_f(\mathbb{R}^d)$,

$$\int R_t(\mu, d\mu')\, F(\mu')$$

est fonction mesurable de μ. Autrement dit, $R_t(\mu, d\mu')$ est un noyau de $M_f(\mathbb{R}^d)$ dans $M_f(\mathbb{R}^d)$. La formule (4.1) peut alors être réécrite comme

$$E\Big(\exp - < X_{t_p}, f > \Big| X_{t_0}, \ldots, X_{t_{p-1}}\Big) = \int R_{t_p - t_{p-1}}(X_{t_{p-1}}, d\mu')\ \exp - < \mu', f > .$$

Par le même argument de classe monotone, on obtient que, pour toute fonction F mesurable bornée sur $M_f(\mathbb{R}^d)$,

$$E\Big(F(X_{t_p}) \Big| X_{t_0}, \ldots, X_{t_{p-1}}\Big) = \int R_{t_p - t_{p-1}}(X_{t_{p-1}}, d\mu')\, F(\mu').$$

On a ainsi prouvé que X est un processus de Markov homogène à valeurs dans $M_f(\mathbb{R}^d)$, de noyau de transition $R_t(\mu, d\mu')$. La même propriété est satisfaite par X' et, puisque $X_0 = X'_0$, on conclut que X et X' ont même loi.

(b) D'après les arguments développés dans (a) ci-dessus, il suffira, pour montrer que le processus limite est markovien homogène, d'établir la formule (4.1). Nous montrerons en fait que pour tout choix de $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p$, on a la convergence

$$\big(X^n_{t_0}, X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_p}\big) \xrightarrow{\text{(loi)}} \big(X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_p}\big),$$

où la limite est un vecteur aléatoire de $M_f(\mathbb{R}^d)^{p+1}$ vérifiant $X_{t_0} = \mu$ et la formule (4.1). Le théorème d'extension de Kolmogorov assure ensuite l'existence d'un processus X ayant ces marginales de dimension finie.

(c) L'unicité de la solution positive de (4.2) découle facilement du lemme de Gronwall. On a d'abord, de manière évidente, $0 \le v_t \le \|f\|_\infty$. Donc, si v'_t est une autre solution positive,

$$\begin{aligned}
|v_t(x) - v'_t(x)| &\le \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t |Q_{t-s}((v_s)^2 - (v'_s)^2)(x)|\, ds \\
&\le \sigma^2 \|f\|_\infty \int_0^t Q_{t-s}|v_s - v'_s|(x)\, ds \\
&\le \sigma^2 \|f\|_\infty \int_0^t \|v_s - v'_s\|_\infty\, ds
\end{aligned}$$

d'où $\|v_s - v'_s\|_\infty = 0$.

(d) Dans le cas où f est constante, disons $f = \alpha \geq 0$, en utilisant l'unicité établie ci-dessus, on vérifie facilement que la fonction $v_t(x)$ ne dépend pas de x et vaut

$$v_t(x) = \frac{\alpha}{1 + \frac{\sigma^2}{2}\alpha t}.$$

En comparant avec le théorème 1-4, on voit que le processus $(< X_t, 1 >, t \geq 0)$ est une diffusion de Feller issue de $< \mu, 1 >$. Cela n'a rien de surprenant puisque

$$< X_t^n, 1 >= \frac{1}{n} < Z_{[nt]}^n, 1 >$$

et le processus $(< Z_k^n, 1 >, k \in \mathbb{N})$ est un processus de Galton-Watson de loi de reproduction ν avec valeur initiale $< \lambda_n, 1 >\approx n < \mu, 1 >$. La convergence en loi des processus $(< X_t^n, 1 >, t \geq 0)$ revient donc au théorème 1-4, que nous retrouverons indépendamment, et sans avoir besoin du lemme 1-5 que nous avions admis.

4.3 Lemmes préliminaires

Dans ce paragraphe, nous établissons certains résultats préliminaires concernant les fonctionnelles de Laplace du processus de branchement brownien, qui sont des ingrédients essentiels de la preuve du théorème 4.2. Nous fixons $f \in BL(\mathbb{R}^d)$. Pour tous $n \geq 1$, $t \in n^{-1}\mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$v_n(t,x) = -n \, \log E_{\delta_x}^{1/n}\Big(\exp -\frac{1}{n} < Z_{nt}, f > \Big).$$

Cette définition est motivée par le calcul suivant, où on écrit $\lambda_n = \sum_{i=1}^{m_n} \delta_{x_i^n}$:

$$\begin{aligned} E\Big(\exp -\frac{1}{n} < Z_{nt}^n, f > \Big) &= \prod_{i=1}^{m_n} E_{\delta_{x_i^n}}^{1/n}\Big(\exp -\frac{1}{n} < Z_{nt}, f > \Big) \\ &= \prod_{i=1}^{m_n} \exp -\frac{1}{n} v_n(t, x_i^n) \\ &= \exp - < \frac{1}{n}\lambda_n, v_n(t,\cdot) > . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Dans la première égalité, on a utilisé la proposition 1-(i). On sait déjà que $\frac{1}{n}\lambda_n$ converge vers μ. Si on peut montrer la convergence de v_n en un sens approprié, on aura obtenu la convergence des “fonctionnelles de Laplace” de la mesure aléatoire X_t^n.

Lemme 4.3 *Si $t \in n^{-1}\mathbb{N}_*$,*

$$v_n(t,x) = Q_{1/n} v_n(t-\frac{1}{n},\cdot)(x) - \frac{\sigma^2}{2n} v_n(t-\frac{1}{n},x)^2 + o(\frac{1}{n}), \tag{4.5}$$

où l'estimation $o(\frac{1}{n})$ est uniforme en $t \in n^{-1}\mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Preuve. Observons d'abord que $v_n(t,x)$ est uniformément bornée par $\|f\|_\infty$. En effet, en utilisant l'inégalité de Jensen,

$$v_n(t,x) \leq -n \log \exp E^{1/n}_{\delta_x}\big(-\frac{1}{n} < Z_{nt}, f > \big) = E^{1/n}_{\delta_x}(< Z_{nt}, f >) = Q_t f(x),$$

d'après la proposition 4.1-(iii). De plus, les fonctions $v_n(t,\cdot)$ sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}^d$ avec une constante qui dépend seulement de f:

$$\begin{aligned}
&\big| E^{1/n}_{\delta_x}\big(\exp -\frac{1}{n} < Z_{nt}, f > \big) - E^{1/n}_{\delta_y}\big(\exp -\frac{1}{n} < Z_{nt}, f > \big)\big| \\
&= \big| E^{1/n}_{\delta_x}\big(\exp -\frac{1}{n} < Z_{nt}, f > \big) - E^{1/n}_{\delta_x}\big(\exp -\frac{1}{n} < Z_{nt}, f(y-x+\cdot) > \big)\big| \\
&\leq E^{1/n}_{\delta_x}\big(|\frac{1}{n} < Z_{nt}, f - f(y-x+\cdot) > | \big) \\
&\leq \frac{K}{n}|y-x|\, E^{1/n}_{\delta_x}(< Z_{nt}, 1 >) \\
&= \frac{K}{n}|y-x|,
\end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé en passant au logarithme.

Appliquons alors la propriété de Markov à Z à l'instant 1. Si g désigne la fonction génératrice de ν, on a

$$\begin{aligned}
E^{1/n}_{\delta_x}\big(\exp -\frac{1}{n} < Z_{nt}, f > \big) &= E^{1/n}_{\delta_x}\big(E^{1/n}_{Z_1}\big(\exp -\frac{1}{n} < Z_{nt-1}, f > \big)\big) \\
&= E^{1/n}_{\delta_x}\big(E^{1/n}_{k_\partial\, \delta_{B^{1,\partial}_{1/n}}}\big(\exp -\frac{1}{n} < Z_{n(t-\frac{1}{n})}, f > \big)\big) \\
&= E_x\big(\sum_{k=0}^{\infty} \nu(k)\, E^{1/n}_{\delta_{B_{1/n}}}\big(\exp -\frac{1}{n} < Z_{n(t-\frac{1}{n})}, f > \big)^k \big) \\
&= E_x\big(g(\exp -\frac{1}{n} v_n(t-\frac{1}{n}, B_{1/n}))\big) \\
&= Q_{1/n}\big(g(\exp -\frac{1}{n} v_n(t-\frac{1}{n},\cdot))\big)(x),
\end{aligned} \tag{4.6}$$

où on a noté $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ issu de μ sous la probabilité P_x. Dans la deuxième égalité, nous avons utilisé la construction de Z et dans la troisième la propriété (i) de la proposition 4.1.

On a ensuite

$$\exp -\frac{1}{n}v_n(t-\frac{1}{n},y) = 1-\frac{1}{n}v_n(t-\frac{1}{n},y)+\frac{1}{2n^2}v_n(t-\frac{1}{n},y)^2+O(\frac{1}{n^3}),$$

le reste étant uniforme en t, y. Sous nos hypothèses, la fonction g est de classe C^2, et $g'(1)=1$, $g''(1)=\sigma^2$. Donc,

$$g(\exp -\frac{1}{n}v_n(t-\frac{1}{n},y)) = 1-\frac{1}{n}v_n(t-\frac{1}{n},y)+\frac{1}{2n^2}(\sigma^2+1)v_n(t-\frac{1}{n},y)^2+o(n^{-2}),$$

avec à nouveau une estimation uniforme pour le reste. Finalement,

$$\begin{aligned}&Q_{1/n}\Big(g\big(\exp -\frac{1}{n}v_n(t-\frac{1}{n},\cdot)\big)\Big)(x)\\ &= 1-\frac{1}{n}Q_{1/n}\big(v_n(t-\frac{1}{n},\cdot)\big)(x)+\frac{1}{2n^2}(\sigma^2+1)Q_{1/n}\big(v_n(t-\frac{1}{n},\cdot)^2\big)(x)+o(n^{-2}).\end{aligned}$$

En passant au logarithme et en multipliant par $-n$ on trouve d'après (4.6)

$$\begin{aligned}v_n(t,x) &= -n\,\log\,Q_{1/n}\Big(g\big(\exp -\frac{1}{n}v_n(t-\frac{1}{n},\cdot)\big)\Big)(x)\\ &= Q_{1/n}\big(v_n(t-\frac{1}{n},\cdot)\big)(x)-\frac{1}{2n}(\sigma^2+1)Q_{1/n}\big(v_n(t-\frac{1}{n},\cdot)^2\big)(x)\\ &\quad +\frac{1}{2n}\Big(Q_{1/n}\big(v_n(t-\frac{1}{n},\cdot)\big)(x)\Big)^2+o(n^{-1}).\end{aligned}$$

Grâce au caractère uniformément lipschitzien des fonctions $v_n(t,\cdot)$, on a pour $s\geq 0$

$$|Q_{1/n}\big(v_n(s,\cdot)\big)(x)-v_n(s,x)| = |E_x\big(v_n(s,B_{1/n})-v_n(s,x)\big)| = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

et de même

$$|Q_{1/n}\big(v_n(s,\cdot)^2\big)(x)-v_n(s,x)^2| = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

avec dans les deux cas une estimation uniforme en s, x pour le reste. En appliquant ces estimations aux termes en $1/n$ de l'égalité précédente, on arrive à la formule du lemme. $\square$

On prolonge maintenant les fonctions $v_n(t,x)$ à tout $t\in\mathbb{R}_+$ en posant $v_n(t,x)=v_n(k/n,x)$ si $k/n\leq t<(k+1)/n$.

Lemme 4.4 *La suite de fonctions $(v_n(t,x), t\in\mathbb{R}_+, x\geq 0)$ converge, uniformément sur les ensembles de la forme $[0,T]\times\mathbb{R}^d$, $T>0$, vers une fonction $(v_t(x))$ continue sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ et solution de* (4.2).

Preuve. Si $t = kn^{-1}$ avec $k \geq 2$, le lemme 4.3 et la propriété de semigroupe de Q_t montrent que

$$v_n(t,x) = Q_{2/n} v_n(t-\frac{2}{n},\cdot)(x) - \frac{\sigma^2}{2n}\Big(v_n(t-\frac{1}{n},x)^2 + Q_{1/n}\big(v_n(t-\frac{2}{n},\cdot)^2\big)(x)\Big) + o(\frac{1}{n}).$$

En itérant le procédé et en remarquant que $v_n(0,x) = f(x)$, on trouve, pour $t \in n^{-1}\mathbb{N}$,

$$v_n(t,x) = Q_t f(x) - \frac{\sigma^2}{2n}\sum_{j=1}^{nt} Q_{t-\frac{j}{n}}\big(v_n(\frac{j-1}{n},\cdot)^2\big)(x) + o(1), \tag{4.7}$$

où l'estimation $o(1)$ pour le reste est uniforme en $t \in n^{-1}\mathbb{N}\cap[0,K]$, $x \in \mathbb{R}^d$. On a ainsi obtenue une forme discrète de l'équation (4.2). Il est facile de voir que la formule (4.7) est encore vérifiée pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, en remplaçant nt par $[nt]$ dans la somme, avec un reste uniforme en $t \in [0,K]$. On utilise le caractère uniformément lipschitzien des fonctions $v_n(t,\cdot)$ et le fait que, si h est une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d$, on a pour $|r-s| \leq 1/n$,

$$|Q_r h(x) - Q_s h(x)| \leq E_x(|h(B_r) - h(B_s)|) = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

avec une estimation uniforme en r, s, x ne dépendant que de la constante de Lipschitz de h. Grâce aux mêmes arguments, on peut écrire l'équation (4.7) sous la forme

$$v_n(t,x) = Q_t f(x) - \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t Q_{t-s}\big(v_n(s,\cdot)^2\big)(x)\,ds + o(1) \tag{4.8}$$

avec un reste uniforme en $t \leq K$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Considérons maintenant, pour $T > 0$ fixé, la suite des fonctions $v_n(t,x)^2$ définies sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$, qui est bornée dans l'espace de Hilbert $L^2([0,T]\times\mathbb{R}^d, e^{-|y|}dt\,dy)$. Par un résultat classique de compacité faible, on peut extraire de cette suite une sous-suite $v_{n_p}^2$ convergeant faiblement vers une fonction limite positive, qu'on peut donc écrire v_∞^2. Remarquons que $v_\infty^2 \leq \|f\|_\infty^2$. Alors, pour tous $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, la convergence faible de $v_{n_p}^2$ vers v_∞^2 entraîne

$$\begin{aligned}\int_0^t ds\, Q_{t-s}\big(v_{n_p}(s,\cdot)^2\big)(x) \quad &= \quad \int_0^t ds \int dy\, q_{t-s}(y-x)\, v_{n_p}(s,y)^2 \\ &\underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int_0^t ds \int dy\, q_{t-s}(y-x)\, v_\infty(s,y)^2,\end{aligned}$$

(on majore d'abord l'intégrale sur $s \in [t-\varepsilon, t]$, $\varepsilon > 0$).

En revenant à l'équation (4.8), on voit que v_{n_p} converge aussi simplement, et que sa limite v_∞ satisfait l'équation intégrale

$$v_\infty(t,x) = Q_t f(x) - \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t Q_{t-s}\big(v_\infty(s,\cdot)^2\big)(x)\,ds. \tag{4.9}$$

En faisant la différence des équations (4.9) et (4.8), on trouve pour $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}|v_\infty(t,x) - v_n(t,x)| &\leq \frac{\sigma^2}{2}\Big|\int_0^t Q_{t-s}\big(v_\infty(s,\cdot)^2 - v_n(s,\cdot)^2\big)(x)\,ds\Big| + \varepsilon_n \\ &\leq \varepsilon_n + \sigma^2\|f\|_\infty \int_0^t \|v_\infty(s,\cdot) - v_n(s,\cdot)\|_\infty ds\end{aligned}$$

où $\lim \varepsilon_n = 0$. Le lemme de Gronwall entraîne alors

$$\|v_\infty(t,\cdot) - v_n(t,\cdot)\|_\infty \leq \varepsilon_n \exp(\sigma^2\|f\|_\infty t).$$

On a ainsi obtenu que la suite (v_n) elle-même converge, uniformément sur les ensembles $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ vers v_∞. Si on pose $v_t(x) = v_\infty(t,x)$, la fonction $(v_t(x))$ est clairement solution de (4.2). De plus, les fonctions v_t sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}^d$, avec une constante ne dépendant pas de t. En utilisant (4.2), il en découle aisément que la fonction $(v_t(x))$ est continue (même lipschitzienne) sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$. □

4.4 Preuve du théorème principal

Nous commmençons par étudier la convergence en loi de X_t^n pour $t \geq 0$ fixé. On a d'après (4.4)

$$E\Big(\exp - < X_t^n, f > \Big) = \exp - < \frac{1}{n}\lambda_n, v_n(t,\cdot) > \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp - < \mu, v_t > \qquad (4.10)$$

grâce à l'hypothèse sur la suite (λ_n) et à la convergence uniforme de $v_n(t,x)$ vers $v_t(x)$.

En prenant $f(x) = \theta > 0$, on retrouve en particulier le fait que $< X_t^n, 1 >$ converge en loi vers une variable aléatoire U de transformée de Laplace

$$E(\exp -\theta U) = \exp - \frac{\theta < \mu, 1 >}{1 + \theta\frac{\sigma^2}{2}t}.$$

Soit $\hat{\mathbb{R}}^d = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}^d$. Considérons les variables X_t^n comme des variables aléatoires à valeurs dans l'espace $M_f(\hat{\mathbb{R}}^d)$. Les ensembles $\{\mu \in M_f(\hat{\mathbb{R}}^d), < \mu, 1 > \leq K\}$ sont des parties compactes de $M_f(\hat{\mathbb{R}}^d)$, et d'autre part la convergence en loi de $< X_t^n, 1 >$ vers U assure que

$$\lim_{K\uparrow\infty}\Big(\sup_{n\geq 1} P(< X_t^n, 1 >> K)\Big) = 0.$$

D'après le théorème de Prohorov, cela entraîne que la famille des lois des variables $(X_t^n, n \geq 1)$ est tendue (relativement compacte pour la convergence étroite sur $M_f(M_f(\hat{\mathbb{R}}^d))$. Donc, pour $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p$, la famille des lois de $(X^n_{t_0}, X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_p})$ est aussi relativement compacte dans $M_f(M_f(\hat{\mathbb{R}}^d))^{p+1}$. On peut alors supposer qu'on a, le long d'une sous-suite,

$$\big(X^n_{t_0}, X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_p}\big) \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\text{(loi)}}} \big(X^\infty_{t_0}, X^\infty_{t_1}, \ldots, X^\infty_{t_p}\big), \tag{4.11}$$

où $X^\infty_{t_0}, X^\infty_{t_1}, \ldots, X^\infty_{t_p}$ sont des variables aléatoires à valeurs dans $M_f(\hat{\mathbb{R}}^d)$.

Observons maintenant que p.s. les mesures $X^\infty_{t_i}$ ne chargent pas le point à l'infini de $\hat{\mathbb{R}}^d$. En effet, soit (φ_k) une suite décroissante de fonctions continues sur $\hat{\mathbb{R}}^d$ à valeurs dans $[0,1]$ telles que $\varphi_k = 1$ sur un voisinage de ∞ et $\varphi_k(x) = 0$ si $|x| \le k$. Alors, d'après (4.10),

$$E(\exp - < X^\infty_{t_i}, \varphi_k >) = \lim_{n\to\infty} E(\exp - < X^n_{t_i}, \varphi_k >) = \exp - < \mu, v^{(k)}_{t_i} >,$$

où $0 \le v^{(k)}_{t_i}(x) \le Q_{t_i}\varphi_k(x)$, qui tend vers 0 quand k tend vers l'infini, uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$. Il en découle que $E(\exp - < X^\infty_{t_i}, \varphi_k >)$ croît vers 1 quand $k \to \infty$ et donc p.s. $X^\infty_{t_i}$ ne charge pas ∞.

En utilisant le théorème de représentation de Skorokhod, on peut quitte à remplacer chaque vecteur $(X^n_{t_0}, X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_p})$ par un vecteur $(\tilde{X}^n_{t_0}, \tilde{X}^n_{t_1}, \ldots, \tilde{X}^n_{t_p})$ de même loi, supposer que la convergence (4.11) a lieu p.s. Mais alors, p.s. $\tilde{X}^n_{t_i}$ converge vers $X^\infty_{t_i}$ au sens de la convergence vague sur $M_f(\mathbb{R}^d)$, et $< \tilde{X}^n_{t_i}, 1 >$ converge vers $< X^\infty_{t_i}, 1 >$. D'après un critère classique, cela entraîne que $\tilde{X}^n_{t_i}$ converge p.s. vers $X^\infty_{t_i}$ au sens de la convergence étroite dans $M_f(\mathbb{R}^d)$. Finalement, on a obtenu que la convergence en loi (4.11) a aussi lieu lorsqu'on considère les variables $X^n_{t_i}$, $X^\infty_{t_i}$ comme variables aléatoires à valeurs dans $M_f(\mathbb{R}^d)$.

Soient ensuite $f_1, \ldots, f_p \in BL(\mathbb{R}^d)$. Alors,

$$E\Big(\exp - \sum_{i=0}^{p} < X^\infty_{t_i}, f_i > \Big) = \lim_{n\to\infty} E\Big(\exp - \sum_{i=0}^{p} < X^n_{t_i}, f_i > \Big),$$

le long de la sous-suite choisie dans (4.11). D'autre part, d'après la propriété de Markov de Z^n et la formule (4.4),

$$\begin{aligned}
&E\Big(\exp - \sum_{i=0}^{p} < X^n_{t_i}, f_i > \Big)\\
&= E\Big(\exp\big(- \sum_{i=0}^{p-1} < X^n_{t_i}, f_i > \big) E^{1/n}_{Z^n_{[nt_{p-1}]}}\Big(\exp - \frac{1}{n} < Z_{[nt_p]-[nt_{p-1}]}, f_p > \Big)\Big)\\
&= E\Big(\exp\Big(- \sum_{i=0}^{p-1} < X^n_{t_i}, f_i > - < X^n_{t_{p-1}}, v^p_n\big(\frac{[nt_p]-[nt_{p-1}]}{n}, \cdot\big) > \Big)\Big)
\end{aligned}$$

la fonction v_n^p étant associée à f_p. D'après le lemme 4.4, on a

$$v_n^p\Big(\frac{[nt_p]-[nt_{p-1}]}{n},x\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v_{t_p-t_{p-1}}^p(x),$$

uniformément sur $\mathbb{R}^d$, la fonction v^p étant la solution positive unique de

$$v_t^p(x) = Q_t f_p(x) - \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t Q_{t-s}((v_s^p)^2)(x)\,ds.$$

On trouve donc, en utilisant à nouveau (4.11)

$$E\Big(\exp - \sum_{i=0}^{p} < X_{t_i}^\infty, f_i > \Big) = E\Big(\exp\Big(-\sum_{i=0}^{p-1} < X_{t_i}^\infty, f_i > - < X_{t_{p-1}}^\infty, v_{t_p-t_{p-1}}^p > \Big)\Big). \tag{4.12}$$

Il est clair par ailleurs que $X_0^\infty = \mu$. En raisonnant par récurrence sur p et en utilisant l'argument de classe monotone expliqué dans les remarques ci-dessus, on voit que la formule (4.12) (écrite en remplaçant p par tout $j \in \{1,\dots,p\}$) et la donnée initiale $X_0^\infty = \mu$ suffisent à caractériser la loi du vecteur $(X_{t_0}^\infty, X_{t_1}^\infty, \dots, X_{t_p}^\infty)$. Cela permet d'affirmer que la convergence (4.11) a lieu quand $n \to \infty$ et pas seulement le long d'une sous-suite. La formule (4.1) découle de (4.12) à nouveau par un argument de classe monotone. Cela termine la preuve du théorème. $\square$

4.5 Remarques finales

Le super-mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$, qui apparaît comme processus limite dans le théorème 4.2, est un processus de Markov homogène dans $M_f(\mathbb{R}^d)$, dont les noyaux de transition $R_t(\mu, d\mu')$ sont caractérisés par leurs fonctionnelles de Laplace

$$\int R_t(\mu, d\mu')\, \exp - < \mu', f >= \exp - < \mu, v_t >, \tag{4.13}$$

où pour $f \in BL(\mathbb{R}^d)$, v_t est l'unique solution positive de (4.2). Cette formule peut facilement être étendue au cas où f est seulement bornée et positive (voir l'exercice 4.2). Notons aussi que l'équation (4.2) est la forme intégrale d'une équation aux dérivées partielles non linéaire (voir l'exercice 4.1).

La forme particulière de la formule (4.13) est liée au caractère infiniment divisible de la loi de (X_t). Notons P_μ la loi du super-mouvement brownien issu de μ. Alors, si X et X' sont deux processus indépendants de lois respectives P_μ, $P_{\mu'}$, la somme $X + X'$ a pour loi $P_{\mu+\mu'}$. Ce résultat peut être lu sur les marginales de dimension finie à l'aide de la formule (4.13) (qui entraîne que $R_t(\mu,\cdot) * R_t(\mu',\cdot) = R_t(\mu+\mu',\cdot)$). Ou alors on peut utiliser la proposition 1-(i) et passer à la limite en utilisant le théorème 4.2.

De manière heuristique, on peut considérer que, pour tout $t \geq 0$, le support topologique de X_t, noté $\operatorname{supp} X_t$, représente l'ensemble des positions à l'instant t d'un "nuage infini de particules" se déplaçant selon des mouvements browniens indépendants et soumises continuellement à un phénomène de branchement critique. Il existe cependant une différence importante avec le cas du processus de branchement brownien. Dans ce dernier cas, il est possible de suivre (de définir) les déplacements individuels des particules (donnés dans notre formalisme par les mouvements browniens $B^{j,u}$). Dans le cas du super-mouvement brownien, la donnée du processus (X_t) ne permet pas a priori de reconstruire les trajectoires individuelles des "particules". Par exemple, si on se donne une particule en vie à l'instant t (i.e. un point de $\operatorname{supp} X_t$), et $s < t$, on ne sait pas quel est le point de $\operatorname{supp} X_s$ qui est l'ancêtre de la particule choisie à l'instant t. Nous reviendrons plus tard sur ce problème.

Dès à présent, plusieurs questions se posent:

– Existe-t-il une version continue de l'application $t \longrightarrow X_t$?

– Le support topologique de X_t est-il borné p.s. ?

– Ce support a-t-il une mesure de Lebesgue strictement positive ? Si oui, X_t est-elle absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ? Sinon, que peut-on dire sur la dimension de Hausdorff de $\operatorname{supp} X_t$?

Nous répondrons à ces questions dans les chapitres suivants. En particulier, nous verrons que la réponse aux deux premières questions est oui. Remarquons que le caractère borné de $\operatorname{supp} X_t$ n'est pas évident a priori, car on pourrait imaginer que, dans le passage à la limite du théorème 4.2, certaines particules s'éloignent arbitrairement loin de l'origine. Supposons que l'on remplace dans la construction précédente le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ par un processus stable d'indice $\alpha < 2$, à symétrie sphérique (cela signifie que la mesure de Lévy est invariante par toutes les rotations). L'analogue du théorème 4.2 reste vrai et conduit à un "super-processus stable" noté $(\tilde{X}_t, t \geq 0)$. Perkins [34] a cependant montré que dans ce cas, pour tout $t > 0$, p.s. $\operatorname{supp} \tilde{X}_t$ est ou bien vide ($\tilde{X}_t = 0$) ou bien égal à $\mathbb{R}^d$ tout entier.

A titre de dernière remarque, observons que puisque le processus $< X_t, 1 >$ est une diffusion de Feller, on a

$$\lim_{t \uparrow \infty} P(X_t = 0) = 1.$$

Comme il est évident que $R_t(0,0) = 1$, cela entraîne que p.s. pour tout rationnel t assez grand, on a $X_t = 0$. Nous pourrons enlever le mot rationnel lorsque nous saurons que les trajectoires de X sont p.s. continues.

Commentaires bibliographiques. Le théorème 4.2 est un cas particulier d'un théorème de Watanabe [37]. Dans les dix dernières années, de très nombreux travaux ont été consacrés au super-mouvement brownien et aux superprocessus plus généraux:

voir le cours de Dawson [6] et les références de ce cours. En particulier, Dynkin [10] propose un résultat très général d'approximation des superprocessus par des systèmes de particules avec branchement. Voir aussi Ethier et Kurtz [15], Chapitre 9, pour un résultat voisin du théorème 4.2 utilisant les problèmes de martingales.

Exercices

Exercice 4.1 *Soit f une fonction positive de classe C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}^d$. On admet que l'équation aux dérivées partielles*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u - \frac{\sigma^2}{2} u^2 \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

a une solution u bornée et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$. Montrer en appliquant la formule d'Itô à $u(t-s, B_s)$ qu'on a $u(t,x) = v_t(x)$, où la fonction $v_t(x)$ est associée à f par l'équation intégrale (4.2).

Exercice 4.2 *Soit $B(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions boréliennes bornées positives sur $\mathbb{R}^d$. Un sous-ensemble H de $B(\mathbb{R}^d)$ est dit fermé pour la convergence simple bornée si, pour toute suite (h_n) d'éléments de H convergeant simplement vers $h \in B(\mathbb{R}^d)$ et telle que $\sup_{n,x} h_n(x) < \infty$, on a $h \in H$. On rappelle que le seul sous-ensemble de $B(\mathbb{R}^d)$ qui contienne $BL(\mathbb{R}^d)$ et soit fermé pour la convergence simple bornée est $B(\mathbb{R}^d)$ tout entier (voir [15], p.111 pour un énoncé très voisin). Montrer que les formules (4.1), (4.2) restent vraies pour $f \in B(\mathbb{R}^d)$.*

Exercice 4.3 *Montrer que, pour $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_p$ et $f_1, f_2, \ldots, f_p \in BL(\mathbb{R}^d)$,*

$$E_\mu\Big(\exp - \sum_{i=1}^{p} < X_{t_i}, f_i > \Big) = \exp - < \mu, w_0 >,$$

où la fonction $(w_t(x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d)$ est la solution positive unique de

$$w_t(x) = \sum_{i=1}^{p} 1_{\{t<t_i\}}\, Q_{t_i-t} f_i(x) - \frac{\sigma^2}{2}\int_t^\infty Q_{s-t}(w_s^2)(x)\, ds$$

(indication: procéder par récurrence sur p et dans le cas $p = 1$ comparer w_{t_1-t} à la fonction v_t associée à f_1 par l'équation (4.2)).

Chapter 5

Moments du Super-Mouvement Brownien et Applications

Le super-mouvement brownien a été introduit dans le chapitre précédent comme un processus de Markov X à valeurs dans l'espace $M_f(\mathbb{R}^d)$ des mesures finies sur $\mathbb{R}^d$. Bien que nous n'ayons pour l'instant pas établi de propriété de régularité des trajectoires de X, la connaissance des fonctionnelles de Laplace du semigroupe conduit assez rapidement à des renseignements intéressants sur la mesure aléatoire X_t pour un instant $t > 0$ fixé. Nous commençons par donner des formules explicites pour les moments des variables $< X_t, \varphi >$. Nous appliquons ensuite ces formules pour établir qu'en dimension $d = 1$, la mesure X_t est p.s. absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et qu'en dimension plus grande le support topologique de X_t est de dimension de Hausdorff supérieure ou égale à deux, sauf évidemment si $X_t = 0$. Enfin, nous donnons une condition suffisante pour que le support de X_t rencontre avec probabilité positive un borélien fixé de $\mathbb{R}^d$. Ce dernier résultat est lié à des problèmes d'éliminabilité de singularités pour l'équation aux dérivées partielles associée au semigroupe de X.

5.1 Moments du super-mouvement brownien

Nous conservons les notations introduites dans le chapitre précédent. Le processus $(X_t, t \geq 0)$ est un super-mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ issu de $\mu \in M_f(\mathbb{R}^d)$ sous la probabilité P_μ. Le paramètre $\sigma > 0$ reste fixé.

Proposition 5.1 *Pour toute fonction f mesurable positive sur $\mathbb{R}^d$, pour tout $t > 0$, on a*

$$E_\mu(< X_t, f >) =< \mu, Q_t f >, \tag{5.1}$$

$$E_\mu(< X_t, f >^2) =< \mu, Q_t f >^2 + \sigma^2 \int_0^t < \mu Q_{t-s}, (Q_s f)^2 > ds. \tag{5.2}$$

De plus, pour toute fonction φ mesurable positive sur $(\mathbb{R}^d)^2$, on a

$$\begin{aligned} E_\mu\Big(\iint X_t(dy)X_t(dy')\,\varphi(y,y')\Big) &= \iint dy\,dy'\,\varphi(y,y')\,\mu * q_t(y)\,\mu * q_t(y') \\ &+\sigma^2 \iint dy\,dy'\,\varphi(y,y') \int \mu(dx) \int_0^t ds \int dz\, q_{t-s}(z-x)\,q_s(y-z)\,q_s(y'-z). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Remarques. La formule (5.1) est à l'origine du nom “superprocessus”. Elle exprime que l'intensité de la mesure aléatoire X_t, sous P_μ, est la “loi” à l'instant t d'un mouvement brownien partant avec comme “loi initiale” la mesure μ. Cette formule est bien sûr analogue à la proposition 4.1-(iii) et pourrait être déduite de ce résultat par un passage à la limite utilisant le théorème 4.2.

La formule (5.2) est le cas particulier de la formule (5.3) où $\varphi(y, y') = f(y)f(y')$. La formule (5.3) explicite l'intensité de la mesure aléatoire $X_t \otimes X_t$. Les deux termes du membre de droite de (5.3) peuvent être expliqués de manière heuristique comme suit. On interprète y, y' comme les positions à l'instant t de deux “particules”. Le premier terme correspond au cas où les deux particules ont des ancêtres distincts à l'instant 0, ce qui donne lieu à des trajectoires indépendantes entre les instants 0 et t. Au contraire, le second terme correspond au cas où les deux particules ont le même ancêtre à l'instant 0. Le nombre $t - s$ est alors le niveau du dernier ancêtre commun aux deux particules, et z représente la position dans l'espace de ce dernier ancêtre commun. Le produit $q_s(y-z)\,q_s(y'-z)$ apparaît parce que les déplacements entre $t - s$ et t des ascendants des deux particules sont indépendants. Toute cette interprétation heuristique peut être rendue rigoureuse à l'aide des outils développés dans les chapitres suivants.

Preuve. Supposons d'abord $f \in BL(\mathbb{R}^d)$. D'après le théorème 4.2, pour $\lambda > 0$,

$$E_\mu(\exp -\lambda < X_t, f >) = \exp - < \mu, v_t^\lambda >,$$

où v^λ est l'unique solution positive de

$$v_t^\lambda(x) = \lambda Q_t f(x) - \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t Q_{t-s}((v_s^\lambda)^2)(x)\,ds.$$

En particulier, $0 \le v_t^\lambda(x) \le \lambda Q_t f(x) \le \lambda \|f\|_\infty$, d'où $v_t^\lambda(x) = \lambda Q_t f(x) + O(\lambda^2)$, puis

$$v_t^\lambda(x) = \lambda Q_t f(x) - \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2 \int_0^t Q_{t-s}((Q_s f)^2)(x)\,ds + O(\lambda^3), \tag{5.4}$$

avec un reste $O(\lambda^3)$ uniforme en $x \in \mathbb{R}^d$, $t \leq T$. En combinant ce développement avec la formule précédente pour $E_\mu(\exp -\lambda < X_t, f >)$, on trouve

$$\begin{aligned}
&E_\mu(\exp -\lambda < X_t, f >) \\
&= 1 - \lambda < \mu, Q_t f > + \frac{\lambda^2}{2}\Big(< \mu, Q_t f >^2 + \sigma^2 \int_0^t < \mu Q_{t-s}, (Q_s f)^2 > ds \Big) + o(\lambda^2).
\end{aligned}$$

Or, si U est une variable aléatoire positive et si $E(\exp -\lambda U) = 1 - a\lambda + (b/2)\lambda^2 + o(\lambda^2)$, il est facile de voir que $E(U) = a$, $E(U^2) = b$. On obtient ainsi les formules (5.1) et (5.2) pour $f \in BL(\mathbb{R}^d)$.

La formule (5.1) dans le cas général en découle immédiatement puisque deux mesures qui prennent la même valeur sur les fonctions de $BL(\mathbb{R}^d)$ coïncident nécessairement. Pour établir le cas général de (5.2), il est commode de montrer la forme plus générale (5.3), dont (5.2) est un cas particulier. D'après ce qui précède la formule (5.3) est vraie pour $\varphi(y, y') = f(y)f(y')$, où $f \in BL(\mathbb{R}^d)$. Ensuite, si g est une autre fonction de $BL(\mathbb{R}^d)$, on a par symétrie

$$E_\mu\Big(\iint X_t(dy)X_t(dy')\, f(y)g(y')\Big) = \frac{1}{2}E_\mu\Big(\iint X_t(dy)X_t(dy')\,(f(y)g(y') + f(y')g(y))\Big)$$

et en écrivant $f(y)g(y')+f(y')g(y) = (f(y)+g(y))(f(y')+g(y')) - f(y)f(y') - g(y)g(y')$ on obtient la formule (5.3) pour $\varphi(y, y') = f(y)g(y')$. Finalement deux mesures sur $(\mathbb{R}^d)^2$ prenant la même valeur sur les fonctions $f(y)g(y')$, $f, g \in BL(\mathbb{R}^d)$, coïncident. $\square$

5.2 Propriétés du support de X_t

A partir de maintenant le nombre $t > 0$ est fixé, et les différentes constantes qui interviendront dépendront en général de t. Un rôle important sera joué par la formule (5.3), et nous commencerons par étudier la fonction

$$H_x(y, y') = \int_0^t ds \int dz\, q_{t-s}(z - x)\, q_s(y - z)\, q_s(y' - z), \qquad x, y, y' \in \mathbb{R}^d.$$

Lemme 5.2 *Il existe une constante C telle que, pour tous $x, y, y' \in \mathbb{R}^d$,*

$$H_x(y, y') \leq \begin{cases} C & \text{si } d = 1, \\ C\Big(1 + \log_+ (1/|y - y'|)\Big) & \text{si } d = 2, \\ C(1 + |y - y'|^{2-d}) & \text{si } d \geq 3. \end{cases}$$

De plus, si $d = 1$, la fonction $(x, y, y') \longrightarrow H_x(y, y')$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^3$.

Preuve. Pour $s \geq t/2$, on peut majorer $q_s(x) \leq c_1$, d'où

$$\begin{aligned} H_x(y,y') &\leq c_1 \int_0^{t/2} ds \int dz\, q_s(y-z)\, q_s(y'-z) + c_1^2 \int_{t/2}^t ds \int dz\, q_{t-s}(z-x) \\ &= c_1 \int_0^{t/2} ds\, q_{2s}(y-y') + c_1^2 t/2. \end{aligned}$$

On voit facilement que, si $d=1$,

$$\int_0^{t/2} ds\, q_{2s}(y-y') = (4\pi)^{-1/2} \int_0^{t/2} \frac{ds}{\sqrt{s}} \exp -\frac{|y-y'|^2}{4s} \leq (4\pi)^{-1/2} \int_0^{t/2} \frac{ds}{\sqrt{s}} < \infty,$$

alors que, si $d \geq 2$,

$$\begin{aligned} \int_0^{t/2} ds\, q_{2s}(y-y') &= (4\pi)^{-d/2} \int_0^{t/2} \frac{ds}{s^{d/2}} \exp -\frac{|y-y'|^2}{4s} \\ &= (4\pi)^{-d/2} |y-y'|^{2-d} \int_0^{\frac{t}{2|y-y'|^2}} \frac{du}{u^{d/2}} e^{-\frac{1}{4u}}, \end{aligned}$$

d'où facilement la majoration recherchée.

Lorsque $d=1$, le théorème de convergence dominée entraîne que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'application

$$(x,y,y') \longrightarrow \int_\varepsilon^t ds \int dz\, q_{t-s}(z-x)\, q_s(y-z)\, q_s(y'-z)$$

est continue sur $\mathbb{R}^3$. De plus, les majorations utilisées ci-dessus montrent que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sup_{x,y,y' \in \mathbb{R}} \int_0^\varepsilon ds \int dz\, q_{t-s}(z-x)\, q_s(y-z)\, q_s(y'-z) \right) = 0.$$

On obtient ainsi la continuité de $H_x(y,y')$ donc aussi sa continuité uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}^3$, ou même, puisque $H_x(y,y') = H_0(y-x, y'-x)$, sur les ensembles de la forme $\{|y-x| \leq K, |y'-x| \leq K\}$. De plus, la forme du noyau gaussien entraîne facilement que

$$\lim_{K \to \infty} \left(\sup_{|y-x|+|y'-x|>K} H_x(y,y') \right) = 0,$$

d'où le résultat voulu. □

Théorème 5.3 *Si $d=1$, il existe un processus $(Y_t(y), y \in \mathbb{R})$ continu en norme L^2, tel que p.s.*

$$X_t(dy) = Y_t(y)\, dy.$$

Preuve. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, on pose

$$Y^\varepsilon(a) = \frac{1}{2\varepsilon} X_t(]a-\varepsilon, a+\varepsilon[)$$

On va montrer que $Y^\varepsilon(a)$ converge dans $L^2(P_\mu)$ quand ε tend vers 0. On évalue pour cela

$$\begin{aligned} E_\mu(Y^\varepsilon(a)Y^{\varepsilon'}(a')) &= \frac{1}{4\varepsilon\varepsilon'} E_\mu\Big(X_t(]a-\varepsilon, a+\varepsilon[)X_t(]a'-\varepsilon', a'+\varepsilon'[)\Big) \\ &= \frac{1}{4\varepsilon\varepsilon'}\Big(\mu Q_t(]a-\varepsilon, a+\varepsilon[)\mu Q_t(]a'-\varepsilon', a'+\varepsilon'[) \\ &\quad +\sigma^2 \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} dy \int_{a'-\varepsilon'}^{a'+\varepsilon'} dy' \int \mu(dx)\, H_x(y,y')\Big), \end{aligned}$$

d'après la formule (5.3). La mesure μQ_t a pour densité $q_t * \mu$ qui est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$. On a donc

$$\frac{1}{4\varepsilon\varepsilon'} \mu Q_t(]a-\varepsilon, a+\varepsilon[)\mu Q_t(]a'-\varepsilon', a'+\varepsilon'[) \underset{\varepsilon,\varepsilon'\to 0}{\longrightarrow} q_t * \mu(a) q_t * \mu(a')$$

uniformément en $a, a' \in \mathbb{R}$. De plus, d'après le lemme 5.2,

$$\frac{1}{4\varepsilon\varepsilon'} \int \mu(dx) \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} dy \int_{a'-\varepsilon'}^{a'+\varepsilon'} dy'\, H_x(y,y') \underset{\varepsilon,\varepsilon'\to 0}{\longrightarrow} \int \mu(dx)\, H_x(a,a'),$$

à nouveau uniformément en a, a'. On a ainsi obtenu la convergence (uniforme en a, a') de $E_\mu(Y^\varepsilon(a)Y^{\varepsilon'}(a'))$ quand $\varepsilon, \varepsilon' \to 0$. En évaluant $E_\mu((Y^\varepsilon(a) - Y^{\varepsilon'}(a))^2)$, on voit que la famille $(Y^\varepsilon(a), \varepsilon > 0)$ est de Cauchy quand $\varepsilon \to 0$. On pose

$$\bar{Y}_t(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} Y^\varepsilon(a) \tag{5.5}$$

où la convergence a lieu dans L^2, uniformément en a. On peut choisir une suite $\varepsilon_p \downarrow 0$ telle que la convergence (5.5) ait lieu p.s. le long de cette suite, pour tout $a \in \mathbb{R}$. On pose alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$Y_t(a) = \liminf_{p\to\infty} Y^{\varepsilon_p}(a), \qquad \forall a \in \mathbb{R},$$

de sorte que $Y_t(a) = \bar{Y}_t(a)$, p.s., et que le processus $(Y_t(a), a \in \mathbb{R})$ est mesurable.

Ensuite, si φ est continue à support compact sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} < X_t, \varphi > &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int X_t(dy)\, \frac{1}{2\varepsilon} \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} da\, \varphi(a) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int da\, \varphi(a)\, Y^\varepsilon(a) \\ &= \int da\, \varphi(a)\, Y_t(a), \end{aligned}$$

la dernière convergence étant une convergence dans $L^2(P_\mu)$. On obtient ainsi l'égalité $X_t(da) = Y_t(a)\,da$.

Enfin,

$$E_\mu(Y_t(a)Y_t(a')) = \lim_{\varepsilon\to 0} E_\mu(Y^\varepsilon(a)Y^\varepsilon(a')) = q_t * \mu(a) q_t * \mu(a') + \sigma^2 \int \mu(dx)\, H_x(a,a'),$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} E_\mu((Y_t(a) - Y_t(a'))^2) &= (q_t * \mu(a) - q_t * \mu(a'))^2 \\ &+ \sigma^2 \int \mu(dx)\,(H_x(a,a) - 2H_x(a,a') + H_x(a',a')), \end{aligned}$$

d'où la continuité annoncée. □

Théorème 5.4 *Soit* $\operatorname{supp} X_t$ *le support topologique de* X_t. *Si* $d \geq 2$, $\dim \operatorname{supp} X_t \geq 2$, *p.s. sur* $\{X_t \neq 0\}$.

Nous verrons plus tard qu'on a en fait l'égalité $\dim \operatorname{supp} X_t = 2$, p.s. sur $\{X_t \neq 0\}$. La preuve du théorème repose sur le lemme classique suivant, dont une preuve peut être trouvée par exemple dans le livre de Falconer [16], p.78.

Lemme 5.5 (Frostman) *Soient* $\alpha > 0$, A *un sous-ensemble borélien de* $\mathbb{R}^d$, *et* ν *une mesure sur* $\mathbb{R}^d$ *telle que* $\nu(A) > 0$ *et*

$$\iint \nu(dx)\,\nu(dy)\,|x-y|^{-\alpha} < \infty.$$

Alors $x^\alpha - m(A) = \infty$, *et donc en particulier* $\dim A \geq \alpha$.

Preuve du théorème 5.4. Soient $K > 0$ et $\varepsilon \in]0,1[$. Nous appliquons le lemme 5.5 à $\alpha = 2 - \varepsilon$, $A = \operatorname{supp} X_t$, en prenant pour ν la mesure X_t restreinte à la boule $B_K = \{y, |y| \leq K\}$. D'après la formule (5.3),

$$\begin{aligned} E_\mu\left(\iint_{B_K^2} X_t(dy)\,X_t(dy')\,|y-y'|^{\varepsilon-2} \right) &= \iint_{B_K^2} dy\,dy'\,\mu * q_t(y)\,\mu * q_t(y')\,|y-y'|^{\varepsilon-2} \\ &+ \sigma^2 \int \mu(dx) \iint_{B_K^2} dy\,dy'\,H_x(y,y')\,|y-y'|^{\varepsilon-2}. \end{aligned}$$

Le premier terme est fini parce que la fonction $\mu * q_t$ est bornée sur $\mathbb{R}^d$. Le second terme est aussi fini grâce aux majorations du lemme 5.2. On a donc

$$\iint_{B_K^2} X_t(dy)\,X_t(dy')\,|y-y'|^{\varepsilon-2} < \infty,$$

P_μ p.s., et d'après le lemme 5.5, $\dim \operatorname{supp} X_t \geq 2 - \varepsilon$ p.s. sur $X_t(B_K) > 0$. Il ne reste plus ensuite qu'à prendre une suite de valeurs de K croisssant vers ∞. □

5.3 Ensembles atteints par le support de X_t

Notre but dans ce paragraphe est d'obtenir des conditions suffisantes sur un sous-ensemble borélien H de $\mathbb{R}^d$ pour que le support de X_t rencontre H avec probabilité strictement positive. On dit que H est de capacité (strictement) positive et on écrit $\operatorname{cap}(H) > 0$ si $H \neq \emptyset$ lorsque $d = 1$ et, lorsque $d \geq 2$, si H porte une mesure ν non triviale telle que

$$\begin{cases} \int\int \nu(dy)\nu(dy') \log_+(1/|y-y'|) < \infty & \text{si } d = 2, \\ \int\int \nu(dy)\nu(dy') \, |y-y'|^{2-d} < \infty & \text{si } d \geq 3. \end{cases} \tag{5.6}$$

Remarquons que les singletons sont de capacité positive si et seulement si $d = 1$. Le lemme 5.5 montre qu'un ensemble de capacité positive est de dimension de Hausdorff supérieure ou égale à $d - 2$. On peut aussi montrer (voir [16], p.78) qu'un ensemble de dimension de Hausdorff strictement supérieure à $d - 2$ est de capacité positive.

Théorème 5.6 *Soit H un sous-ensemble borélien de $\mathbb{R}^d$ de capacité positive. Alors, pour toute mesure $\mu \in M_f(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mu \neq 0$ et tout $t > 0$,*

$$P_\mu(\operatorname{supp} X_t \cap H \neq \emptyset) > 0.$$

Preuve. Soit ν une mesure finie sur $\mathbb{R}^d$ portée par H telle que la propriété (5.6) soit vérifiée (si $d = 1$ on peut prendre n'importe quelle mesure portée par H) et soit K un sous-ensemble compact de H tel que $\nu(K) > 0$. Quitte à restreindre ν à K, on peut supposer que ν est portée par K. Soit aussi h une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}_+$, radiale (i.e. $h(y) = h(|y|)$) continue à support compact et telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d} h(y)\, dy = 1.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $h_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-d} h(\varepsilon y)$ puis

$$f_\varepsilon(y) = h_\varepsilon * \nu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon(y - z)\, \nu(dz).$$

Soient $a = \sup\{|y|; h(y) > 0\}$ et $K_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^d; \operatorname{dist}(y, K) \leq a\varepsilon\}$. La fonction f_ε est nulle en dehors du compact K_ε. Donc si $< X_t, f_\varepsilon >> 0$, $\operatorname{supp} X_t$ rencontre K_ε. Nous allons montrer l'existence d'une constante $c > 0$ indépendante de $\varepsilon \in]0, 1]$ telle que

$$P_\mu(< X_t, f_\varepsilon >> 0) \geq c. \tag{5.7}$$

Le résultat du théorème en découle puisque

$$P_\mu(\operatorname{supp} X_t \cap K \neq \emptyset) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \downarrow P_\mu(\operatorname{supp} X_t \cap K_\varepsilon \neq \emptyset) \geq \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} P_\mu(< X_t, f_\varepsilon >> 0).$$

Il reste donc à établir (5.7).

On commence par évaluer les moments d'ordre 1 et 2 de $< X_t, f_\varepsilon >$. D'abord, d'après la formule (5.1),

$$E_\mu(< X_t, f_\varepsilon >) =< \mu, Q_t f_\varepsilon >=< \mu Q_t, f_\varepsilon >= \int dy\, f_\varepsilon(y)\, q_t * \mu(y),$$

qui converge quand ε tend vers 0 vers $< \nu, q_t * \mu > > 0$. Il existe donc une constante $c_1 > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$,

$$E_\mu(< X_t, f_\varepsilon >) \geq c_1.$$

D'autre part, d'après (5.2) ou (5.3),

$$\mathrm{var}_{P_\mu}(< X_t, f_\varepsilon >) = \iint dy\, dy'\, f_\varepsilon(y)\, f_\varepsilon(y') \int \mu(dx)\, H_x(y, y').$$

Traitons le cas $d \geq 3$. Alors, d'après le lemme 5.2, on peut trouver deux constantes C et C' telles que

$$\begin{aligned}\mathrm{var}_{P_\mu}(< X_t, f_\varepsilon >) &\leq C + C' \iint dy\, dy'\, f_\varepsilon(y)\, f_\varepsilon(y')\, |y - y'|^{2-d} \\ &= C + C' \iint \nu(dz)\, \nu(dz') \iint dy\, dy'\, |y - y'|^{2-d} h_\varepsilon(y - z)\, h_\varepsilon(y' - z').\end{aligned}$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, la fonction $u_a(y) = |y - a|^{2-d}$ est harmonique sur $\mathbb{R}^d \backslash \{a\}$, au sens où $\Delta u_a = 0$. Il en découle que, pour tout $z \in \mathbb{R}^d \backslash \{a\}$, pour tout $r > 0$, la moyenne des valeurs de u_a sur la sphère de centre z de rayon r, notée $S(z, r)$, est inférieure ou égale à $u_a(z)$ (en fait cette moyenne est égale à $u_a(z)$ si et seulement si $|z - a| \leq r$). Une méthode probabiliste simple pour vérifier ce résultat consiste à se donner un mouvement brownien (B_t) dans $\mathbb{R}^d$ issu de z, à appliquer la formule d'Itô à $u_a(B_t)$, ce qui montre que $u_a(B_t)$ est une martingale locale positive donc aussi une surmartingale positive, et enfin à appliquer le théorème d'arrêt à $u_a(B_t)$ au premier temps de sortie de la boule de rayon r centrée en z. Ensuite, en notant γ_d le volume de la sphère unité en dimension d et $\sigma_r^z(dy)$ la probabilité uniforme sur la sphère $S(z, r)$, on a

$$\begin{aligned}\int dy\, h_\varepsilon(y - z)\, |y - a|^{2-d} &= \gamma_d \int_0^\infty dr\, r^{d-1} h_\varepsilon(r) \int \sigma_r^z(dy) |y - a|^{2-d} \\ &\leq \gamma_d \int_0^\infty dr\, r^{d-1} h_\varepsilon(r)\, |z - a|^{2-d} \\ &= |z - a|^{2-d},\end{aligned}$$

grâce à l'égalité $\int h_\varepsilon(y)\,dy = 1$. En utilisant deux fois cette inégalité, on trouve pour tous $z,\ z' \in \mathbb{R}^d$,

$$\iint dy\,dy'\,|y-y'|^{2-d} h_\varepsilon(y-z)\,h_\varepsilon(y'-z') \le \int dy'\,h_{\varepsilon'}(y'-z')\,|z-y'|^{2-d} \le |z'-z|^{2-d}.$$

En revenant à la formule précédente pour $\mathrm{var}_{P_\mu}(< X_t, f_\varepsilon >)$ et en utilisant l'hypothèse sur ν, on voit qu'il existe une constante c_2 telle que, pour tout $\varepsilon \in]0,1]$,

$$\mathrm{var}_{P_\mu}(< X_t, f_\varepsilon >) \le c_2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne alors

$$\begin{aligned} P_\mu(< X_t, f_\varepsilon >> 0) &\ge \frac{E_\mu(< X_t, f_\varepsilon >)^2}{E_\mu(< X_t, f_\varepsilon >^2)} \\ &= \Big(1 + \frac{\mathrm{var}_{P_\mu}(< X_t, f_\varepsilon >)}{E_\mu(< X_t, f_\varepsilon >)^2}\Big)^{-1} \\ &\ge \big(1 + \frac{c_2}{c_1^2}\big)^{-1}, \end{aligned}$$

d'où l'estimation (5.7), dans le cas $d \ge 3$. La preuve du cas $d = 2$ est exactement semblable, en utilisant le caractère harmonique de la fonction $\log(1/|y-a|)$. Le cas $d = 1$ est plus facile puisque le lemme 5.2 montre immédiatement que les quantités $\mathrm{var}_{P_\mu}(< X_t, f_\varepsilon >)$ sont bornées pour $\varepsilon \in]0,1]$. $\square$

Remarque. Le résultat du théorème 5.6 a été énoncé pour la première fois par Perkins [34]. La réciproque de ce théorème est aussi vraie: la condition $\mathrm{cap}\,(H) > 0$ est nécessaire et suffisante pour qu'on ait

$$P_\mu(\mathrm{supp}\,X_t \cap H \ne \emptyset) > 0.$$

Cette réciproque est un cas particulier des résultats de Dynkin [12]. L'idée de la preuve est la suivante. Traitons le cas où $H = K$ est compact. On montre que la fonction

$$u(t,x) = -\log P_{\delta_x}(\mathrm{supp}\,X_t \cap K = \emptyset), \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

est une solution (positive) du problème

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u - \frac{\sigma^2}{2} u^2, \\ &\lim_{t \downarrow 0} u(t,x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d \backslash K \end{aligned}$$

(voir l'exercice 4.1 pour un résultat voisin). Si on suppose $P_{\delta_x}(\mathrm{supp}\,X_t \cap K \ne \emptyset) > 0$, la fonction $u(t,x)$ n'est pas identiquement nulle, et il existe une solution non triviale au problème précédent. D'après des résultats profonds d'éliminabilité des singularités pour les équations aux dérivées partielles dûs à Baras et Pierre [5], cela entraîne que $\mathrm{cap}\,(K) > 0$. Au vu de la simplicité de la preuve du théorème 5.6, on s'attendrait à ce qu'il existe une preuve purement probabiliste de sa réciproque. L'existence d'une telle preuve reste un problème ouvert.

Exercices

Exercice 5.1 *Soit B un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 3$) issu de x. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ tel que $x \notin K$. Montrer que la condition* $\mathrm{cap}\,(K) > 0$ *entraîne*

$$P(\exists t \geq 0,\ B_t \in K) > 0.$$

Pour cela, on adaptera la preuve du théorème 5.6 en étudiant les moments d'ordre 1 *et* 2 *de*

$$V_\varepsilon = \int_0^\infty f_\varepsilon(B_s)\, ds.$$

On vérifiera en particulier que

$$E(V_\varepsilon^2) = 2 \int dy\, G(x,y)\, f_\varepsilon(y) \int dz\, G(y,z)\, f_\varepsilon(z),$$

où $G(x,y) = \int_0^\infty dt\, q_t(y-x) = c_d|z-y|^{2-d}$.

Exercice 5.2 *Calcul des moments d'ordre n de $< X_t, f >$ (cf [6], p.77). Pour simplifier les calculs, on suppose que $\sigma^2 = 1$.*

(a) *Grâce à la représentation du semigroupe de la diffusion de Feller vue dans le chapitre 1, vérifier que, pour tout $t > 0$, pour tout $\lambda > 0$ assez petit, on a*

$$E_\mu(\exp \lambda < X_t, 1 >) < \infty$$

et en déduire que la variable $< X_t, 1 >$ a des moments de tous ordres.

(b) *Fixons $f \in BL(\mathbb{R}^d)$. Pour $\theta \geq 0$, soit $v_t^\theta(x)$ l'unique solution positive de l'équation intégrale*

$$v_t^\theta(x) = \theta Q_t f(x) - \frac{1}{2} \int_0^t Q_{t-s}((v_s^\theta)^2)(x)\, ds.$$

A l'aide de l'interprétation probabiliste des fonctions $v_t^\theta(x)$ vérifier que l'application $\theta \longrightarrow v_t^\theta(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, et que sa dérivée k-ième est bornée uniformément pour $\theta \in [0,1]$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$. On pose

$$v_t^{(k)}(\theta, x) = \frac{d^k}{d\theta^k} v_t^\theta(x)$$

puis $v_t^{(k)}(x) = v_t^{(k)}(0,x)$. Montrer que les fonctions $v_t^{(k)}(x)$ peuvent être déterminées par récurrence par les formules

$$\begin{aligned} v_t^{(1)}(x) &= Q_t f(x) \\ v^{(n)}(x) &= -\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k \int_0^t Q_{t-s}(v_s^{(k)} v_s^{(n-k)})(x)\, ds, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

(observer que $v_t^{(0)}(x) = 0$).

(c) *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,*

$$E_\mu(< X_t, f >^n) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} C_{n-1}^k < \mu, v_t^{(n-k)} > E_\mu(< X_t, f >^k).$$

Indication: On montrera que

$$\begin{aligned} &E_\mu(< X_t, f >^n \exp -\theta < X_t, f >) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} C_{n-1}^k < \mu, v_t^{(n-k)}(\theta, \cdot) > E_\mu(< X_t, f >^k \exp -\theta < X_t, f >), \end{aligned}$$

d'abord pour $n = 1$ puis par récurrence sur n.

Chapter 6

Le Serpent Brownien

Dans le chapitre 1, nous avons mis en évidence une correspondance bijective, préservant la mesure, entre l'excursion positive de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ et l'arbre associé à un processus de Galton-Watson géométrique critique. Dans ce chapitre, nous étendons cette correspondance à la situation où l'on combine branchement et déplacement spatial. Précisément, nous construisons une chaîne de Markov à valeurs dans un espace de trajectoires, qui est associée au processus de branchement brownien du chapitre 4 de la même façon que la marche aléatoire simple est associée au processus de branchement de Galton-Watson par la correspondance du chapitre 1. Nous établissons pour cette chaîne de Markov un théorème limite analogue au théorème d'invariance de Donsker (rappelé dans le chapitre 3). Le processus limite, appelé serpent brownien, est un processus de Markov continu à valeurs dans un espace de trajectoires arrêtées. Ce processus nous permettra dans le chapitre suivant de donner une nouvelle approche du super-mouvement brownien, grâce à laquelle nous compléterons les résultats des chapitres 4 et 5.

6.1 Une chaîne de Markov à valeurs dans un espace de trajectoires

6.1.1 Construction de la chaîne de Markov

Nous commençons par quelques définitions. Une trajectoire arrêtée dans $\mathbb{R}^d$ est un couple (w, ζ) où $\zeta \geq 0$ et w est une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^d$, qui est constante sur $[\zeta, \infty[$. Le nombre ζ est appelé temps de vie de la trajectoire arrêtée. Par abus de notation, nous écrirons presque toujours w au lieu de (w, ζ), bien que le nombre ζ ne soit pas déterminé par w (on écrira alors parfois $\zeta = \zeta_w$). On notera $\hat{w} = w(\zeta)$ le point terminal de w.

On note $\mathcal{W}$ l'ensemble de toutes les trajectoires arrêtées et, pour $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{W}_x$

l'ensemble des trajectoires arrêtées issues de x, i.e. telles que $w(0)=x$. Pour $\varepsilon>0$, on note aussi $\mathcal{W}_x^\varepsilon$ l'ensemble des trajectoires arrêtées de $\mathcal{W}_x$ telles que $\zeta \in \varepsilon\mathbb{N}$. L'unique élément de $\mathcal{W}_x$ tel que $\zeta=0$ est noté $\underline{x}$ (c'est la trajectoire triviale réduite au point x).

Nous nous fixons pour la suite de ce chapitre un point de référence $x \in \mathbb{R}^d$. L'espace $\mathcal{W}_x$ est muni de la distance

$$d((w,\zeta),(w',\zeta')) = \sup_{t\geq 0} |w(t)-w'(t)| + |\zeta-\zeta'|$$

qui en fait un espace polonais. Remarquons que $|\hat{w}-\hat{w}'| \leq d(w,w')$.

Soient $(w,\zeta) \in \mathcal{W}_x$ et $a \in [0,\zeta]$, $b \in [a,\infty[$. On définit une unique mesure de probabilité sur $\mathcal{W}_x$, notée $R_{a,b}(w,dw')$, en imposant que

(i) $\zeta'=b$, $R_{a,b}(w,dw')$ p.s.

(ii) $w'(t)=w(t)$, $\forall t \in [0,a]$, $R_{a,b}(w,dw')$ p.s.

(iii) la loi sous $R_{a,b}(w,dw')$ de $(w'(a+t), t \geq 0)$ est celle d'un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$, issu du point $w(a)$ et arrêté à l'instant $b-a$.

La signification de cette définition est facile à comprendre. Sous $R_{a,b}(w,dw')$, w' est une trajectoire arrêtée de temps de vie b, qu'on obtient à partir de w en "effaçant" la trajectoire w après l'instant a et en lui rajoutant ensuite entre les instants a et b un bout de trajectoire brownienne dans $\mathbb{R}^d$.

Pour tout $\varepsilon>0$, on construit ensuite un noyau de transition noté $\Pi^\varepsilon(w,dw')$ de $\mathcal{W}_x^\varepsilon$ dans $\mathcal{W}_x^\varepsilon$ par les formules suivantes

· si $\zeta_w \geq \varepsilon$,

$$\Pi^\varepsilon(w,dw') = \frac{1}{2}R_{\zeta,\zeta+\varepsilon}(w,dw') + \frac{1}{2}R_{\zeta-\varepsilon,\zeta-\varepsilon}(w,dw')$$

· si $\zeta_w = 0$ (et donc $w=\underline{x}$),

$$\Pi^\varepsilon(w,dw') = R_{0,\varepsilon}(w,dw').$$

On note $(W_k^\varepsilon, k \in \mathbb{N})$ la chaîne de Markov associée au noyau de transition Π^ε, qu'on peut appeler serpent (brownien) discret, et ζ_k^ε le temps de vie de W_k^ε. On peut supposer que cette chaîne de Markov est définie sur l'espace canonique $(\mathcal{W}_x^\varepsilon)^{\mathbb{N}}$. Sauf indication du contraire, nous supposerons toujours que $W_0^\varepsilon = \underline{x}$.

A nouveau, la signification intuitive de cette définition est facile à comprendre. A un instant donné, la valeur du processus est une trajectoire arrêtée à un instant ζ multiple entier de ε. A l'étape suivante, on choisit avec probabilité $\frac{1}{2}$ d'augmenter ou de diminuer de ε le temps de vie ζ (sauf si $\zeta=0$ dans quel cas on est obligé d'augmenter). Si l'on choisit l'augmentation, on prolonge la trajectoire de départ en lui rajoutant un "petit bout" de trajectoire brownienne. Si l'on choisit la diminution, on restreint simplement la trajectoire de départ à l'intervalle $[0, \zeta - \varepsilon]$.

Il est immédiat par construction que le processus des temps de vie $(\zeta_k^\varepsilon, k \in \mathbb{N})$ est lui-même une chaîne de Markov, et plus précisément, une marche aléatoire simple sur $\varepsilon\mathbb{N}$ (cf paragraphe 1.4.2). En effet, $\zeta_{k+1}^\varepsilon = \zeta_k^\varepsilon + \varepsilon$ ou $\zeta_k^\varepsilon - \varepsilon$ avec probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment du passé (sauf évidemment si $\zeta_k^\varepsilon = 0$ dans quel cas $\zeta_{k+1}^\varepsilon = \varepsilon$). Pour la suite, il sera utile de disposer des lois conditionnelles de $(W_n^\varepsilon, n \in \mathbb{N})$ connaissant $(\zeta_n^\varepsilon, n \in \mathbb{N})$. On vérifie très facilement qu'une version régulière de ces lois conditionnelles est obtenue de la manière suivante. Soit ω une application de $\mathbb{N}$ dans $\varepsilon\mathbb{N}$ telle que $\omega(0) = 0$. Alors $Q^\omega = P(\cdot \mid \zeta_n^\varepsilon = \omega(n), \forall n \in \mathbb{N})$ est définie en imposant que

· $W_0^\varepsilon = \underline{x}$, Q^ω p.s.

· la loi sous Q^ω de W_{n+1}^ε sachant $(W_0^\varepsilon, W_1^\varepsilon, \dots, W_n^\varepsilon)$ est $R_{\omega(n)\wedge\omega(n+1),\omega(n+1)}(W_n^\varepsilon, \cdot)$

Cette dernière propriété peut être étendue par récurrence pour vérifier que, pour tout entier $p \geq 1$,

· la loi sous Q^ω de W_{n+p}^ε sachant $(W_0^\varepsilon, W_1^\varepsilon, \dots, W_n^\varepsilon)$ est $R_{\inf_{n\leq k\leq n+p}\omega(k),\omega(n+p)}(W_n^\varepsilon, \cdot)$

Cette propriété exprime que la loi sous Q^ω de W_{n+p}^ε connaissant $(W_0^\varepsilon, W_1^\varepsilon, \dots, W_n^\varepsilon)$ est la loi d'une trajectoire qui coïncide avec W_n^ε jusqu'à l'instant $\inf_{n\leq k\leq n+p}\omega(k)$ et ensuite, jusqu'à l'instant $\omega(n+p)$, se comporte comme un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$.

6.1.2 Liens avec le processus de branchement brownien

Soit maintenant E_ε l'espace canonique des excursions en dehors de 0 de la marche aléatoire simple sur $\varepsilon\mathbb{N}$ ($\omega \in E_\varepsilon$ si $\omega = \varepsilon\omega'$ avec $\omega' \in E_+$, l'espace E_+ étant défini dans le chapitre 1). Par une extension triviale des résultats du chapitre 1, il existe une bijection $\Phi : E_\varepsilon \longrightarrow \Delta$ qui transforme la mesure d'excursion $\mathbb{P}_\varepsilon$ de la marche aléatoire simple sur $\varepsilon\mathbb{N}$ en la loi Π de l'arbre de Galton-Watson de loi de reproduction géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Si on part de $\omega \in E_\varepsilon$, l'arbre $\Phi(\omega)$ peut être utilisé comme arbre généalogique d'un processus de branchement brownien, comme dans le chapitre 4. Notre but est de montrer qu'en un certain sens la famille des trajectoires des "particules" de ce processus de branchement brownien a même loi que la famille des W_k^ε, $k \in \mathbb{N}$ sous Q^ω.

Pour cela, commençons par rappeler la construction du processus de branchement brownien du chapitre 4. On se donne une famille $(V^u, u \in U)$ de mouvements browniens indépendants dans $\mathbb{R}^d$, issus de 0, et un arbre $\mathcal{A} \in \Delta$. Pour $u = u_1 \dots u_p \in$

$\mathcal{A}$, on définit une trajectoire arrêtée $V^u \in \mathcal{W}_x^\varepsilon$, de temps de vie $p\varepsilon$, en posant

$$\begin{aligned} V^u(t) &= x + \sum_{k=0}^{j-1} B_\varepsilon^{u_1\ldots u_k} + B_{t-j\varepsilon}^{u_1\ldots u_j} && \text{si } j\varepsilon \leq t \leq (j+1)\varepsilon,\ 0 \leq j \leq p-1 \\ V^u(t) &= V^u(p\varepsilon) && \text{si } t \geq p\varepsilon. \end{aligned}$$

Proposition 6.1 *Soient $\omega \in E_\varepsilon$ et $\mathcal{A} = \Phi(\omega)$. La loi du processus*

$$\Big(\sum_{u\in\mathcal{A}, |u|=p} \delta_{V^u},\ p \in \mathbb{N} \Big)$$

coïncide avec la loi sous Q^ω de

$$\Big(\sum_{\{n,\, \omega(n)=p\varepsilon, \omega(n+1)=(p+1)\varepsilon\}} \delta_{W_n^\varepsilon},\ p \in \mathbb{N} \Big).$$

Remarques. (i) La proposition fait intervenir deux processus aléatoires à valeurs dans l'espace $M_p(\mathcal{W}_x^\varepsilon)$. Les masses totales des mesures en question donnent les processus (déterministes)

$$(\text{Card}\,\{u \in \mathcal{A}, |u| = p\}, p \in \mathbb{N})$$

et

$$(\text{Card}\,\{n,\, \omega(n) = p\varepsilon, \omega(n+1) = (p+1)\varepsilon\}, p \in \mathbb{N})$$

dont l'égalité a déjà été observée dans le chapitre 1.

(ii) Nous appliquerons la proposition 6.1 au cas où ω est choisie de façon aléatoire selon la mesure d'excursion $\mathbb{P}_\varepsilon$ (cela revient à considérer une excursion en dehors de $\underline{x}$ de la chaîne de Markov (W_n^ε) non conditionnée). Dans ce cas, l'arbre $\mathcal{A}$ a la loi de l'arbre géométrique critique et le premier processus donne pour tout p les trajectoires entre les instants 0 et $p\varepsilon$ des particules en vie à l'instant $p\varepsilon$ d'un processus de branchement brownien de durée de vie ε issu de δ_x. Les positions des particules à l'instant $p\varepsilon$, que nous avions étudiées dans le chapitre 4, sont données par la mesure

$$\sum_{u\in\mathcal{A}, |u|=p} \delta_{V^u(p\varepsilon)}.$$

Une conséquence de la proposition est donc que si l'on considère la chaîne de Markov (non conditionnée) (W_k^ε) issue de $\underline{x}$, et si σ désigne le premier retour en $\underline{x}$ de cette chaîne de Markov, le processus

$$\Big(\sum_{\{n<\sigma,\, \omega(n)=p\varepsilon, \omega(n+1)=(p+1)\varepsilon\}} \delta_{W_n^\varepsilon(p\varepsilon)},\ p \in \mathbb{N} \Big)$$

est au sens du chapitre 4 un processus de branchement brownien de durée de vie ε, de loi de reproduction la loi géométrique de paramètre 1/2, issu de δ_x. Si l'on remplace les mesures de Dirac en $W_n^\varepsilon(p\varepsilon)$ par les mesures de Dirac en W_n^ε on obtient un processus à valeurs dans $M_p(\mathcal{W}_x^\varepsilon)$ qui contient plus d'information que le processus de branchement brownien dans le sens où il donne aussi les trajectoires suivies par les particules.

Preuve. Le résultat de la proposition est clair sur un dessin. Nous en donnons néanmoins une preuve détaillée, en prenant $\varepsilon = 1$ pour alléger la notation. Rappelons d'abord quelques propriétés de l'application Φ. Chaque arête u de l'arbre $\mathcal{A} = \Phi(\omega)$ correspond à une excursion de ω au-dessus du niveau $|u|$. Nous notons $k(u)$ le début de cette excursion, de sorte que l'application $u \longrightarrow k(u)$ est une bijection de $\mathcal{A}$ sur $\{k, \omega(k+1) = \omega(k) + 1\}$. Pour établir la proposition, il suffit alors de montrer que

$$\Big(V^u, u \in \mathcal{A}\Big) \stackrel{\text{(loi)}}{=} \Big(W_{k(u)}^\varepsilon, u \in \mathcal{A}\Big). \tag{6.1}$$

En effet, les deux processus de la proposition peuvent être écrits comme la même fonction (déterministe) respectivement de $(V^u, u \in \mathcal{A})$ et de $(W_{k(u)}^\varepsilon, u \in \mathcal{A})$.

Partons de la famille de mouvements browniens $(B^u, u \in U)$ qui nous a servi à définir la famille (V^u), et construisons un processus $(\tilde{W}_n^1)$ de la façon suivante: pour tout n, $\tilde{W}_n^1$ est une trajectoire arrêtée de temps de vie $\omega(n)$, et

· $\tilde{W}_0^1 = \underline{x}$;

· si $\omega(n) < \omega(n+1)$ et $n = k(u)$,

$$\tilde{W}_{n+1}^\varepsilon(t) = \begin{cases} \tilde{W}_n^\varepsilon(t) & \text{si } t \le \omega(n), \\ \tilde{W}_n^\varepsilon(\omega(n)) + B^u(t - \omega(n)) & \text{si } \omega(n) \le t \le \omega(n+1) \end{cases}$$

· si $\omega(n) \ge \omega(n+1)$,

$$\tilde{W}_{n+1}^\varepsilon(t) = \tilde{W}_n^\varepsilon(t), \ \forall t \le \omega(n+1).$$

Grâce à l'indépendance des mouvements browniens B^u, on voit tout de suite que $(\tilde{W}_n^\varepsilon, n \in \mathbb{N})$ a pour loi Q^ω. D'autre part, on démontre simplement par récurrence sur $|u|$ que

$$\tilde{W}_{k(u)}^\varepsilon = V^u, \ \forall u \in \mathcal{A}.$$

Cela termine la preuve de la proposition. □

6.2 Le serpent brownien

Notre but dans la suite de ce chapitre est de montrer que les chaînes de Markov $(W_k^\varepsilon, k \in \mathbb{N})$ convenablement changées de temps convergent en loi quand $\varepsilon \to 0$ vers un processus limite (à temps continu) qui sera un processus de Markov à valeurs dans l'espace $\mathcal{W}_x$. On peut déjà remarquer que cette convergence a lieu pour les processus des temps de vie. D'après le théorème de Donsker, la famille $(\zeta^\varepsilon_{[t/\varepsilon^2]}, t \geq 0)$ converge en loi vers un mouvement brownien réfléchi.

Dans ce paragraphe, nous allons pour commencer donner une construction directe du processus limite , appelé serpent brownien. Si $(\beta_s, s \geq 0)$ est un mouvement brownien réfléchi dans $\mathbb{R}_+$, issu de $\beta_0 = \lambda$, on note $\theta_s^\lambda(dadb)$ la loi du couple

$$\Big(\inf_{[0,s]} \beta_r, \beta_s\Big).$$

La loi $\theta_s^\lambda(dadb)$ est connue explicitement (cf exercice 6.1).

Théorème 6.2 *Il existe un processus de Markov continu à valeurs dans $\mathcal{W}_x$, noté $(W_s, s \geq 0)$ issu de $W_0 = \underline{x}$, dont les noyaux de transition sont donnés par la formule*

$$Q_s(w, dw') = \int \theta_s^\zeta(dadb)\, R_{a,b}(w, dw'),$$

(où $\zeta = \zeta_w$). Si ζ_s désigne le temps de vie de W_s, le processus $(\zeta_s, s \geq 0)$ est un mouvement brownien réfléchi dans $\mathbb{R}_+$, et est markovien par rapport à la filtration naturelle de $(W_s, s \geq 0)$. Enfin, pour tout $\delta > 0$, l'application $s \to W_s$ est p.s. localement höldérienne d'exposant $\frac{1}{4} - \delta$.

Preuve. On vérifie d'abord que les noyaux de transition $Q_s(w, dw')$ satisfont la relation de Chapman-Kolmogorov. Si F est une fonction mesurable positive sur $\mathcal{W}_x$, il faut montrer que, pour tous $s, s' \geq 0$,

$$\int Q_s(w, dw') \int Q_{s'}(w', dw'')\, F(w'') = \int Q_{s+s'}(w, dw'')\, F(w''),$$

ou de manière équivalente,

$$\begin{aligned} &\int \theta_s^\zeta(dadb) \int \theta_{s'}^b(da'db') \int R_{a,b}(w, dw') \int R_{a',b'}(w', dw'')\, F(w'') \\ &= \int \theta_{s+s'}^\zeta(dudv) \int R_{u,v}(w, dw'')\, F(w''). \end{aligned}$$

Or, en revenant à la définition des noyaux $R_{a,b}(w, dw')$, on voit immédiatement que, pour $a \leq b \wedge \zeta$, $a' \leq b \wedge b'$,

$$\int R_{a,b}(w, dw') \int R_{a',b'}(w', dw'')\, F(w'') = \int R_{a \wedge a', b'}(w, dw'')\, F(w'').$$

De plus, pour toute fonction φ mesurable positive sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$,

$$\int \theta_s^\zeta(dadb) \int \theta_{s'}^b(da'db')\, \varphi(a \wedge a', b') = \int \theta_{s+s'}^\zeta(dudv)\, \varphi(u, v).$$

Pour vérifier cette égalité, il suffit de se donner un mouvement brownien réfléchi $(\beta_s, s \geq 0)$ issu de ζ, d'écrire

$$\Big(\inf_{[0,s+s']} \beta_r, \beta_{s+s'}\Big) = \Big(\inf_{[0,s]} \beta_r \wedge \inf_{[s,s+s']} \beta_r, \beta_{s+s'}\Big)$$

et d'appliquer la propriété de Markov à l'instant s. La formule de Chapman-Kolmogorov découle des identités précédentes.

On peut ensuite utiliser le théorème d'extension de Kolmogorov, qui assure l'existence d'un processus de Markov $(\bar{W}_s, s \geq 0)$, tel que $\bar{W}_0 = \underline{x}$, de noyaux de transition $Q_s(w, dw')$. Nous voulons alors établir l'existence d'une version continue de $(\bar{W}_s)$. Soient $0 \leq s_1 < s_2$. Par construction, $\bar{W}_{s_1}$ a pour loi $Q_{s_1}(\underline{x}, \cdot)$, qui est la loi d'un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ issu de 0, arrêté à un instant aléatoire indépendant suivant la loi de la valeur à l'instant s_1 d'un mouvement brownien réfléchi issu de 0. Compte-tenu de la forme du noyau $Q_{s_2-s_1}$, on voit qu'on peut réaliser un couple (w_1, w_2) ayant même loi que $(\bar{W}_{s_1}, \bar{W}_{s_2})$ en procédant de la manière suivante. On se donne trois mouvements browniens indépendants dans $\mathbb{R}^d$ issus de 0, notés B, B', B'', et un mouvement brownien réfléchi dans $\mathbb{R}_+$, également issu de 0, noté $(\beta_s, s \geq 0)$, indépendant de (B, B', B''). Alors, si $m_{s_1,s_2} = \inf_{[s_1,s_2]} \beta_r$, w_1, w_2 sont les deux trajectoires arrêtées de temps de vie respectifs β_{s_1}, β_{s_2} définies par

$$\begin{array}{ll} w_1(t) = w_2(t) = x + B(t), & \forall t \in [0, m_{s_1,s_2}], \\ w_1(t) = x + B(m_{s_1,s_2}) + B'(t - m_{s_1,s_2}) & \forall t \in [m_{s_1,s_2}, \beta_{s_1}], \\ w_2(t) = x + B(m_{s_1,s_2}) + B''(t - m_{s_1,s_2}) & \forall t \in [m_{s_1,s_2}, \beta_{s_2}]. \end{array}$$

Puisque (w_1, w_2) a alors même loi que $(\bar{W}_{s_1}, \bar{W}_{s_2})$, on a pour tout entier $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} & E[d(\bar{W}_{s_1}, \bar{W}_{s_2})^{2p}] \\ & \leq C_p\Big(E[(\beta_{s_2} - \beta_{s_1})^{2p}] + E\Big[\sup_{t \leq \beta_{s_1} - m_{s_1,s_2}} |B'(t)|^{2p}\Big] + E\Big[\sup_{t \leq \beta_{s_2} - m_{s_1,s_2}} |B''(t)|^{2p}\Big]\Big) \\ & \leq C'_p\Big((s_2 - s_1)^p + E[(\beta_{s_1} - m_{s_1,s_2})^p] + E[(\beta_{s_2} - m_{s_1,s_2})^p]\Big) \\ & \leq C''_p\Big((s_2 - s_1)^p + (s_2 - s_1)^{p/2}\Big). \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que, si γ désigne un mouvement brownien réel issu de 0, on a $E[(\beta_{s_1} - m_{s_1,s_2})^p] \leq E[\sup\{\gamma_s, s \leq s_2 - s_1\}^p] = C(s_2 - s_1)^{p/2}$, et de même pour $E[(\beta_{s_2} - m_{s_1,s_2})^p]$.

On peut maintenant appliquer le lemme de Kolmogorov (lemme 2.3), qui s'étend sans difficultés au cas de variables aléatoires à valeurs dans un espace polonais. On obtient que le processus $(\bar{W}_s, s \geq 0)$ a une version continue, qui est même localement höldérienne d'exposant $\frac{1}{4} - \delta$ pour tout $\delta > 0$. On note $(W_s, s \geq 0)$ cette version, et ζ_s le temps de vie de W_s.

Il reste à établir l'assertion concernant $(\zeta_s, s \geq 0)$. Comme dans le paragraphe 3.4, notons $p(s, u, v)$ les densités de transition du mouvement brownien réfléchi. Alors, par construction des noyaux $Q_s(w, dw')$, on a si $s < s'$

$$\begin{aligned} E[f(\zeta_{s'}) \mid W_r, r \leq s] &= \int Q_{s'-s}(W_s, dw')\, f(\zeta') \\ &= \int \theta^{\zeta_s}_{s'-s}(dadb)\, f(b) \\ &= \int p(s'-s, \zeta_s, b)\, f(b)\, db. \end{aligned}$$

Cela donne le résultat voulu, puisqu'on sait déjà que le processus $(\zeta_s, s \geq 0)$ est continu. □

Remarque. Le théorème d'extension de Kolmogorov permet de construire le processus $(W_s, s \geq 0)$ avec valeur initiale $W_0 = w$, élément quelconque de $\mathcal{W}$. Il est encore vrai qu'avec cette valeur initiale le processus a une version continue (voir exercice 6.2). On peut aussi voir que le processus $(W_s, s \geq 0)$ est fellérien, ce qui entraîne qu'il possède la propriété de Markov forte (voir exercice 6.3).

6.3 Convergence des approximations discrètes

Nous nous proposons maintenant de réaliser le programme annoncé au début de la partie 2, à savoir de montrer la convergence des chaînes de Markov (W^ε_k), convenablement changées de temps, vers le processus (W_s). Ce résultat sera important dans le chapitre suivant, lorsque nous établirons le lien entre le serpent brownien et le super-mouvement brownien.

Pour commencer, nous introduisons des processus à temps continu qui interpolent les chaînes de Markov W^ε. On se limite à $\varepsilon = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. On note $(\zeta^{(n)}_s, s \geq 0)$ l'unique fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, affine sur les intervalles $[k2^{-2n}, (k+1)2^{-2n}]$ et telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\zeta^{(n)}_{k2^{-2n}} = \zeta^{2^{-n}}_k.$$

Ensuite, pour $s \in [k2^{-2n}, (k+1)2^{-2n}]$, on distingue deux cas pour définir $W^{(n)}_s$. Si $\zeta^{2^{-n}}_k > \zeta^{2^{-n}}_{k+1}$, on définit $W^{(n)}_s$ comme la trajectoire arrêtée de temps de vie $\zeta^{(n)}_s$ qui est la restriction de $W^{2^{-n}}_k$ sur l'intervalle $[0, \zeta^{(n)}_s]$. Si $\zeta^{2^{-n}}_k < \zeta^{2^{-n}}_{k+1}$, on adopte la même définition en remplaçant $W^{2^{-n}}_k$ par $W^{2^{-n}}_{k+1}$.

Le processus $(W^{(n)}_s, s \geq 0)$ est alors p.s. continu, et on a aussi, p.s. pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$W^{(n)}_{k2^{-2n}} = W^{2^{-n}}_k.$$

Notre but est alors de montrer la convergence en loi de la suite de processus $W^{(n)}$ vers W (rappelons que l'on suppose toujours $W^{(n)}_0 = W^{2^{-n}}_0 = \underline{x}$). Pour des applications ultérieures, nous aurons besoin d'un peu plus que la convergence des lois marginales de dimension finie. A cette fin, le lemme suivant, qui établit pour les processus $W^{(n)}$ une inégalité déjà démontrée pour W, jouera un rôle important.

Lemme 6.3 *Soit $T > 0$ fixé. Pour tout entier pair $p \geq 2$, il existe une constante C_p telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $s, s' \in [0, T]$,*

$$E\Big(d(W_s^{(n)}, W_{s'}^{(n)})^{2p}\Big) \leq C_p \, |s - s'|^{p/2}.$$

Preuve. Compte-tenu de la méthode d'interpolation utilisée pour définir $W^{(n)}$ et des propriétés des processus W^ε, on voit facilement que, pour $s < s'$, le couple $(W_s^{(n)}, W_{s'}^{(n)})$ a même loi que le couple (w_1, w_2) introduit dans la preuve du théorème 6.2, à condition de remplacer dans la construction de (w_1, w_2) le mouvement brownien réfléchi β par le processus $\zeta^{(n)}$. Il vient alors, comme dans cette preuve:

$$\begin{aligned} & E\Big(d(W_s^{(n)}, W_{s'}^{(n)})^{2p}\Big) \\ & \leq C_p \Big(E[(\zeta_s^{(n)} - \zeta_{s'}^{(n)})^{2p}] + E[(\zeta_s^{(n)} - \inf_{[s,s']} \zeta_r^{(n)})^p] + E[(\zeta_{s'}^{(n)} - \inf_{[s,s']} \zeta_r^{(n)})^p]. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Si $s' - s < 2^{-2n}$, l'inégalité recherchée découle trivialement du fait que la fonction $r \to \zeta_r^{(n)}$ est affine sur les intervalles de la forme $[k2^{-2n}, (k+1)2^{-2n}]$. Si $s' - s \geq 2^{-2n}$, l'inégalité triangulaire permet de se ramener au cas où $s = k2^{-2n}$, $s' = l2^{-2n}$. Grâce ensuite à l'inégalité $||a| - |b|| \leq |a - b|$ (et en écrivant la marche aléatoire réfléchie comme valeur absolue d'une marche aléatoire non réfléchie), nous obtenons une majoration en remplaçant dans le membre de droite de (6.2) $(\zeta_{j2^{-2n}}^{(n)}, j \in \mathbb{N})$ par une marche aléatoire simple (non réfléchie) sur $2^{-n}\mathbb{Z}$, que nous notons $(\bar{\zeta}_{j2^{-2n}}^{(n)}, j \in \mathbb{N})$.

On peut alors écrire $\bar{\zeta}_{l2^{-2n}}^{(n)} - \bar{\zeta}_{k2^{-2n}}^{(n)}$ comme la somme de $l - k$ variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs 2^{-n} et -2^{-n} avec probabilité $1/2$. En développant la puissance $2p$-ième de cette somme, et en dénombrant les termes d'espérance non nulle, on trouve

$$E[(\bar{\zeta}_{l2^{-2n}}^{(n)} - \bar{\zeta}_{k2^{-2n}}^{(n)})^{2p}] \leq C'_p \, (l - k)^p \, 2^{-2np}, \tag{6.3}$$

pour une constante C'_p ne dépendant que de p.

D'autre part, le principe de réflexion pour la marche aléatoire simple montre que la loi de

$$\bar{\zeta}_{k2^{-2n}}^{(n)} - \inf_{[k2^{-2n}, l2^{-2n}]} \bar{\zeta}_s^{(n)} \quad \Big(\overset{(\text{loi})}{=} \bar{\zeta}_{l2^{-2n}}^{(n)} - \inf_{[k2^{-2n}, l2^{-2n}]} \bar{\zeta}_s^{(n)} \Big)$$

est dominée par la loi de $|\bar{\zeta}_{l2^{-2n}}^{(n)} - \bar{\zeta}_{k2^{-2n}}^{(n)}|$. On obtient donc aussi

$$E[(\bar{\zeta}_{k2^{-2n}}^{(n)} - \inf_{[k2^{-2n}, l2^{-2n}]} \bar{\zeta}_s^{(n)})^p] \leq E[(\bar{\zeta}_{l2^{-2n}}^{(n)} - \bar{\zeta}_{k2^{-2n}}^{(n)})^p] \leq C''_p \, (l - k)^{p/2} \, 2^{-np}. \tag{6.4}$$

Le lemme découle de (6.2), (6.3), (6.4) et du fait qu'on peut remplacer $\zeta^{(n)}$ par $\bar{\zeta}^{(n)}$ dans (6.2). $\square$

La loi du processus $(W_s, s \geq 0)$ (ou de $(W_s^{(n)}, s \geq 0)$) est une mesure de probabilité sur l'espace $C(\mathbb{R}_+, \mathcal{W}_x)$, qui est un espace polonais pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Théorème 6.4 *On a:*

$$(W_s^{(n)}, s \geq 0) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} (W_s, s \geq 0),$$

au sens de la convergence étroite des lois dans l'espace $M_f(C(\mathbb{R}_+, \mathcal{W}_x))$.

Preuve. Il faut vérifier que, pour toute fonction F continue bornée (ou lipschitzienne bornée) sur $C(\mathbb{R}_+, \mathcal{W}_x)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} E[F(W^{(n)})] = E[F(W)]$$

(on voit que la convergence du théorème est plus forte que la convergence des lois marginales de dimension finie, pour laquelle on se limiterait à des fonctions F ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées). On voit facilement qu'on peut se limiter à montrer que, pour tout $T > 0$, pour toute fonction lipschitzienne bornée F sur $C([0,T], \mathbb{R}_+)$,

$$\lim_{n\to\infty} E[F(W_s^{(n)}, 0 \leq s \leq T)] = E[F(W_s, 0 \leq s \leq T)].$$

En effet, si $\xi \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{W}_x)$, $(\xi_{s\wedge T}, s \geq 0)$ converge vers $(\xi_s, s \geq 0)$, uniformément en ξ.

Dans la suite, on se fixe $T > 0$ et on considère $W^{(n)}$, W comme des processus indexés par $t \in [0,T]$. On commence par établir la convergence des lois marginales de dimension finie: pour $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_p \leq T$,

$$(W_{s_1}^{(n)}, \ldots, W_{s_p}^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} (W_{s_1}, \ldots, W_{s_p}).$$

Pour tout $s \geq 0$, soit $[s]_n = 2^{-2n}[2^{2n}s]$. On voit facilement que $d(W_s^{(n)}, W_{[s]_n}^{(n)}) \to 0$ en probabilité, de sorte que la convergence précédente équivaut à

$$(W_{[s_1]_n}^{(n)}, \ldots, W_{[s_p]_n}^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} (W_{s_1}, \ldots, W_{s_p}). \tag{6.5}$$

On procède alors par récurrence sur p. Si $p = 1$, $W_{[s_1]_n}^{(n)} = W_{[2^{2n}s_1]}^{2^{-n}}$ a la loi d'un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ issu de x arrêté à l'instant $\zeta_{[2^{2n}s_1]}^{2^{-n}}$, indépendant de ce mouvement brownien. Or d'après le théorème de Donsker (ou plus simplement le théorème central limite), la variable $\zeta^{2^{-n}}_{[2^{2n}s_1]}$ converge en loi quand $n \to \infty$ vers la valeur à l'instant s_1 d'un mouvement brownien réfléchi issu de 0. Le cas $p = 1$ de (6.5) en découle aussitôt.

Supposons maintenant que la convergence (6.5) est établie à l'ordre $p-1$. Pour l'obtenir à l'ordre p, il faut montrer que, pour toutes fonctions $g_1, \ldots, g_p$ lipschitziennes bornées sur $\mathcal{W}_x$,

$$\lim_{n\to\infty} E[g_1(W^{(n)}_{[s_1]_n}) \ldots g_p(W^{(n)}_{[s_p]_n})] = E[g_1(W_{s_1}) \ldots g_p(W_{s_p})].$$

Notons $Q^{(n)}_s(w, dw') = \Pi^{2^{-n}}_{2^{2n}s}(w, dw')$, pour $s \in 2^{-2n}\mathbb{N}$, les noyaux de transition de la chaîne de Markov $(W^{(n)}_s, s \in 2^{-2n}\mathbb{N})$. Alors,

$$\begin{aligned}
&E[g_1(W^{(n)}_{[s_1]_n}) \ldots g_p(W^{(n)}_{[s_p]_n})] \\
&= E[g_1(W^{(n)}_{[s_1]_n}) \ldots g_{p-1}(W^{(n)}_{[s_{p-1}]_n}) \textstyle\int Q^{(n)}_{[s_p]_n-[s_{p-1}]_n}(W^{(n)}_{[s_{p-1}]_n}, dw')\, g_p(w')].
\end{aligned}$$

Lemme 6.5 *Soient $w_n \in \mathcal{W}^{2^{-n}}_x$, $u_n \in 2^{-2n}\mathbb{N}$ tels que $w_n \to w \in \mathcal{W}_x$, $u_n \to u \geq 0$. Alors,pour toute fonction continue bornée g sur $\mathcal{W}_x$,*

$$\int Q^{(n)}_{u_n}(w_n, dw')\, g(w') \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int Q_u(w, dw')\, g(w').$$

Preuve. C'est une conséquence facile de nos définitions et du théorème d'invariance de Donsker. Soient B un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ issu de 0 et $(\gamma^{(n)}_s, s \in 2^{-2n}\mathbb{N})$ une marche aléatoire simple sur $2^{-n}\mathbb{N}$, indexée par $2^{-2n}\mathbb{N}$, issue de ζ_{w_n} et indépendante de B. Alors,

$$\int Q^{(n)}_{u_n}(w_n, dw')\, g(w') = E[g(w^{(n)})]$$

où $w^{(n)}$ désigne la trajectoire arrêtée (aléatoire) de temps de vie $\gamma^{(n)}_{u_n}$ définie par

$$\begin{aligned}
&w^{(n)}(t) = w_n(t) && \text{si } t \leq \inf_{[0,u_n]} \gamma^{(n)}_s, \\
&w^{(n)}(t) = w_n(\inf_{[0,u_n]} \gamma^{(n)}_s) + B(\gamma^{(n)}_{u_n} - \inf_{[0,u_n]} \gamma^{(n)}_s) && \text{si } \inf_{[0,u_n]} \gamma^{(n)}_s \leq t \leq \gamma^{(n)}_{u_n}.
\end{aligned}$$

Grâce au théorème de Donsker et au théorème de représentation de Skorokhod, on peut supposer qu'il existe un mouvement brownien réfléchi β issu de ζ_w tel que

$$\Big(\gamma^{(n)}_{u_n}, \inf_{[0,u_n]} \gamma^{(n)}_s\Big) \xrightarrow{\text{p.s.}} \Big(\beta_u, \inf_{[0,u]} \beta_s\Big).$$

Cela entraîne aussitôt que $w^{(n)}$ converge p.s. vers w^∞ qui a pour loi $Q_u(w, \cdot)$. L'énoncé du lemme en découle par convergence dominée. $\square$

Revenons à la preuve de (6.5). D'après l'hypothèse de récurrence et à nouveau le théorème de représentation de Skorokhod, on peut supposer qu'il existe un vecteur $(\tilde{W}^{(n)}_{[s_1]_n}, \dots, \tilde{W}^{(n)}_{[s_p]_n})$ de même loi que $(W^{(n)}_{[s_1]_n}, \dots, W^{(n)}_{[s_p]_n})$ et qui converge p.s. vers $(W_{s_1}, \dots, W_{s_p})$. Ensuite,

$$
\begin{aligned}
& E[g_1(W^{(n)}_{[s_1]_n}) \dots g_p(W^{(n)}_{[s_p]_n})] \\
&= E\Big[g_1(W^{(n)}_{[s_1]_n}) \dots g_{p-1}(W^{(n)}_{[s_{p-1}]_n}) \int Q^{(n)}_{[s_p]_n - [s_{p-1}]_n}(W^{(n)}_{[s_{p-1}]_n}, dw')\, g_p(w')] \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} E[g_1(\tilde{W}_{s_1}) \dots g_{p-1}(\tilde{W}_{s_{p-1}}) \int Q_{s_p - s_{p-1}}(\tilde{W}_{s_{p-1}}, dw')\, g_p(w') \\
&= E[g_1(W_{s_1}) \dots g_{p-1}(W_{s_{p-1}}) \int Q_{s_p - s_{p-1}}(W_{s_{p-1}}, dw')\, g_p(w') \\
&= E[g_1(W_{s_1}) \dots g_p(W_{s_p})],
\end{aligned}
$$

ce qui termine la récurrence et la preuve de la convergence des lois marginales de dimension finie.

Des arguments classiques montrent que les majorations du lemme 6.3 et la convergence des lois marginales de dimension finie suffisent pour entraîner la convergence du théorème 6.4. Fixons $\delta \in]0, 1/4[$ et, pour tout $A > 0$, soit H_A le sous-ensemble de $C([0,T], \mathcal{W}_x)$ défini par

$$H_A = \{\xi \in C([0,T], \mathcal{W}_x),\ \forall s, s' \in [0,T],\ d(\xi(s), \xi(s')) \le A|s-s'|^\delta\}.$$

Le lemme de Kolmogorov permet de déduire du lemme 6.3 que la fonction $s \to W^{(n)}_s$ est p.s. höldérienne d'exposant δ, donc que $P(W^{(n)}_s \in H_A) \uparrow 1$ quand $A \to \infty$. Plus précisément, le fait que les constantes C_p du lemme 6.3 ne dépendent pas de n entraîne que cette dernière convergence a lieu uniformément en n (il suffit pour voir cela de reprendre la preuve du lemme de Kolmogorov). Si $\varepsilon > 0$ est fixé, on peut donc choisir $A(\varepsilon)$ assez grand de façon que $P(W^{(n)} \notin H_{A(\varepsilon)}) < \varepsilon$, pour tout n.

Soit ensuite $D = \{s_1, s_2, \dots, s_k, \dots\}$ un sous-ensemble dénombrable dense de $[0,T]$. Puisque, pour tout j, $W^{(n)}_{s_j}$ converge en loi vers W_{s_j} on peut d'après le théorème de Prohorov trouver un sous-ensemble compact K_j de $\mathcal{W}_x$ tel que

$$P(W^{(n)}_{s_j} \notin K_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Soit maintenant $\mathcal{K}_\varepsilon$ le sous-ensemble de $C([0,T], \mathcal{W}_x)$ défini par

$$\mathcal{K}_\varepsilon = H_{A(\varepsilon)} \cap \{\xi \in C([0,T], \mathcal{W}_x),\ \forall j \ge 1,\ \xi(s_j) \in K_j\}.$$

Le théorème d'Ascoli (voir par exemple [36], chapitre XX) assure que $\mathcal{K}_\varepsilon$ est compact. De plus, par construction, $P(W^{(n)} \notin \mathcal{K}_\varepsilon) < 2\varepsilon$.

D'après le théorème de Prohorov, la suite des lois de $W^{(n)}$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence étroite sur $M_f(C([0,T],\mathcal{W}_x))$. Or la seule valeur d'adhérence possible est la loi de W, puisque nous avons déjà obtenu la convergence des lois marginales de dimension finie. Cela termine la démonstration du théorème. $\square$

Commentaires bibliographiques Le processus (W_s) a été introduit sous une forme plus générale dans [24] en vue d'applications aux superprocessus. Ses liens avec une classe d'équations aux dérivées partielles sont étudiés dans [26] et [27]. Le nom "serpent brownien" est emprunté à Dynkin et Kuznetsov [13], qui démontrent aussi une forme générale du théorème d'approximation du paragraphe 3.

Exercices

Exercice 6.1 *En utilisant le principe de réflexion pour le mouvement brownien linéaire, vérifier que les mesures de probabilité* $\theta_s^\zeta(dadb)$ *sont données par*

$$\begin{aligned}\theta_s^\zeta(dadb) &= \frac{2(\zeta+b-2a)}{(2\pi s^3)^{1/2}}\exp-\frac{(\zeta+b-2a)^2}{2s}\,1_{(0<a<b\wedge\zeta)}\,da\,db \\ &\quad + 2\,(2\pi s)^{-1/2}\exp-\frac{(\zeta+b)^2}{2s}\,1_{(0<b)}\delta_0(da)\,db.\end{aligned}$$

Exercice 6.2 *Soit* $w \in \mathcal{W}_x$. *Le théorème d'extension de Kolmogorov assure l'existence d'un processus de Markov* (W_s) *de noyaux de transition* Q_s, *tel que* $W_0 = w$. *On veut montrer qu'on peut construire* (W_s) *de façon que* $s \to W_s$ *soit p.s. continue.*

(1) En utilisant le lemme de Kolmogorov, traiter le cas où la fonction $t \to w(t)$ *est höldérienne d'exposant* $1/2$.

(2) Soit ensuite $w' \in \mathcal{W}_x$ *une trajectoire arrêtée höldérienne d'exposant* $1/2$ *et telle que* $\zeta_{w'} = \zeta_w$. *Soit* (W'_s) *le processus de Markov (associé aux noyaux* Q_s*) de valeur initiale* w', *qu'on peut supposer continu grâce à la question (1). Pour tout* $s \geq 0$, *soient* ζ'_s *le temps de vie de* W'_s, $I_s = \inf_{[0,s]} \zeta'_r$ *et* W_s *la trajectoire arrêtée de temps de vie* ζ'_s *définie par*

$$W_s(t) = \begin{cases} W'_s(t) + w(t) - w'(t) & \text{si } t \leq I_s, \\ W'_s(t) + w(I_s) - w'(I_s) & \text{si } t \geq I_s. \end{cases}$$

Montrer que le processus (W_s) *répond au problème posé.*

Exercice 6.3 *Montrer que les noyaux* Q_s *possédent la propriété de Feller : si* F *est une fonction continue bornée sur* $\mathcal{W}_x$ *et* $s > 0$, *la fonction* $w \to Q_sF(w)$ *est aussi continue sur* $\mathcal{W}_x$. *La propriété de Feller entraîne le caractère fortement markovien du processus* (W_s).

Chapter 7

Une Autre Construction du Super-Mouvement Brownien

Notre but dans ce chapitre est d'utiliser le serpent brownien introduit dans le chapitre précédent pour développer une nouvelle approche du super-mouvement brownien, dans le cas où la valeur initiale du processus est une mesure de Dirac (cette restriction sera levée plus tard). L'idée est que les valeurs prises par le serpent brownien, qui sont des trajectoires arrêtées dans $\mathbb{R}^d$, peuvent être interprétées comme les trajectoires individuelles des "particules" d'un super-mouvement brownien. Cette nouvelle approche, qui repose sur la correspondance arbre-excursion du chapitre 1 et sur les résultats d'approximation des temps locaux du chapitre 3, présente plusieurs avantages sur la méthode utilisée dans le chapitre 4. Elle permet en particulier de donner un sens aux trajectoires "individuelles" du super-mouvement brownien, et ainsi de construire le "processus historique" qui joue un rôle crucial dans beaucoup d'applications. Elle conduit aussi très facilement à la continuité presque sûre du super-mouvement brownien. Enfin, nous complétons dans ce chapitre certains résultats du chapitre 5, et nous calculons en particulier la dimension de Hausdorff du support du super-mouvement brownien pris à un temps fixe.

7.1 Préliminaires

7.1.1 Retour sur le processus de branchement brownien

Comme dans le chapitre précédent, nous fixons un point x dans $\mathbb{R}^d$. Nous commençons par rappeler les données intervenant dans la construction d'un processus de branchement brownien issu de $2^n\delta_x$, où $n \in \mathbb{N}$, de durée de vie 2^{-n} et de loi de reproduction la loi géométrique critique. Comme dans le chapitre 4, on se donne sur un espace de probabilité

– 2^n arbres aléatoires indépendants $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{2^n}$ de loi $\Pi(d\mathcal{A})$, la loi de l'arbre de Galton-Watson de loi de reproduction la loi géométrique de paramètre 1/2;

– une famille $(B^{j,u}, j \in \{1, \ldots, 2^n\}, u \in U\}$ de mouvements browniens dans $\mathbb{R}^d$ issus de 0, indépendants entre eux et aussi indépendants des arbres aléatoires $\mathcal{A}_j$.

Ensuite, si $u \in \mathcal{A}_j$, $u = u_1 \ldots u_p$, on pose comme dans le paragraphe 6.1.2

$$\begin{aligned} V^{j,u}(t) &= x + \sum_{k=0}^{i-1} B^{j,u_1\ldots u_k}_{2^{-n}} + B^{j,u_1\ldots u_i}_{t-i2^{-n}} && \text{si } i2^{-n} \le t \le (i+1)2^{-n},\ 0 \le i \le p-1 \\ V^{j,u}(t) &= V^{j,u}(p2^{-n}) && \text{si } t \ge p2^{-n}. \end{aligned}$$

et on interprète $V^{j,u}$ comme un élément de $\mathcal{W}_x^{2^{-n}}$, de temps de vie $|u|2^{-n}$. La trajectoire $V^{j,u}$ est la trajectoire historique associée au descendant de la j-ième particule ancêtre qui correspond à l'arête $u \in \mathcal{A}_j$.

Notre objectif est de vérifier que la famille de ces trajectoires historiques

$$\{V^{j,u}, j \in \{1, \ldots, 2^n\}, u \in \mathcal{A}_j\}$$

converge en loi, en un certain sens, quand $n \to \infty$ vers la famille

$$\{W_s, 0 \le s \le \tau_2\},$$

où W est un serpent brownien issu de $\underline{x}$, et $\tau_2 = \inf\{s \ge 0, L_s^0(\zeta) > 2\}$, $(L_s^0(\zeta))$ désignant le temps local en 0 du processus (ζ_s) des temps de vie de W.

Nous introduisons alors les notations suivantes. Pour tout $t \in 2^{-n}\mathbb{N}$, on définit une mesure aléatoire Y_t^n, respectivement X_t^n, sur $\mathcal{W}_x^{2^{-n}}$, resp. sur $\mathbb{R}^d$, par les formules

$$Y_t^n = 2^{-n} \sum_{j=1}^{2^n} \sum_{u \in \mathcal{A}_j, |u| = 2^n t} \delta_{V^{j,u}}, \tag{7.1}$$

$$X_t^n = 2^{-n} \sum_{j=1}^{2^n} \sum_{u \in \mathcal{A}_j, |u| = 2^n t} \delta_{V^{j,u}(t)} \tag{7.2}$$

Evidemment, X_t^n est la mesure image de Y_t^n par l'application $w \to w(t)$. De plus, on peut écrire

$$X_t^n = 2^{-n} Z^n_{2^n t},$$

où le processus $(Z_k^n, k \in \mathbb{N})$ est un processus de branchement brownien issu de $2^n \delta_x$, de durée de vie 2^{-n} (et de loi de reproduction géométrique critique). D'après le théorème 4.2, on a donc en notant $[t]_n = 2^{-n}[2^n t]$

$$(X^n_{[t]_n}, t \ge 0) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} (X_t, t \ge 0),$$

où le processus limite est un super-mouvement brownien issu de δ_x. Nous allons établir la convergence analogue lorsque X^n est remplacé par Y^n. Observons que, si la mesure X_t^n donne les positions des particules à l'instant t, la mesure Y_t^n fournit plus d'informations puisqu'elle donne les trajectoires suivies par ces mêmes particules entre les instants 0 et t.

7.1.2 Lien avec le serpent brownien

Considérons maintenant les approximations $W^{(n)}$ du serpent brownien définies dans le paragraphe 6.3. Rappelons que $\zeta^{(n)}$, le processus des temps de vie de $W^{(n)}$ est l'interpolation affine par morceaux d'une marche aléatoire simple sur $2^{-n}\mathbb{N}$ indexée par $s \in 2^{-2n}\mathbb{N}$. Pour tous $t \in 2^{-n}\mathbb{N}$, $s \geq 0$, on pose

$$l_s^{t,n} = 2^{-n}\mathrm{Card}\,\{r \in [0,s] \cap 2^{-2n}\mathbb{N}, \zeta_r^{(n)} = t, \zeta_{r+2^{-2n}}^{(n)} = t + 2^{-n}\},$$

qui représente le nombre de montées de $\zeta^{(n)}$ de t à $t + 2^{-n}$ sur l'intervalle $[0, s]$. On considère aussi la mesure associée $l^{t,n}(ds)$:

$$l^{t,n}(ds) = 2^{-n} \sum_{r \in 2^{-2n}\mathbb{N}} 1_{\{\zeta_r^{(n)} = t, \zeta_{r+2^{-2n}}^{(n)} = t+2^{-n}\}}\, \delta_r(ds).$$

Soit ensuite

$$\tau^{(n)} = \inf\{s \geq 0, l_s^{0,n} > 1\},$$

qui représente l'instant du 2^n-ième retour en 0 pour la chaîne de Markov $(\zeta_s^{(n)}, s \in 2^{-2n}\mathbb{N})$ (ou de manière équivalente, le 2^n-ième retour en $\underline{x}$ pour $W^{(n)}$). Pour tout $t \in 2^{-n}\mathbb{N}$, soit

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_t^n &= \int_{[0,\tau^{(n)}[} l^{t,n}(ds)\, \delta_{W_s^{(n)}} \qquad (7.3) \\ &= 2^{-n} \sum_{s \in [0,\tau^{(n)}[\cap 2^{-2n}\mathbb{N}} 1_{\{\zeta_s^{(n)} = t, \zeta_{s+2^{-2n}}^{(n)} = t+2^{-n}\}}\, \delta_{W_s^{(n)}} \end{aligned}$$

Proposition 7.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les deux processus $(Y_t^n, t \in 2^{-n}\mathbb{N})$ et $(\mathcal{Y}_t^n, t \in 2^{-n}\mathbb{N})$ ont même loi.*

Preuve. Pour $t = 0$, il est trivial que $Y_0^n = \mathcal{Y}_0^n = \delta_{\underline{x}}$. Pour $t > 0$, on peut écrire

$$\mathcal{Y}_t^n = \sum_{j=1}^{2^n} \mathcal{Y}_t^{n,j},$$

où $\mathcal{Y}_t^{n,j}$ représente la contribution de la j-ième excursion de $\zeta^{(n)}$ en dehors de 0, ou de $W^{(n)}$ en dehors de $\underline{x}$. La propriété de Markov forte de la chaîne de Markov

$(W_s^{(n)}, s \in 2^{-n}\mathbb{N})$ montre que ces excursions sont indépendantes et de même loi. Donc les processus $\mathcal{Y}^{n,j}$ sont aussi indépendants et de même loi. D'autre part, la formule (7.1) montre aussi que

$$Y_t^n = \sum_{j=1}^{2^n} Y_t^{n,j},$$

où les processus $Y^{n,j}$ sont indépendants et de même loi. Il suffit donc de vérifier que $(\mathcal{Y}_t^{n,1}, t \in 2^{-n}\mathbb{N})$ et $(Y_t^{n,1}, t \in 2^{-n}\mathbb{N})$ ont même loi. Or cela découle de la proposition 6.1 et de la remarque (ii) suivant cette proposition. □

7.2 Le résultat principal

Rappelons que $(W_s, s \geq 0)$ désigne le serpent brownien construit dans le théorème 6.2 (avec valeur initiale $W_0 = \underline{x}$), et que ζ_s est le temps de vie de W_s. Puisque le processus $(\zeta_s, s \geq 0)$ est un mouvement brownien réfléchi, on peut considérer la famille $(L_s^a(\zeta), a \geq 0, s \geq 0)$ de ses temps locaux (voir le paragraphe 3.4). Pour tout $\alpha \geq 0$, on note

$$\tau_\alpha = \inf\{s \geq 0, L_s^0(\zeta) > \alpha\}.$$

Rappelons enfin la notation $[t]_n = 2^{-n}[2^n t]$.

Théorème 7.2 *Quand $n \to \infty$, les processus*

$$(Y^n_{[t]_n}, t \geq 0)$$

convergent, au sens de la convergence des lois marginales de dimension finie, vers le processus $(Y_t, t \geq 0)$ défini par

$$Y_t = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_2} dL_s^t(\zeta)\, \delta_{W_s}. \tag{7.4}$$

En particulier, le processus $(X_t, t \geq 0)$ défini par

$$X_t = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_2} dL_s^t(\zeta)\, \delta_{W_s(t)} \tag{7.5}$$

est un super-mouvement brownien issu de δ_x, avec constante $\sigma^2 = 2$.

Remarque. La notation $dL_s^t(\zeta)$ signifie qu'on intègre par rapport à la fonction croissante $s \longrightarrow L_s^t(\zeta)$. La formule (7.4) signifie que, pour toute fonction Φ mesurable positive sur $\mathcal{W}_x$,

$$< Y_t, \Phi >= \frac{1}{2} \int_0^{\tau_2} dL_s^t(\zeta)\, \Phi(W_s).$$

Discutons brièvement la signification intuitive du théorème. Comme nous l'avons déjà indiqué, les trajectoires $(W_s, s \in [0,\tau_2])$ correspondent aux trajectoires des particules du super-mouvement brownien X. Chaque trajectoire W_s correspond à la trajectoire historique d'une particule en vie à l'instant ζ_s. Puisque la mesure $dL_s^t(\zeta)$ est portée par $\{s, \zeta_s = t\}$ (voir le chapitre 2), la formule (7.5) traduit le fait que la mesure X_t est portée par l'ensemble

$$\{W_s(t), 0 \leq s \leq \tau_2, \zeta_s = t\}$$

c'est-à-dire par les positions des particules en vie à l'instant t. La mesure Y_t est la mesure correspondant à X_t sur les trajectoires suivies par ces mêmes particules. Le processus $(Y_t, t \geq 0)$ est souvent appelé le processus historique associé au super-mouvement brownien $(X_t, t \geq 0)$.

Pour $t = 0$, la mesure $dL_s^0(\zeta)$ est portée par $\{s, \zeta_s = 0\} = \{s, W_s = \underline{x}\}$. On a donc

$$Y_0 = \frac{1}{2}\int_0^{\tau_2} dL_s^0(\zeta)\, \delta_{\underline{x}} = \frac{1}{2}\, L_{\tau_2}^0(\zeta)\, \delta_{\underline{x}} = \delta_{\underline{x}},$$

et de même $X_0 = \delta_x$.

Observons aussi que la masse totale de X_t, ou de Y_t, est

$$< X_t, 1 >= \frac{1}{2}\, L_{\tau_2}^t(\zeta). \tag{7.6}$$

Comme nous l'avons remarqué dans le chapitre 4, le processus $(< X_t, 1 >, t \geq 0)$ doit être une diffusion de Feller de paramètre $\sigma^2 = 2$, issue de 1. D'autre part, le théorème de Ray-Knight du chapitre 3 nous apprend que le processus $(L_{\tau_2}^t(\zeta), t \geq 0)$ est une diffusion de Feller de paramètre 4, issue de 2. L'égalité (7.6) est donc cohérente avec les résultats des chapitres précédents.

Preuve. D'après la proposition 7.1 on peut remplacer le processus Y^n par $\mathcal{Y}^n$. Après ce remplacement, le théorème devient une conséquence assez directe de la formule (7.3) et des deux convergences en loi

$$l^{[t]_n,n}(ds) \longrightarrow \frac{1}{2} dL_s^t(\zeta)$$
$$W^{(n)} \longrightarrow W$$

dont la première a été obtenue, sous une forme légèrement différente, dans le chapitre 3, et la seconde est le théorème 6.4. Fixons $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_p$, de sorte que nous devons montrer

$$(\mathcal{Y}^n_{[t_1]_n}, \ldots, \mathcal{Y}^n_{[t_p]_n}) \xrightarrow{\text{(loi)}} (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_p}).$$

D'après les résultats du chapitre 3 (la proposition 3.1 et le théorème 3.2) si $\bar{\zeta}$ désigne un mouvement brownien réfléchi issu de 0, on peut pour chaque n construire une marche aléatoire plongée $\bar{\zeta}^{(n)}$ ayant même loi que $\zeta^{(n)}$, et des processus $\bar{l}_s^{t,n}$, $t \in 2^{-n}\mathbb{N}$, $s \geq 0$, associés à $\bar{\zeta}^{(n)}$ comme $l_s^{t,n}$ est associé à $\zeta^{(n)}$, de façon que

$$(\bar{\zeta}_s^{(n)}, \bar{l}_s^{[t_1]_n,n}, \ldots, \bar{l}_s^{[t_p]_n,n}) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} (\bar{\zeta}_s, \frac{1}{2}L_s^{t_1}(\bar{\zeta}), \ldots, \frac{1}{2}L_s^{t_p}(\bar{\zeta})),$$

au sens de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}_+$. Cela entraîne aussi

$$(\bar{\zeta}^{(n)}, \bar{l}^{[t_1]_n,n}(ds), \ldots, \bar{l}^{[t_p]_n,n}(ds)) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} (\bar{\zeta}, \frac{1}{2}dL_s^{t_1}(\bar{\zeta}), \ldots, \frac{1}{2}dL_s^{t_p}(\bar{\zeta})),$$

la convergence des mesures étant au sens de la convergence vague des mesures de Radon. Il en découle que

$$(\zeta^{(n)}, l^{[t_1]_n,n}(ds), \ldots, l^{[t_p]_n,n}(ds)) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} (\zeta, \frac{1}{2}dL_s^{t_1}(\zeta), \ldots, \frac{1}{2}dL_s^{t_p}(\zeta)).$$

D'après le théorème 6.4, on a aussi

$$(W_s^{(n)}, s \geq 0) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} (W_s, s \geq 0),$$

au sens de la convergence des lois des processus sur l'espace $C(\mathbb{R}_+, \mathcal{W}_x)$. Des arguments standards de compacité permettent de combiner les deux convergences précédentes pour obtenir

$$(W^{(n)}, \zeta^{(n)}, l^{[t_1]_n,n}(ds), \ldots, l^{[t_p]_n,n}(ds)) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} (W, \zeta, \frac{1}{2}dL_s^{t_1}(\zeta), \ldots, \frac{1}{2}dL_s^{t_p}(\zeta)).$$

Utilisons maintenant le théorème de représentation de Skorokhod pour remplacer la convergence en loi précédente par une convergence p.s., ce qui exige de remplacer chaque vecteur $(W^{(n)}, \zeta^{(n)}, \ldots)$, resp. $(W, \zeta, \ldots)$, par un vecteur $(\tilde{W}^{(n)}, \tilde{\zeta}^{(n)}, \ldots)$, resp. $(\tilde{W}, \tilde{\zeta}, \ldots)$, ayant même loi. Pour alléger les notations, nous oublierons les "tilde" dans ce qui suit. Puisque $t_1 = 0$, la convergence p.s. de $l^{0,n}(ds)$ vers $\frac{1}{2}dL_s^0$ entraîne facilement que

$$\tau^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \tau_2.$$

Il en découle que

$$1_{[0,\tau^{(n)}[}(s)\, l^{[t_j]_n,n}(ds) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \frac{1}{2}1_{[0,\tau_2[}(s)\, dL_s^{t_j},$$

au sens de la convergence étroite des mesures finies.

Soit maintenant Φ une fonction lipschitzienne bornée sur $\mathcal{W}_x$. Puisque $\Phi(W_s^{(n)})$ converge vers $\Phi(W_s)$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+$, les remarques précédentes montrent que

$$\int_{[0,\tau^{(n)}[} l^{[t_j]_n,n}(ds)\, \Phi(W_s^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \frac{1}{2}\int_0^{\tau_2} dL_s^{t_j}\, \Phi(W_s),$$

c'est-à-dire $\mathcal{Y}^n_{[t_j]_n}$ converge p.s. vers Y_{t_j}. On obtient ainsi la première assertion du théorème (on trouve apparemment mieux puisqu'on a une convergence p.s., mais il faut se rappeler qu'on a remplacé les processus par des processus ayant la même loi).

Pour obtenir la deuxième assertion, remarquons que, par continuité de l'application $w \to w(t)$, la convergence de $(Y^n_{[t]_n}, t \geq 0)$ vers $(Y_t, t \geq 0)$ entraîne a fortiori la convergence de $(X^n_{[t]_n}, t \geq 0)$ vers $(X_t, t \geq 0)$. Or le théorème 4.2 montre que $(X^n_{[t]_n}, t \geq 0)$ converge en loi (au sens des marginales de dimension finie) vers le super-mouvement brownien issu de δ_x avec constante $\sigma^2 = 2$. $\square$

Corollaire 7.3 *Soit $(X_t, t \geq 0)$ un super-mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ issu de δ_x. Le processus (X_t) a une version continue.*

Preuve. La propriété d'avoir une version continue ne dépend que de la loi du processus. On peut donc supposer que X est donné par la construction du théorème 7.2 (cela fixe la valeur de la constante $\sigma^2 = 2$, mais on se ramène aussi facilement à ce cas par une homothétie de la variable de temps). Soit alors Φ une fonction continue bornée sur $\mathcal{W}_x$. La continuité de l'application $(a, s) \to L^a_s(\zeta)$ (chapitre 2) entraîne que p.s. pour tout intervalle $[0, T]$, $T > 0$, l'application

$$a \longrightarrow 1_{[0,T]}(s)\, d_s L^a_s(\zeta)$$

est continue au sens de la convergence étroite des mesures finies (utiliser par exemple les fonctions de répartition). Donc l'application

$$a \longrightarrow \int_0^{\tau_2} d_s L^a_s(\zeta)\, \Phi(W_s)$$

est aussi continue. Cela donne la continuité du processus (Y_t) du théorème 7.2 donc aussi celle de (X_t). $\square$

Remarque. En modifiant un peu l'énoncé du théorème 7.2 (en remplaçant τ_2 par $\tau_{2\lambda}$), ou en utilisant un changement d'échelle, on voit aussi que, pour tout $\lambda \geq 0$ le super-mouvement brownien issu de $\lambda\, \delta_x$ a une version continue. Cela laisse ouvert le cas où la valeur initiale du processus est une mesure μ générale. Ce cas découlera en fait du cas particulier que nous avons traité une fois que nous aurons établi la décomposition de Lévy-Khintchine du super-mouvement brownien.

7.3 Quelques applications

Dans cette partie, nous supposons que (X_t) est un super-mouvement brownien issu de δ_x, qu'on peut sans perte de généralité supposer construit par la formule du théorème 7.2. Les résultats qui suivent seraient aussi bien valables pour le super-mouvement brownien issu de $\lambda\,\delta_x$, $\lambda > 0$ (il suffit de remplacer τ_2 par $\tau_{2\lambda}$ dans la formule du théorème 7.2). Ils pourront aussi être étendus au cas d'une valeur initiale μ générale grâce aux résultats du chapitre suivant.

Proposition 7.4 *P.s., pour tout $t > 0$, $\operatorname{supp} X_t$ est un sous-ensemble compact (éventuellement vide) de $\mathbb{R}^d$. De plus, pour tout $t > 0$,*

$$\dim \operatorname{supp} X_t = 2 \wedge d \quad \textit{p.s. sur } \{X_t \neq 0\}.$$

Preuve. La représentation

$$X_t = \frac{1}{2}\int_0^{\tau_2} dL_s^t(\zeta)\,\delta_{W_s(t)}$$

entraîne que p.s. pour tout $t > 0$

$$\operatorname{supp} X_t \subset \{W_s(t),\, 0 \leq s \leq \tau_2,\, \zeta_s = t\}. \tag{7.7}$$

L'ensemble de droite est fermé et est pour tout t contenu dans l'ensemble compact $\{W_s(\zeta_s),\, 0 \leq s \leq \tau_2\}$ (remarquer que l'application $s \to W_s(\zeta_s)$ est continue).

Le cas $d = 1$ de la deuxième assertion découle du théorème 5.3 (un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive a une dimension de Hausdorff égale à d). Dans le cas $d \geq 2$, le théorème 5.4 nous donne déjà la minoration

$$\dim \operatorname{supp} X_t \geq 2 \quad \text{p.s. sur } \{X_t \neq 0\}.$$

Pour obtenir l'autre inégalité, rappelons que l'application $s \to W_s$ est p.s. localement höldérienne d'exposant $\frac{1}{4} - \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$ (théorème 6.2). Comme il est facile de voir que

$$|W_s(\zeta_s) - W_{s'}(\zeta_{s'})| \leq d(W_s, W_{s'}),$$

la même propriété est satisfaite par l'application $s \to W_s(\zeta_s)$. D'autre part, d'après une extension facile du théorème 3.6, pour tout $t > 0$,

$$\dim \{s \in [0, \tau_2],\, \zeta_s = t\} \leq \frac{1}{2}.$$

Or, il est très facile de voir que l'image par une application höldérienne d'exposant α d'un ensemble de dimension δ est au plus de dimension δ/α. On obtient ici que p.s.

$$\dim \{W_s(\zeta_s),\, 0 \leq s \leq \tau_2,\, \zeta_s = t\} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)^{-1}.$$

Puisque ε peut être pris arbitrairement petit, cette inégalité combinée avec (7.7) termine la preuve de la proposition. $\square$

Remarques. (i) La proposition 7.7 laisse ouvert le problème de savoir si $\mathrm{supp}\, X_t$ est de mesure de Lebesgue strictement positive lorsque $d = 2$ (sur l'ensemble $\{X_t \neq 0\}$). La réponse est non et découle des résultats très précis de Perkins [33] sur la mesure de Hausdorff de $\mathrm{supp}\, X_t$. Le même article de Perkins montre aussi que l'égalité

$$\dim \mathrm{supp}\, X_t = 2 \wedge d \quad \text{sur } \{X_t \neq 0\}$$

est vraie pour tout $t > 0$ en dehors d'un seul ensemble de probabilité nulle.

(ii) D'après la proposition 2.6, pour tout $t > 0$ fixé, p.s, le support de la mesure $d_s L_s^t(\zeta)$ est exactement l'ensemble $\{s \geq 0, \zeta_s = t\}$. Il en découle aussitôt que l'inclusion (7.7) est une égalité p.s. pour tout $t > 0$ (fixé). Ici en revanche il n'est pas possible d'intervertir p.s. et pour tout $t > 0$ (l'argument est le même que dans l'exercice 2.1).

L'ensemble des points visités par le super-mouvement brownien ("range" en anglais) est par définition

$$\mathcal{R} = \overline{\bigcup_{t>0} \mathrm{supp}\, X_t}.$$

Proposition 7.5 *L'ensemble $\mathcal{R}$ est p.s. compact et connexe. De plus,*

$$\dim \mathcal{R} = 4 \wedge d, \quad \text{p.s.}$$

Preuve. Nous commençons par établir que p.s.

$$\mathcal{R} = \{W_s(\zeta_s),\, 0 \leq \zeta_s \leq \tau_2\}. \tag{7.8}$$

L'ensemble de droite étant fermé (même compact), l'inclusion $\mathcal{R} \subset \{W_s(\zeta_s), 0 \leq \zeta_s \leq \tau_2\}$ découle de la formule (7.7) qui est vraie pour tout $t > 0$ en dehors d'un seul ensemble de probabilité nulle. Pour obtenir l'inclusion inverse, rappelons que l'inclusion (7.7) est en fait une égalité p.s. pour tout $t > 0$ fixé. Il en découle que, p.s.

$$\mathcal{R} \supset \{W_s(\zeta_s),\, 0 \leq \zeta_s \leq \tau_2,\, \zeta_s \in \mathbb{Q}, \zeta_s > 0\}.$$

Cependant, l'ensemble de droite est dense dans $\{W_s(\zeta_s), 0 \leq \zeta_s \leq \tau_2\}$. En effet, p.s. pour tout $s \in [0, \tau_2]$ on peut trouver $s' \in [0, \tau_2]$ aussi proche de s qu'on le souhaite et tel que $\zeta_{s'} \in \mathbb{Q}$, $\zeta_{s'} > 0$ (parce que la fonction $s \to \zeta_s$ n'est constante sur aucun intervalle). On a ainsi démontré la formule (7.8).

Cette représentation de $\mathcal{R}$ montre aussitôt que $\mathcal{R}$ est compact et connexe (comme image d'un compact connexe par une application continue).

Il reste à calculer la valeur de $\dim \mathcal{R}$. L'identité (7.8) et le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 7.4 montrent que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\dim \mathcal{R} \leq \left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)^{-1}.$$

On obtient ainsi l'inégalité $\dim \mathcal{R} \leq 4 \wedge d$.

Il reste à obtenir l'inégalité inverse. La méthode est semblable à celle de la preuve du théorème 5.4, l'idée étant d'utiliser une mesure portée par $\mathcal{R}$ à laquelle on applique le lemme de Frostman. On commence par traiter le cas $d \geq 4$ et on pose $\Gamma = \int_0^\infty dt\, X_t$ qui est une mesure non triviale (parce que $< X_0, 1 >= 1$ et par continuité de $t \to X_t$), finie (parce que $X_t = 0$ pour tout t assez grand, p.s.) portée par $\mathcal{R}$. Nous calculons ensuite l'intensité de la mesure aléatoire $\Gamma \otimes \Gamma$. Comme dans le chapitre 5, cela revient à calculer, pour deux fonctions φ, ψ mesurables positives sur $\mathbb{R}^d$,

$$E(< \Gamma, \varphi >< \Gamma, \psi >) = \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt'\, E(< X_t, \varphi >< X_{t'}, \psi >).$$

Supposons $t \leq t'$. Alors la propriété de Markov de X en t et la proposition 5.1 permettent de calculer

$$\begin{aligned} E(< X_t, \varphi >< X_{t'}, \psi >) &= E(< X_t, \varphi >< X_t, Q_{t'-t}\psi >) \\ &= Q_t\varphi(x) Q_{t'}\psi(x) + \sigma^2 \iint dy\, dy'\, \varphi(y) Q_{t'-t}\psi(y')\, H_x^t(y, y'), \end{aligned}$$

avec la notation

$$H_x^t(y, y') = \int_0^t dr \int dz\, q_r(z - x)\, q_{t-r}(y - z)\, q_{t-r}(y' - z).$$

En utilisant les relations de Chapman-Kolmogorov, on obtient aussi

$$\begin{aligned} &\iint dy\, dy'\, \varphi(y) Q_{t'-t}\psi(y')\, H_x^t(y, y') \\ &= \iint dy\, dy'\, \varphi(y)\, \psi(y') \int_0^t dr \int dz\, q_r(z - x)\, q_{t-r}(y - z)\, q_{t'-r}(y' - z). \end{aligned}$$

Finalement, dans les deux cas $t \leq t'$ et $t' \leq t$, on a

$$\begin{aligned} &E(< X_t, \varphi >< X_{t'}, \psi >) = Q_t\varphi(x) Q_{t'}\psi(x) \\ &+\sigma^2 \iint dy\, dy'\, \varphi(y)\, \psi(y') \int_0^{t \wedge t'} dr \int dz\, q_r(z - x)\, q_{t-r}(y - z)\, q_{t'-r}(y' - z). \end{aligned}$$

On intègre maintenant cette dernière égalité par rapport à la mesure $dt\, dt'$. En notant

$$G(y) = \int_0^\infty dt\, q_t(y) = c_d\, |y|^{2-d} \quad (c_d > 0),$$

on trouve

$$\begin{aligned} &E(< \Gamma, \varphi >< \Gamma, \psi >) \\ &= \iint dy dy'\, \varphi(y)\psi(y') \Big(G(y - x)G(y' - x) + \sigma^2 \int dz\, G(z - x)G(y - z)G(y' - z) \Big). \end{aligned}$$

A l'aide des arguments de classe monotone expliqués dans le chapitre 5, cette formule donne aussi, pour toute fonction f mesurable positive sur $(\mathbb{R}^d)^2$,

$$\begin{aligned}&E(\iint \Gamma(dy)\Gamma(dy')f(y,y'))\\&= \iint dydy'\, f(y,y') \left(G(y-x)G(y'-x) + \sigma^2\!\int dz\, G(z-x)G(y-z)G(y'-z)\right).\end{aligned}$$

Notons $B(x,\delta)$ la boule ouverte de centre x et de rayon δ. Des calculs élémentaires montrent que pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $C_d(\delta)$ telle que, pour tous $y, y' \in \mathbb{R}^d \backslash B(x,\delta)$,

$$\int dz\, G(z-x)\, G(y-z)\, G(y'-z) \leq \begin{cases} C_d(\delta)\Big(1 + \log_+(1/|y-y'|)\Big) & \text{si } d = 4, \\ C_d(\delta)\Big(1 + |y-y'|^{4-d}\Big) & \text{si } d \geq 5. \end{cases}$$

Considérons ensuite, pour $0 < \delta < K$, la mesure $\Gamma_{\delta,K}$ qui est la restriction de Γ à l'ensemble $B(x,K)\backslash B(x,\delta)$. On a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}&E\left(\iint \Gamma_{\delta,K}(dy\, \Gamma_{\delta,K}(dy')\, |y-y'|^{\varepsilon-4}\right)\\&= \iint_{(B(x,K)\backslash B(x,\delta))^2} dy\, dy'\, |y-y'|^{\varepsilon-4}\\&\quad \times \left(G(y-x)G(y'-x) + \sigma^2 \int dz\, G(z-x)G(y-z)G(y'-z)\right)\\&< \infty\end{aligned}$$

d'après les majorations précédentes. On peut donc appliquer le lemme de Frostman (lemme 5.5) à la mesure $\Gamma_{\delta,K}$. On trouve que $\dim \mathcal{R} \geq 4$ p.s. sur l'ensemble $\{\Gamma_{\delta,K} \neq 0\}$. Or p.s. pour δ assez petit et K assez grand, la mesure $\Gamma_{\delta,K}$ devient non triviale puisque Γ l'est et $\Gamma(\{x\}) = 0$ p.s. (parce que $E(\Gamma(\{x\})) = 0$).

Le traitement du cas $d \leq 3$ est semblable. Pour éviter les problèmes d'intégrabilité, il est préférable de prendre

$$\Gamma = \int_0^1 dt\, X_t$$

et les calculs précédents doivent être légèrement modifiés en conséquence. $\square$

Remarque. En s'inspirant de la preuve du théorème 5.3, on peut aussi montrer que Γ est p.s. absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue lorsque $d \leq 3$. En particulier, la mesure de Lebesgue de $\mathcal{R}$ est alors p.s. strictement positive.

Nous terminons ce paragraphe par une proposition qui précise le comportement de X_t juste avant l'instant d'extinction de la population. On pose

$$T = \inf\{t \geq 0, X_t = 0\}.$$

Remarquons que T est bien l'instant d'extinction, c'est-à-dire qu'on a aussi $T = \sup\{t \geq 0, X_t \neq 0\}$. Pour le voir, il suffit d'appliquer la propriété de Markov forte à la diffusion de Feller $< X_t, 1 >$, à l'instant T. La propriété de Markov forte de la diffusion de Feller découle du caractère fellérien de ses noyaux de transition, qu'on vérifie facilement sur les transformées de Laplace données dans le chapitre 1 (en remarquant aussi que les fonctions $u \to \sum \alpha_i \exp -\lambda_i u$ sont denses dans $(C_0(\mathbb{R}_+), \| \|_\infty)$).

Proposition 7.6 *Il existe une variable aléatoire U à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que p.s.*

$$\lim_{t \uparrow T, t < T} \frac{X_t}{< X_t, 1 >} = \delta_U,$$

la convergence ayant lieu au sens de la convergence étroite des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$.

La proposition signifie que juste avant l'instant T la mesure X_t se concentre près d'un point qui est le point d'extinction de la population. Des résultats beaucoup plus précis sont obtenus dans l'exercice 7.2.

Preuve. On peut supposer que X est construit par la formule du théorème 7.2. Il est alors facile de voir que $T = M$, où

$$M = \sup_{s \in [0, \tau_2]} \zeta_s.$$

En effet, les propriétés des temps locaux browniens vues au chapitre 2 entraînent facilement que p.s. pour tout rationnel $r \in [0, M[$, on a $< X_r, 1 >= L^r_{\tau_2}(\zeta) > 0$. D'autre part, on a évidemment $L^t_{\tau_2}(\zeta) = 0$ pour tout $t > M$, p.s.

Soit alors η l'unique instant de $[0, \tau_2]$ tel que $\zeta_\eta = M = T$. L'unicité de η découle du fait que les maxima locaux du mouvement brownien sont distincts. Alors, les ensembles compacts

$$\{s \in [0, \tau_2], \zeta_s \geq t\}$$

décroissent quand $t \uparrow T$ vers le singleton $\{\eta\}$. En utilisant la continuité de l'application $s \to \hat{W}_s = W_s(\zeta_s)$ et l'inclusion (7.7), on obtient que p.s. pour tout $\delta > 0$ on peut choisir $\varepsilon > 0$ assez petit de façon que pour tout $t \in [T - \varepsilon, T[$,

$$\operatorname{supp} X_t \subset B(\hat{W}_\eta, \delta).$$

La proposition en découle, avec $U = \hat{W}_\eta$. □

Commentaires bibliographiques. La construction du super-mouvement brownien, et du processus historique associé, donnée dans le théorème 7.2 a été développée dans [23], et ensuite sous une forme plus proche du présent travail dans [24]. Voir aussi Dynkin et Kuznetsov [13] pour un théorème d'isomorphisme général reliant serpent brownien et super-mouvement brownien. Diverses applications du processus historique sont données dans [8]. Des résultats très précis concernant la mesure de Hausdorff de $\operatorname{supp} X_t$ ont été obtenus par Perkins [33] et améliorés dans [8] et [28]. Le "range" du super-mouvement brownien est étudié en détail dans [7].

Exercices

Exercice 7.1 *Montrer qu'en plus de la formule (7.8) on a aussi*

$$\mathcal{R} = \{W_s(t),\, 0 \le s \le \tau_2,\, t \ge 0\}.$$

On observera que p.s. pour tous $s' \ge s \ge 0$ *on a* $W_{s'}(t) = W_s(t)$ *pour tout* $t \in [0, \inf_{[s,s']} \zeta_r]$.

Exercice 7.2 *On utilisera le résultat suivant, qui est une conséquence d'un théorème de Ray-Knight voisin de celui du chapitre 3. Si* $(B_t, t \ge 0)$ *est un mouvement brownien réel, on a p.s. pour tout* $t \ge 0$,

– *ou bien* t *est un instant de croissance de la fonction* $r \to L_r^{B_t}$ *(ce qui veut dire que, pour tout* $\varepsilon > 0$, $L_{t-\varepsilon}^{B_t} < L_{t+\varepsilon}^{B_t}$*).*

– *ou bien* t *est un instant d'extremum local de la fonction* $r \to B_r$.

On rappelle aussi que les extrema locaux de B *sont distincts.*

(i) Soient D *l'ensemble (dénombrable) des maxima locaux de la fonction* $s \to \zeta_s$ *et* M *l'ensemble des temps correspondants* ($D = \{\zeta_s, s \in M\}$)*. Montrer que si le super-mouvement brownien* X *est défini comme dans le théorème 7.2, on a p.s. pour tout* $t \ge 0$,

$$\operatorname{supp} X_t = \{W_s(t),\, 0 \le s \le \tau_2,\, \zeta_s = t,\, s \notin M\}.$$

(ii) On note $\mathcal{S}_t = \operatorname{supp} X_t$ *et on munit l'espace des compacts de* $\mathbb{R}^d$ *de la distance de Hausdorff* ($d(K, K') = \sup_{y \in K} d(y, K') + \sup_{y \in K'} d(y, K)$)*. Montrer que p.s. l'application* $t \to \mathcal{S}_t$ *est càdlàg. Montrer de plus que l'ensemble des points de discontinuité de cette application est contenu dans* D*, et que si* t *est l'un de ces points de discontinuité, on a* $\mathcal{S}_t \subset \mathcal{S}_{t-}$ *et* $\operatorname{Card}\{\mathcal{S}_{t-} \backslash \mathcal{S}_t\} = 1$ *(extinction locale de la population).*

Chapter 8

Théorie des Excursions et Représentation Poissonnienne du Super-Mouvement Brownien

Le chapitre précédent nous a donné une construction d'un super-mouvement brownien X issu de δ_x en fonction des valeurs prises par un serpent brownien W sur l'intervalle de temps $[0, \tau_2]$. Dans la formule qui explicite cette construction, il est naturel de distinguer les contributions des différentes excursions en dehors de 0 du processus des temps de vie de W, ou de manière équivalente des différentes excursions de W en dehors de $\underline{x}$. L'écriture de X comme somme de ces contributions fournit une représentation poissonnienne (décomposition de Lévy-Khintchine) du super-mouvement brownien. Pour étudier précisément cette décomposition, nous développons dans ce chapitre une étude rapide de la théorie des excursions pour le mouvement brownien linéaire et pour le serpent brownien (il s'agit en fait de cas particuliers d'une théorie plus générale). Nous introduisons la mesure d'excursion du serpent brownien en dehors de $\underline{x}$ qui joue un rôle fondamental dans des développements ultérieurs. La représentation poissonnienne du super-mouvement brownien a une signification probabiliste importante puisqu'elle revient à classer les "particules" en fonction de leur ancêtre à l'instant initial. Cette décomposition s'applique au super-mouvement brownien issu d'une valeur initiale quelconque et permet ainsi d'étendre plusieurs résultats du chapitre précédent obtenus dans le cas où $X_0 = \delta_x$.

8.1 Rappels sur les mesures de Poisson

Soit $(S, \mathcal{S})$ un espace mesurable, et soit $M_p(S)$ l'espace des mesures ponctuelles sur S, i.e. des sommes finies ou dénombrables de mesures de Dirac (nous modifions un peu la définition du chapitre 4 en autorisant des sommes non finies). L'espace $M_p(S)$ est muni de la tribu engendrée par les applications $\nu \to \nu(A)$ pour $A \in \mathcal{S}$.

Définition. Soit μ une mesure σ-finie sur $(S, \mathcal{S})$. Une mesure de Poisson sur $(S, \mathcal{S})$ d'intensité μ est une variable aléatoire N à valeurs dans $M_p(S)$ telle que

(i) pour tout $A \in \mathcal{S}$, $N(A)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(A)$ ($N(A) = \infty$ p.s. si $\mu(A) = \infty$);

(ii) si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$ sont disjoints, les variables aléatoires $N(A_1), \dots, N(A_n)$ sont indépendantes.

Une formulation équivalente de (i) et (ii) consiste à dire que pour toute fonction f mesurable positive sur S, on a

$$E(\exp - < N, f >) = \exp - \int (1 - e^{-f(s)})\, \mu(ds) \tag{8.1}$$

Cette formule découle immédiatement de (i) et (ii) lorsque f est étagée, et on peut utiliser le théorème de convergence monotone pour le cas général. Il découle aussi de (i) et (ii) (ou de la formule (8.1)) qu'on a

$$E(< N, f >) = \int f(s)\, \mu(ds) \tag{8.2}$$

ce qui montre que μ est bien l'intensité, au sens usuel, de la mesure aléatoire N.

Il est facile de vérifier que pour toute mesure μ σ-finie sur S, il existe une mesure de Poisson d'intensité μ. Lorsque la mesure μ est finie, on construit une telle mesure de Poisson en se donnant une variable aléatoire U de loi de Poisson de paramètre $\mu(S)$, une suite de variables aléatoires $(X_i, i = 1, 2, \dots)$ de loi $\frac{\mu}{\mu(E)}$, indépendantes et indépendantes de U, et en posant

$$N = \sum_{i=1}^{U} \delta_{X_i}.$$

Lorsque μ n'est pas finie, on décompose l'espace E en une réunion disjointe de sous-ensembles mesurables E_p de μ-mesure finie, on construit des mesures de Poisson indépendantes N_p d'intensité $\mu_{|E_p}$ et on pose $N = \sum N_p$.

Définition. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, et soit $n(de)$ une mesure σ-finie sur $(E, \mathcal{E})$. Un processus ponctuel de Poisson sur E de mesure caractéristique n est une mesure de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times E$ d'intensité $dt \otimes n(de)$.

La notion de processus ponctuel de Poisson correspond donc à un cas particulier de mesure de Poisson. En particulier, si $N(dtde)$ est un processus ponctuel de Poisson sur E de mesure caractéristique n, la formule (8.1) donne

$$E\left(\exp - \iint N(dtde)\, f(t,e)\right) = \exp - \int_0^\infty dt \int n(de)\,(1 - e^{-f(t,e)}). \tag{8.3}$$

Soit $A \in \mathcal{E}$ tel que $n(A) < \infty$. Il découle facilement des définitions que le processus $N_t(A) \stackrel{\text{(def)}}{=} N([0,t] \times A)$, $t \geq 0$ est un processus de Poisson (au sens usuel) de paramètre $n(A)$.

Soit maintenant $(\mathcal{F}_t)$ une filtration sur l'espace de probabilité sous-jacent (sur lequel est défini N) qu'on suppose toujours continue à droite et complétée par les ensembles négligeables de la "grande" tribu. On dira que N est un $(\mathcal{F}_t)$-processus de Poisson ponctuel si N est un processus de Poisson ponctuel et si, pour tous $A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{E}$ tels que $n(A_j) < \infty$, le processus $(N_t(A_1), \ldots, N_t(A_p))$ est $(\mathcal{F}_t)$-adapté et à accroissements indépendants par rapport à $(\mathcal{F}_t)$.

Proposition 8.1 *Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $M_p(\mathbb{R}_+ \times E)$. Pour que N soit un $(\mathcal{F}_t)$-processus de Poisson ponctuel, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites.*

(i) *Il existe une suite (E_p) de parties mesurables de E, telles que $E = \cup E_p$ et $N([0,1] \times E_p) < \infty$ p.s.*

(ii) *$N(\{0\} \times E) = 0$ p.s. et $N(\{t\} \times E) \leq 1$, $\forall t \geq 0$, p.s.*

(iii) *Pour tous $A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{E}$ tels que $N([0,1] \times A_j) < \infty$ p.s., le processus $(N([0,t] \times A_1, \ldots, N([0,t] \times A_p))$ est $(\mathcal{F}_t)$-adapté et à accroissements indépendants et stationnaires par rapport à $\mathcal{F}_t$.*

La partie délicate de la preuve est de montrer que si N satisfait les conditions de l'énoncé alors N est un $(\mathcal{F}_t)$-processus de Poisson ponctuel. On utilise les deux ingrédients classiques suivants. D'une part, le processus de Poisson est le seul processus à accroissements indépendants stationnaires croissant qui ne croisse que par sauts de $+1$. D'autre part, p processus de Poisson par rapport à une même filtration qui sont sans discontinuité commune sont indépendants. A partir de ces deux observations, on obtient aisément que, sous les hypothèses (i),(ii),(iii), les processus $N([0,t] \times A_j)$, $j = 1, \ldots, p$ sont des processus de Poisson indépendants dès que $A_1, \ldots, A_p$ sont disjoints (la propriété (ii) assure en particulier que ces processus n'ont pas de saut commun). On en déduit facilement la formule exponentielle (8.3) dans le cas particulier où $f = \sum_{i,j} \lambda_{ij} 1_{]s_i,t_i]} 1_{A_j}$, et un argument de classe monotone permet de passer au cas général.

L'intérêt de la proposition précédente est qu'elle donne des conditions pour que N soit un processus de Poisson ponctuel, sans faire intervenir sa mesure caractéristique. Le résultat suivant montre comment obtenir ensuite des informations sur la mesure caractéristique. On suppose (ce qui est toujours vérifié dans les applications) que les atomes de la tribu $\mathcal{E}$ sont les points, de façon qu'une mesure de Dirac δ_e est associée à un unique point e.

Proposition 8.2 *Soit N un $(\mathcal{F}_t)$-processus de Poisson ponctuel de mesure caractéristique n. Soit $A \in \mathcal{E}$ tel que $0 < n(A) < \infty$, et soit*

$$T = \inf\{t \geq 0, N_t(A) = 1\} < \infty \quad \text{p.s.}$$

Soit e_T l'unique élément de E tel que

$$N(\{T\} \times B) = \delta_{e_T}(B) \quad \forall B \in \mathcal{E}.$$

Alors e_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable et pour tout $B \in \mathcal{E}$,

$$P(e_T \in B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}.$$

La proposition signifie que si l'on se donne une partie A de E telle que $0 < n(A) < \infty$, le premier atome de N qui "tombe" dans A (bien défini à cause de l'hypothèse sur A) a pour loi la restriction de la mesure caractéristique à A, normalisée pour être une probabilité.

Preuve. Par construction, $N(\{T\} \times A) = 1$ ce qui donne l'existence (et l'unicité) de e_T et montre aussi que $e_T \in A$ p.s. On a ensuite

$$\{e_T \in B\} = \{N_T(A \cap B) = 1\}$$

ce qui entraîne que la variable e_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable (remarquer que la variable $N_T(A \cap B)$ l'est parce que le processus $(N_t(A \cap B))$ est optionnel et que T est un temps d'arrêt). Enfin, si $B \subset A$ la condition $e_T \in B$ équivaut à dire que le premier temps de saut du processus de Poisson $(N_t(B))$ (de paramètre $n(B)$) est plus petit que le premier temps de saut du processus de Poisson $(N_t(A \backslash B))$ (de paramètre $n(A) - n(B)$). La formule de l'énoncé en découle puisque ces deux processus de Poisson sont indépendants et que leurs premiers temps de saut respectifs suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs $n(B)$ et $n(A) - n(B)$. $\square$

8.2 Théorie des excursions

8.2.1 Excursions du mouvement brownien

Nous considérons d'abord un mouvement brownien (réel) $(B_t, t \geq 0)$ issu de 0 et sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$ (complétée par les négligeables de $\mathcal{F}_\infty$, ce qui la rend continue à droite). Soient $(L_t^0, t \geq 0)$ le temps local en 0 de B et $(\tau_u, u \geq 0)$ l'inverse continu à droite de ce temps local (cf chapitre 2). Soit D l'ensemble dénombrable des points de discontinuité de l'application $u \to \tau_u$. Nous avons vu (Proposition 2.7) que les intervalles $]\tau_{u-}, \tau_u[$, $u \in D$ sont exactement les intervalles d'excursion de

B en dehors de 0, i.e. les composantes connexes de l'ouvert $\mathbb{R}_+ \backslash \{t, B_t = 0\}$. Pour $u \in D$ et $t \geq 0$ on pose

$$e_u(t) = B_{(\tau_{u-}+t)\wedge\tau_u}$$

et on interprète e_u comme un élément de l'espace E des fonctions continues e de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, qui sont nulles sauf sur un intervalle $]0, \sigma(e)[$, avec $\sigma(e) > 0$. Remarquons que par construction $\sigma(e_u) = \tau_u - \tau_{u-}$.

Le processus des excursions de B est la mesure ponctuelle sur $\mathbb{R}_+ \times E$ définie par

$$N = \sum_{u \in D} \delta_{(u, e_u)}.$$

Il est facile de vérifier que N est bien une variable aléatoire, l'espace $M_p(\mathbb{R}_+ \times E)$ étant muni de la tribu décrite ci-dessus.

Théorème 8.3 *N est un $(\mathcal{F}_{\tau_t})$-processus de Poisson ponctuel.*

Remarquons que le théorème fait intervenir la filtration $(\mathcal{F}_{\tau_t})$ (qui est continue à droite et contient les négligeables de $\mathcal{F}_\infty$) et non pas la filtration $(\mathcal{F}_t)$. En fait on voit immédiatement que les variables $N([0, s] \times A)$ sont mesurables par rapport à $\mathcal{F}_{\tau_s}$ et non pas par rapport à $\mathcal{F}_s$.

Preuve. Nous vérifions les propriétés (i), (ii), (iii) de la proposition 8.1. Pour la propriété (i), on prend

$$E_p = \{e \in E, \sigma(e) > 1/p\}.$$

Alors,

$$N([0, 1] \times E_p) = \text{Card}\,\{u \in [0, 1] \cap D, \tau_u - \tau_{u-} > \frac{1}{p}\}.$$

Or,

$$\frac{1}{p}\text{Card}\,\{u \in [0, 1] \cap D, \tau_u - \tau_{u-} > \frac{1}{p}\} \leq \sum_{u \in [0,1] \cap D} (\tau_u - \tau_{u-}) \leq \tau_1,$$

d'où le résultat voulu.

Par construction, $0 \notin D$, de sorte que $N(\{0\} \times E) = 0$. De plus, $N(\{t\} \times E) = 0$ ou 1 selon que $t \notin D$ ou $t \in D$, ce qui donne la propriété (ii).

Il reste à vérifier (iii). Nous observons d'abord que pour toute partie mesurable A de E, $N_t(A)$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{\tau_t}$. En effet, $N_t(A)$ est une fonction mesurable de $(B_{s\wedge\tau_t}, s \geq 0)$ qui est $\mathcal{F}_{\tau_t}$-mesurable (le calcul de $N_t(A)$ ne fait intervenir que les excursions en dehors de 0 de $(B_{s\wedge\tau_t}, s \geq 0)$). Fixons ensuite $0 \leq s \leq t$, et soient $A_1, \ldots, A_k$ k parties mesurables disjointes de E, telles que $N_1(A_j) < \infty$ p.s. Soit B' le mouvement brownien réel issu de 0, indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_s}$ défini par

$$B'_u = B_{\tau_s+u}.$$

Alors, avec des notations évidentes,

$$
\begin{aligned}
&L_u^0(B') = L_{\tau_s+u}^0(B) - s,\\
&\tau'_u = \tau_{s+u} - \tau_s,\\
&D' = \{u - s; u \in D, u > s\},\\
&e'_u = e_{s+u}, \quad u \in D'.
\end{aligned}
$$

Il en découle que

$$(N_t(A_1) - N_s(A_1), \dots, N_t(A_k) - N_s(A_k)) = (N'_{t-s}(A_1), \dots, N'_{t-s}(A_k)).$$

Le terme de droite est une fonction de B', donc indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_s}$. De plus ce terme a même loi que $(N_{t-s}(A_1), \dots, N_{t-s}(A_k))$, d'où le résultat voulu. □

La mesure caractéristique de N est notée $n(de)$ et appelée la mesure d'Itô des excursions du mouvement brownien linéaire. Remarquons que n est une mesure infinie, parce que l'intervalle $[0, \tau_1]$ contient une infinité d'excursions de B (cf chapitre 2). Puisque B et $-B$ ont même loi, on voit très facilement que $n = n_+ + n_-$, où n_+ est portée par l'ensemble E_+ des excursions positives, et n_- est l'image de n_+ par l'application $e \to -e$.

Proposition 8.4 *Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $E_\varepsilon = \{e \in E_+; \sup_{s \geq 0} e(s) > \varepsilon\}$. Alors,*

$$n_+(E_\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon}.$$

De plus, si n_ε désigne la restriction de n_+ à E_ε, la mesure de probabilité $2\varepsilon\, n_\varepsilon$ est la loi de

$$(B_{(g_{T_\varepsilon}+t)\wedge d_{T_\varepsilon}}, t \geq 0)$$

où

$$T_\varepsilon = \inf\{t, B_t > \varepsilon\},\ g_{T_\varepsilon} = \sup\{t \leq T_\varepsilon, B_t = 0\},\ d_{T_\varepsilon} = \inf\{t \geq T_\varepsilon, B_t = 0\}.$$

Preuve. Pour tout $t > 0$,

$$N_t(E_\varepsilon) = \mathrm{Card}\,\{u \in [0, t] \cap D, e_u \in E_\varepsilon\}$$

suit une loi de Poisson de paramètre $t\, n(E_\varepsilon)$. D'autre part, par construction,

$$P(N_t(E_\varepsilon) = 0) = P(\sup_{s \leq \tau_t} B_s \leq \varepsilon) = P(L_{T_\varepsilon}^0(B) > t) = \exp(-t/2\varepsilon),$$

d'après la proposition 2.8. On conclut que $n(E_\varepsilon) = (2\varepsilon)^{-1}$.

Ensuite, la proposition 2 montre que la mesure de probabilité

$$2\varepsilon\, n_\varepsilon(\cdot) = \frac{n(\cdot \cap E_\varepsilon)}{n(E_\varepsilon)}$$

est la loi de la première excursion qui "tombe" dans l'ensemble E_ε. Cette excursion n'est autre que

$$(B_{(g_{T_\varepsilon}+t)\wedge d_{T_\varepsilon}}, t \geq 0).$$

$\square$

Proposition 8.5 *Il existe $n_+(de)$ p.p. une fonction continue (même höldérienne d'exposant $\frac{1}{2}-\varepsilon$) sur $(\mathbb{R}_+)^2$, notée $(l_t^a(e), a \geq 0, t \geq 0)$, telle que, pour toute fonction φ mesurable positive sur $\mathbb{R}_+$ nulle en 0, pour tout $t \geq 0$,*

$$\int_0^t \varphi(e(s))\, ds = \int_{\mathbb{R}_+} da\, \varphi(a)\, l_t^a(e).$$

La fonction $(l_t^a(e))$ est bien sûr appelée temps local de l'excursion e. Il est clair que pour $a > 0$ fixé la fonction $t \to l_t^a$ est croissante et ne croît que sur l'ensemble $\{t \geq 0,\, e(t) = a\}$ (voir les arguments du chapitre 2).

Preuve. Comme E_+ est la réunion croissante des ensembles E_ε, il suffit de montrer que l'énoncé de la proposition 8.5 est vrai $n_\varepsilon(de)$ p.p., pour tout $\varepsilon > 0$. D'après la proposition 8.4, on peut prendre

$$e(t) = B_{(g_{T_\varepsilon}+t)\wedge d_{T_\varepsilon}}.$$

Or, d'après l'existence des temps locaux pour le mouvement brownien B, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^t \varphi(B_{(g_{T_\varepsilon}+s)\wedge d_{T_\varepsilon}})\, ds &= \int_{g_{T_\varepsilon}}^{g_{T_\varepsilon}+t} \varphi(B_{s\wedge d_{T_\varepsilon}})\, ds \\
&= \int_{g_{T_\varepsilon}}^{(g_{T_\varepsilon}+t)\wedge d_{T_\varepsilon}} \varphi(B_s)\, ds \\
&= \int da\, \varphi(a) \Big(L^a_{(g_{T_\varepsilon}+t)\wedge d_{T_\varepsilon}}(B) - L^a_{g_{T_\varepsilon}}(B) \Big),
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu avec $l_t^a(e) = L^a_{(g_{T_\varepsilon}+t)\wedge d_{T_\varepsilon}}(B) - L^a_{g_{T_\varepsilon}}(B)$. $\square$

Supposons maintenant que $\beta = (\beta_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien réfléchi issu de 0. Notons à nouveau $(\tau_s, s \geq 0)$ l'inverse continu à droite du temps local en 0 de β (cf paragraphe 3.4), D l'ensemble des points de discontinuité de $s \to \tau_s$, et pour $u \in D$,

$$e_u(t) = \beta_{(\tau_{u-}+t)\wedge\tau_u}.$$

Il découle alors facilement des résultats précédents que

$$N = \sum_{u \in D} \delta_{(u,e_u)}$$

est un processus de Poisson ponctuel de mesure caractéristique n_+. En effet, il suffit de prendre $\beta = |B|$, puis d'appliquer les résultats valables pour le mouvement brownien B, en remarquant aussi que $L^0_t(\beta) = 2\,L^0_t(B)$.

8.2.2 Excursions du serpent brownien

Nous considérons maintenant le serpent brownien $(W_s, s \geq 0)$ avec valeur initiale $W_0 = \underline{x}$ ($x \in \mathbb{R}^d$ fixé). Le processus des temps de vie associé $(\zeta_s, s \geq 0)$ est un mouvement brownien réfléchi issu de 0 et comme expliqué ci-dessus on peut considérer son processus ponctuel d'excursions en dehors de 0 noté à nouveau

$$\sum_{u \in D} \delta_{(u,e_u)},$$

D désignant comme précédemment l'ensemble des temps de discontinuité de l'inverse (τ_s) du temps local en 0 de (ζ_s). Les excursions de (ζ_s) en dehors de 0 correspondent exactement aux excursions de W en dehors de la trajectoire triviale $\underline{x}$. Pour étudier ces dernières, nous devons commencer par établir la propriété de Markov forte de W.

Proposition 8.6 *Le processus $(W_s, s \geq 0)$ est fortement markovien.*

Preuve. Notons $Q_s(w, dw')$ les noyaux de transition de W comme dans le chapitre 6. En raisonnant comme dans la preuve de la propriété de Markov forte pour les processus de Feller, on voit qu'il suffit de montrer que l'image par Q_s d'une fonction continue bornée sur $\mathcal{W}_x$ est aussi continue. Soit F une fonction continue bornée sur $\mathcal{W}_x$. Avec les notations du chapitre 6, on a pour $s > 0$ fixé

$$Q_s F(w) = \int \theta^\zeta_s(dadb) \int R_{a,b}(w, dw')\, F(w').$$

Soit (w_n) une suite d'éléments de $\mathcal{W}_x$ convergeant vers $w \in \mathcal{W}_x$, et notons ζ_n, resp. ζ, le temps de vie de w_n, resp. de w. D'après l'exercice 6.1, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\theta^{\zeta_n}_s(dadb) &= \varphi_n(a,b)\,(1_{\{a>0\}}da + \delta_0(da))\,1_{\{b\geq 0\}}db \\
\theta^{\zeta}_s(dadb) &= \varphi(a,b)\,(1_{\{a>0\}}da + \delta_0(da))\,1_{\{b\geq 0\}}db,
\end{aligned}$$

et grâce à l'expression explicite des fonctions φ_n, φ, on voit que la convergence de ζ_n vers ζ entraîne que $\varphi_n(a,b)$ converge vers $\varphi(a,b)$ pour tous $a,b \geq 0$. De plus, il existe une fonction $\psi(a,b)$ telle que $\varphi_n(a,b) \leq \psi(a,b)$ pour tout n, et

$$\int\!\!\int \psi(a,b)\,(1_{\{a>0\}}da + \delta_0(da))\,1_{\{b\geq 0\}}db < \infty.$$

D'autre part, il est très facile de vérifier, que pour tous a,b fixés avec $a < \zeta \wedge b$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \int R_{a,b}(w_n, dw')\,F(w') = \int R_{a,b}(w, dw')\,F(w')$$

(on écrit $\int R_{a,b}(w_n, dw')\,F(w') = E(F(w^{(n)}))$ et on peut s'arranger pour que la suite $(w^{(n)})$ converge p.s. vers $w^{(\infty)}$ de loi $R_{a,b}(w,\cdot)$). Le théorème de convergence dominée assure alors la convergence de $Q_sF(w_n)$ vers $Q_sF(w)$, ce qui termine la preuve. $\square$

Il est évident que

$$\{s, W_s = \underline{x}\} = \{s, \zeta_s = 0\}.$$

Cela nous amène à définir les excursions du serpent brownien en dehors de $\underline{x}$ en posant pour $u \in D$

$$\omega_s^u = W_{(\tau_{u-}+s)\wedge\tau_u}\,, \quad \forall s \geq 0,$$

de façon que $\omega^u = (\omega_s^u, s \geq 0)$ appartient à l'espace Ω_x des applications continues ω de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{W}_x$ qui sont égales à $\underline{x}$ sauf sur un intervalle $]0, \sigma(\omega)[$, $\sigma(\omega) > 0$. Remarquons que le temps de vie de ω_s^u est $e_u(s)$ par construction.

On note $(\mathcal{F}_s)$ la filtration canonique du processus (W_s), rendue continue à droite et complétée par les négligeables de $\mathcal{F}_\infty$.

Théorème 8.7 *La mesure aléatoire*

$$\sum_{u\in D} \delta_{(u,\omega^u)}$$

est un $(\mathcal{F}_{\tau_s})$-processus de Poisson ponctuel sur Ω_x. De plus, si $\mathbb{N}_x$ désigne la mesure caractéristique de ce processus de Poisson ponctuel, la mesure image de $\mathbb{N}_x(d\omega)$ par l'application $\omega \longrightarrow (\zeta_{\omega_s}, s \geq 0)$ est $n_+(de)$.

Preuve. La preuve de la première assertion est exactement analogue à celle du théorème 8.3. On remplace les ensembles E_p par $\Omega_p = \{\omega, \sigma(\omega) > 1/p\}$ et pour la propriété (iii) on utilise la propriété de Markov forte du processus (W_s) aux instants de la forme τ_r (si pour $r > 0$ fixé, on note $W'_s = W_{\tau_r+s}$, on a $\zeta'_s = \zeta_{\tau_r+s}$, $L_s^0(\zeta') = L_{\tau_r+s}^0(\zeta) - r$, $\omega'^u = \omega^{r+u}$, etc.).

La seconde assertion découle immédiatement de l'égalité $\zeta_{\omega_s^u} = e_u(s)$ et du fait que

$$\sum_{u\in D} \delta_{e_u}$$

est un processus de Poisson ponctuel de mesure caractéristique n_+. $\square$

8.3 Représentation poissonnienne du super-mouvement brownien

Pour $\omega \in \Omega_x$, nous noterons $\xi_s = \xi_s(\omega) = \zeta_{\omega_s}$. D'après le théorème 8.7, la loi de ξ sous $\mathbb{N}_x(d\omega)$ est n_+. En utilisant la proposition 8.5, cela nous permet de définir les temps locaux $(l_s^a(\xi), a \geq 0, s \geq 0)$. Pour $\omega \in \Omega_x$ et $t > 0$, nous définissons une mesure finie $\mathcal{X}_t = \mathcal{X}_t(\omega)$ sur $\mathbb{R}^d$ par la formule

$$\mathcal{X}_t(\omega) = \int_0^{\sigma(\omega)} dl_s^t(\xi)\, \delta_{\hat{\omega}_s}$$

(rappelons que $\hat{\omega}_s = \omega_s(\xi_s)$ est le point terminal de ω_s).

Lemme 8.8 *Soit X un super-mouvement brownien avec constante $\sigma^2 = 4$, issu de δ_x sous la probabilité $\mathbb{P}_{\delta_x}$. Alors, si $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ sont p fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}^d$ et $0 < t_1 < \ldots < t_p$, on a*

$$\mathbb{E}_{\delta_x}\Big(\exp -\sum_{j=1}^{p} < X_{t_j}, \varphi_j > \Big) = \exp -\mathbb{N}_x\Big(1 - \exp -\sum_{j=1}^{p} < \mathcal{X}_{t_j}, \varphi_j > \Big).$$

Preuve. On peut supposer que X est construit comme dans le chapitre 7 par la formule

$$X_t = \int_0^{\tau_1} dL_s^t(\zeta)\, \delta_{\hat{W}_s}$$

(cette formule est légèrement différente de celle du théorème 7.2 parce que nous avons pris la constante σ^2 égale à 4 au lieu de 2). En distinguant les contributions des différentes excursions de W en dehors de $\underline{x}$, on a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} < X_{t_j}, \varphi_j > &= \sum_{j=1}^{p} \sum_{u \in D\cap[0,1]} \int_{\tau_{u-}}^{\tau_u} dL_s^{t_j}(\zeta)\, \varphi_j(\hat{W}_s) \\
&= \sum_{u \in D\cap[0,1]} \left(\sum_{j=1}^{p} \int_0^{\sigma(\omega^u)} dl_s^{t_j}(\xi^u)\, \varphi_j(\hat{\omega}_s^u) \right) \\
&= \sum_{u \in D\cap[0,1]} \left(\sum_{j=1}^{p} < \mathcal{X}_{t_j}(\omega^u), \varphi_j > \right)
\end{aligned}$$

Pour terminer la preuve, il suffit maintenant d'utiliser le théorème 8.7 en appliquant la formule exponentielle (8.3) à la fonction $f(u,\omega) = 1_{\{u\leq 1\}} \sum_{j=1}^{p} < \mathcal{X}_{t_j}(\omega), \varphi_j >$.
□

Lemme 8.9 *Soit X un super-mouvement brownien issu de μ sous la probabilité $\mathbb{P}_\mu$. Alors, si $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$ sont p fonctions lipschitziennes bornées positives sur $\mathbb{R}^d$ et $0<t_1<\ldots<t_p$, on a*

$$\mathbb{E}_\mu\Big(\exp-\sum_{j=1}^p <X_{t_j},\varphi_j>\Big)=\exp-<\mu,v>$$

où

$$v(x)=-\log\mathbb{E}_{\delta_x}\Big(\exp-\sum_{j=1}^p <X_{t_j},\varphi_j>\Big).$$

Preuve. Ce lemme découle de la formule de l'exercice 4.3. Il est facile d'en donner une preuve directe rapide en raisonnant par récurrence sur p. Si $p=1$, le résultat a été obtenu dans le chapitre 4. Ensuite, en appliquant la propriété de Markov à l'instant t_{p-1} et en notant $v^{(p-1)}$ la solution de l'équation intégrale (4.2) pour $f=\varphi_p$, on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\mu\Big(\exp-\sum_{j=1}^p <X_{t_j},\varphi_j>\Big) &= \mathbb{E}_\mu\Big(\exp-\sum_{j=1}^{p-1} <X_{t_j},\varphi_j>-<X_{t_{p-1}},v^{(p-1)}>\Big)\\ &= \exp-<\mu,\tilde v>,\end{aligned}$$

où d'après l'hypothèse de récurrence

$$\tilde v(x)=-\log\mathbb{E}_{\delta_x}\Big(\exp-\sum_{j=1}^{p-1} <X_{t_j},\varphi_j>-<X_{t_{p-1}},v^{(p-1)}>\Big).$$

Le même raisonnement à l'envers donne

$$\tilde v(x)=-\log\mathbb{E}_{\delta_x}\Big(\exp-\sum_{j=1}^p <X_{t_j},\varphi_j>\Big).$$

□

On note $\Omega=\cup_{x\in\mathbb{R}^d}\Omega_x$ (l'espace Ω est muni de la tribu borélienne associée à la topologie de la convergence uniforme). Un argument d'invariance par translation montre que pour toute partie mesurable A de Ω, l'application $x\to\mathbb{N}_x(A)$ est mesurable. Si μ est une mesure finie sur $\mathbb{R}^d$, on peut donc bien définir la mesure $\mu(dx)\mathbb{N}_x(d\omega)$ qui est une mesure σ-finie sur $\mathbb{R}^d\times\Omega$.

Théorème 8.10 *Soit $\mu\in M_f(\mathbb{R}^d)$ et soit $\mathcal{N}(dxd\omega)$ une mesure de Poisson sur $\mathbb{R}^d\times\Omega$ d'intensité $\mu(dx)\mathbb{N}_x(d\omega)$. Le processus $(X_t,t\geq 0)$ défini par*

$$\begin{aligned}&X_0=\mu\,,\\ &X_t=\iint\mathcal{N}(dxd\omega)\,\mathcal{X}_t(\omega)\,,\quad \textit{si } t>0,\end{aligned}$$

est un super-mouvement brownien issu de μ (avec constante $\sigma^2=4$).

Remarque. L'intégrale qui définit X_t lorsque $t > 0$ est une somme finie. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{N}_x(\mathcal{X}_t \neq 0) = \mathbb{N}_x(l^t_\sigma > 0) = \mathbb{N}_x(\sup \xi_s \geq t) = n_+(\sup e(s) \geq t) = \frac{1}{2t},$$

d'après la proposition 4. La formule (8.2) entraîne alors aussitôt que

$$E(\mathcal{N}(\{(x,\omega), \mathcal{X}_t(\omega) \neq 0\})) = \frac{1}{2t} < \mu, 1 > < \infty.$$

Preuve. On vérifie que les lois marginales de dimension finie de X sont celles du super-mouvement brownien issu de μ. Soient $0 < t_1 < \ldots < t_p$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ des fonctions lipschitziennes bornées positives sur $\mathbb{R}^d$. On a

$$\begin{aligned}
&E\Big(\exp - \sum_{j=1}^p < X_{t_j}, \varphi_j > \Big) \\
&= E\Big(\exp - \iint \mathcal{N}(dxd\omega) \sum_{j=1}^p < \mathcal{X}_{t_j}(\omega), \varphi_j > \Big) \\
&= \exp - \int \mu(dx)\, \mathbb{N}_x \Big(1 - \exp - \sum_{j=1}^p < \mathcal{X}_{t_j}, \varphi_j > \Big) \quad \text{(formule (8.1))} \\
&= \exp - \int \mu(dx) \Big(- \log \mathbb{E}_{\delta_x} \Big(\exp - \sum_{j=1}^p < X_{t_j}, \varphi_j > \Big) \quad \text{(lemme 8.8)} \\
&= \exp - < \mu, v >,
\end{aligned}$$

où la fonction v est comme dans le lemme 8.9. Ce dernier lemme donne maintenant le résultat recherché. □

Le théorème précédent apparaît comme une extension de la formule de représentation obtenue dans le théorème 7.2, au cas où la valeur initiale du super-mouvement brownien est une mesure finie générale. Sous les hypothèses du théorème 8.10 on peut aussi introduire le processus historique associé à X, qui est donné pour $t > 0$ par

$$Y_t = \iint \mathcal{N}(dxd\omega)\, \mathcal{Y}_t(\omega)\,,$$

avec ici

$$\mathcal{Y}_t(\omega) = \int_0^{\sigma(\omega)} dl^t_s(\xi)\, \delta_{\omega_s}.$$

L'interprétation probabiliste est la suivante. Il n'y a qu'une infinité dénombrable de "particules" présentes à l'instant 0 qui aient des descendants à un instant strictement positif. Si on écrit $\mathcal{N} = \sum_{i \in I} \delta_{(x_i, \omega_i)}$, les positions de ces particules à l'instant 0 sont les x_i, $i \in I$, et pour chaque i fixé, ω_i décrit la généalogie des descendants de la particule d'indice i (qui se trouve en x_i à l'instant initial). Précisément, pour chaque $t > 0$, la mesure $\mathcal{X}_t(\omega_i)$ représente la contribution à X_t des descendants de la particule d'indice i présente à l'instant initial. Remarquons que, dans la situation discrète du processus de branchement brownien de durée de vie ε, la proposition 6.1 montre déjà que la descendance d'une particule présente à l'instant initial est représentée par une excursion du serpent brownien discret (W_n^ε). La remarque suivant le théorème 8.10, selon laquelle pour chaque $t > 0$ il n'y a qu'un nombre fini (de loi de Poisson) de particules présentes à l'instant initial qui contribuent à la mesure à l'instant t est aussi étroitement liée aux remarques de la fin du chapitre 1.

On peut utiliser le théorème 8.10 pour généraliser au cas d'une valeur initiale quelconque toutes les applications développées dans le chapitre 7 lorsque $X_0 = \delta_x$. Nous traitons ci-dessous la généralisation du corollaire 7.3, qui demande un peu d'attention. La proposition 7.4 reste vraie sans modification. Pour voir que $\operatorname{supp} X_t$ est compact, on utilise la remarque suivant le théorème 8.10 (il est intéressant de noter que même si la valeur initiale $X_0 = \mu$ a un support non borné, pour tout $t > 0$, le support de X_t est borné). Pour le calcul de la dimension de Hausdorff, on montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\dim \operatorname{supp} \mathcal{X}_t = 2 \wedge d, \ \mathbb{N}_x \text{ p.p. sur } \{\mathcal{X}_t \neq 0\}.$$

Ce résultat est en fait une conséquence directe de la proposition 7.4 et du théorème 8.10, en observant qu'il y a une probabilité strictement positive pour que la mesure $\mathcal{N}$ ait un seul atome (x, ω) tel que $\mathcal{X}_t(\omega) \neq 0$.

On généralise de même les propositions 7.5 et 7.6. Dans la proposition 7.5, l'ensemble $\mathcal{R}$ n'est compact p.s., respectivement connexe p.s., que si $\operatorname{supp} \mu$ est compact, resp. connexe.

Corollaire 8.11 *Soit X un super-mouvement brownien issu de $\mu \in M_f(\mathbb{R}^d)$. Alors, X a une version continue.*

Preuve. On peut supposer que X est construit par la formule du théorème 8.10. Le même argument que dans la preuve du corollaire 7.3 (et la remarque suivant l'énoncé du théorème 8.10) montre que le processus $(X_t, t > 0)$ est continu. Il reste à vérifier que

$$\lim_{t \downarrow 0} X_t = \mu.$$

Soit φ une fonction bornée lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d$. Notons Q_t les noyaux de transition du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$. On vérifie aisément que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut choisir $t > 0$ assez petit de façon que $\|\varphi - Q_r\varphi\|_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $r \in [0, t]$. D'autre part, la propriété de Markov de X et les calculs de moments d'ordre 1 du chapitre 5 montrent que le processus

$$M_r = < X_r, Q_{t-r}\varphi >, \quad r \in [0, t]$$

est une martingale. Le processus $(M_r, r \in [0,t])$ a donc une version càdlàg. Mais la continuité de $(X_r, r \in]0,t])$ entraîne déjà que $(M_r, r \in]0,t])$ est continu. On a donc

$$M_0 = \lim_{r \downarrow 0} M_r\,, \quad \text{p.s.}$$

En prenant $\varphi = 1$, on voit que la famille $(< X_r, 1 >, r \in [0,t])$ est bornée p.s. L'estimation précédente sur $\|\varphi - Q_r\varphi\|_\infty$, avec la convergence de M_r vers M_0, entraîne alors que

$$\limsup_{r \downarrow 0} < X_r, \varphi > \leq < \mu, \varphi > +2\varepsilon K,$$
$$\liminf_{r \downarrow 0} < X_r, \varphi > \geq < \mu, \varphi > -2\varepsilon K,$$

avec $K = \sup_{[0,t]} < X_r, 1 >$. Comme ε était arbitraire, cela termine la preuve du corollaire. $\square$

Commentaires bibliographiques. Les théorèmes 8.3 et 8.7 sont des cas particuliers de la théorie des excursions pour un processus de Markov général due à Itô [20]. Une étude de la théorie des excursions du mouvement brownien linéaire se trouve dans le chapitre XII de [35], qui détaille aussi les résultats préalables concernant les mesures de Poisson (avec des définitions légèrement différentes mais cependant équivalentes aux nôtres). Voir [8] et [14] pour des travaux récents sur la représentation poissonnienne du super-mouvement brownien (nos mesures d'excursion $\mathbb{N}_x$ correspondent aux “mesures canoniques” de [8]). L'approche développée ci-dessus qui met en parallèle la décomposition de Lévy-Khintchine du super-mouvement brownien et la théorie des excursions du mouvement brownien, est inspirée de [23]. Les liens entre les mesures d'excursion $\mathbb{N}_x$ et les équations aux dérivées partielles sont développés dans [26].

Exercices

Exercice 8.1 *Soit X un super-mouvement brownien issu de $\mu \in M_f(\mathbb{R}^d)$. Montrer que si* $\operatorname{supp}\mu$ *est connexe, le range $\mathcal{R}$ de X (défini dans le chapitre 7) l'est aussi (vérifier d'abord que* $\operatorname{supp}\mu \subset \mathcal{R}$*).*

Exercice 8.2 *Sous la mesure $\mathbb{N}_x$, on définit $\mathcal{R}(\omega) = \overline{\cup_{t>0}\operatorname{supp}\mathcal{X}_t(\omega)} = \{\hat{\omega}_s; s \geq 0\}$. Vérifier qu'il existe une constante C_d telle que, pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\mathbb{N}_x\Big(\sup_{y \in \mathcal{R}} |y - x| > \varepsilon\Big) = \frac{C_d}{\varepsilon^2}$$

(étudier les propriétés d'invariance par changement d'échelle de $\mathbb{N}_x$).

Exercice 8.3 *(1) Question préliminaire. Montrer que la formule de "densité de temps d'occupation" du théorème 2.1 peut se généraliser sous la forme*

$$\int_0^t \varphi(s, B_s, \omega)\, ds = \int_{\mathbb{R}} da \int_0^t dL_s^a(B)\, \varphi(s, a, \omega),$$

pour tout $t \geq 0$ *et pour n'importe quelle fonction* $\varphi(s, a, \omega)$ *mesurable positive sur l'espace* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \Omega$ *(*Ω *désigne ici l'espace de probabilité sous-jacent).*

(2) Vérifier que, pour toute fonction F *mesurable positive sur* $\mathbb{R}^d$*, on a*

$$\mathbb{N}_x\Big(\int_0^\sigma ds\, F(\hat{\omega}_s)\Big) = \int_0^\infty da\, E_x(F(B_a)),$$

où B *désigne un mouvement brownien dans* $\mathbb{R}^d$ *issu de* x *sous la probabilité* P_x*. Indication: montrer d'abord que, si* W *est un serpent brownien issu de* $\underline{x}$*,*

$$\mathbb{N}_x\Big(\int_0^\sigma ds\, F(\hat{\omega}_s)\Big) = E\Big(\int_0^{\tau_1} ds\, F(\hat{W}_s)\Big),$$

puis utiliser la question (1) et les liens entre le serpent brownien et le super-mouvement brownien.

Bibliography

[1] R. Abraham (1992) Un arbre aléatoire infini associé à l'excursion brownienne. Séminaire de Probabilités XXVI. *Lecture Notes Math.* **1526**, pp. 374-397. Springer.

[2] D. Aldous (1993) The continuum random tree III. *Ann. Probab.* **21**, 248-289.

[3] K.B. Athreya, P.E. Ney (1972) *Branching processes.* Springer, Berlin.

[4] J. Azéma, M. Yor (eds) (1978) Temps locaux. *Astérisque* **52-53**

[5] P. Baras, M. Pierre (1984) Problèmes paraboliques semi-linéaires avec données mesures. *Applicable Analysis* **18**, 111-149.

[6] D.A. Dawson (1993) Measure-valued Markov processes. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour 1991. *Lecture Notes Math.* **1541**. Springer, Berlin.

[7] Dawson, D.A., Iscoe, I., Perkins, E.A. (1989) Super-Brownian motion: Path properties and hitting probabilities. *Probab. Th. Rel. Fields* **83**, 135-205.

[8] Dawson, D.A., Perkins, E.A. (1991) Historical processes. *Memoirs Amer. Math. Soc.* **454**.

[9] C. Dellacherie, P.A. Meyer (1975) *Probabilités et potentiel, Chapitres I à IV.* Hermann, Paris.

[10] E.B. Dynkin (1991) Branching particle systems and superprocesses. *Ann. Probab.* **19**, 1157-1194.

[11] E.B. Dynkin (1991) A probabilistic approach to one class of nonlinear differential equations. *Probab. Th. Rel. Fields* **89**, 89-115.

[12] E.B. Dynkin (1992) Superdiffusions and parabolic nonlinear differential equations. *Ann. Probab.* **20**, 942-962.

[13] E.B. Dynkin, S.E. Kuznetsov (1995) Markov snakes and superprocesses. *Probab. Th. Rel. Fields* **103**, 433-473.

[14] N. El Karoui, S. Roelly (1991) Propriétés de martingales, explosion et représentation de Lévy-Khintchine d'une classe de processus de branchement à valeurs mesures. *Stoch. Process. Appl.* **38**, 239-266.

[15] S.N. Ethier, T.G. Kurtz (1985) *Markov processes: characterization and convergence.* Wiley, New York.

[16] K.J. Falconer (1985) The Geometry of Fractal Sets. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[17] W. Feller (1951) Diffusion processes in genetics. *Proc. Second Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.*, University of California Press, Berkeley, pp. 227-246.

[18] D. Geman, J. Horowitz, J. Rosen (1984) A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. *Ann. Probab.* **12**, 86-107.

[19] T.E. Harris (1952) First passage and recurrence distributions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **73**, 471-486.

[20] K. Itô (1970) Poisson point processes attached to Markov processes. *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob.*, vol. 3. University of California, Berkeley, pp. 225-239.

[21] K. Kawazu, S. Watanabe (1971) Branching processes with immigration and related limit theorems. *Theory Probab. Appl.* **16**, 36-54.

[22] J.F. Le Gall (1986) Une approche élémentaire des théorèmes de décomposition de Williams. Séminaire de Probabilités XX. *Lecture Notes Math.* **1204**, pp. 447-464. Springer.

[23] J.F. Le Gall (1991) Brownian excursions, trees and measure-valued branching processes. *Ann. Probab.* **19**, 1399-1439.

[24] J.F. Le Gall (1993) A class of path-valued Markov processes and its applications to superprocesses. *Probab. Th. Rel. Fields* **95**, 25-46.

[25] J.F. Le Gall (1993) The uniform random tree in a Brownian excursion. *Probab. Th. Rel. Fields* **96**, 369-383.

[26] J.F. Le Gall (1994) A path-valued Markov process and its connections with partial differential equations. In: *Proceedings of the 1st European Congress of Mathematics, Vol.II*, pp.185-212. Birkhäuser.

[27] J.F. Le Gall (1994) The Brownian snake and solutions of $\Delta u = u^2$ in a domain. *Probab. Th. Rel. Fields* **102**, 393-402.

[28] J.F. Le Gall, E.A. Perkins (1994) The Hausdorff measure of the support of two-dimensional super-Brownian motion. *Ann. Probab.* **23**, 1719-1747.

[29] P.A. Meyer (1981) Flot d'une équation différentielle stochastique. Séminaire de Probabilités XV. *Lecture Notes Math.* **850**, pp.103-117. Springer, Berlin.

[30] J. Neveu (1986) Arbres et processus de Galton-Watson. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **22**, 199-207.

[31] J. Neveu, J.W. Pitman (1989) The branching process in a Brownian excursion. Séminaire de Probabilités XXIII. *Lecture Notes Math.* **1372**, pp. 248-257. Springer.

[32] E.A. Perkins (1981) The exact Hausdorff measure of the level sets of Brownian motion. *Zeitschrift Wahrsch. verw. Gebiete* **58**, 373-388.

[33] E.A. Perkins (1988) A space-time property of a class of measure-valued branching diffusions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **305**, 743-795.

[34] E.A. Perkins (1990) Polar sets and multiple points for super-Brownian motion. *Ann. Probab.* **18**, 453-491.

[35] D. Revuz, M. Yor (1991) *Continuous martingales and Brownian motion.* Springer, Berlin.

[36] L. Schwartz (1970) *Topologie générale et analyse fonctionnelle.* Hermann.

[37] S. Watanabe (1969) A limit theorem of branching processes and continuous state branching processes. *J. Math. Kyoto Univ.* **8**, 141-167.

Contents