Constructibilité générique et uniformité en ℓ

Luc Illusie

Résumé. Cet article, écrit en 2010, présente divers résultats de constructibilité générique et d'indépendance de ℓ pour des images directes en cohomologie étale, dans le cas de coefficients constants $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}_\ell$. On donne une application à un résultat de Serre d'indépendance de représentations ℓ-adiques [27]. On formule quelques questions relatives au cas des coefficients non constants.

Je n'ai pas modifié la rédaction initiale. Je me suis borné à ajouter des notes de bas de page pour actualiser certains points, et mettre à jour les références.

Abstract. The present paper, written in 2010, presents various results on generic constructibility and independence of ℓ for direct images in étale cohomology in the case of constant coefficients $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$ or $\mathbf{Z}_\ell$. We give an application to a result of Serre of independence of ℓ-adic representations [27]. We formulate questions in the case of non constant coefficients.

I have not modified the initial redaction. I limited myself to refreshing references and adding footnotes for updating certain points.

2020 Mathematics Subject Classification. 11F80, 14F08, 14F20, 14F30, 14G25.

Introduction [1]

Soit k un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$, et soit X un schéma propre et lisse sur k. Soient $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et $\Gamma_k = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Soit $i \in \mathbf{Z}$. Dans ([26], 10.1) Serre conjecture qu'il existe une extension finie k' de k contenue dans $\overline{k}$ telle que les représentations ℓ-adiques

$$\rho_\ell : \Gamma_k \to \mathrm{GL}(V_\ell),$$

où $V_\ell = H^i(X_{\overline{k}}, \mathbf{Q}_\ell)$, restreintes à $\Gamma_{k'} = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k')$ soient indépendantes, i. e. telles que $\rho(\Gamma_{k'}) = \prod \rho_\ell(\Gamma_{k'})$, où $\rho = (\rho_\ell) : \Gamma_k \to \prod \mathrm{GL}(V_\ell)$. Dans cet article, nous prouvons que, pour k un corps de nombres, cette conjecture découle des résultats de Serre [27]. Nous montrons plus généralement que, si X est

1. Ce texte a été achevé le 9.4.2010. Peu après, W. Zheng m'a signalé la référence [18], qui avait échappé à mon attention. Les résultats du §3 de cet article résolvent la question 5.4 (a) pour $S = \mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$, et en particulier suffisent pour l'application du critère de Serre 4.2 aux représentations venant de la cohomologie ℓ-adique. Dans [27], ce corollaire, pour la démonstration duquel, dans une version antérieure, le lecteur était renvoyé au présent travail, y est maintenant établi indépendamment.

un schéma séparé et de type fini sur k, il existe une extension finie k' de k sur laquelle les représentations $\rho_\ell : \Gamma_k \to \mathrm{GL}(V_\ell)$ deviennent indépendantes, où $V_\ell = H^i(X_{\overline{k}}, \mathbf{Q}_\ell)$ ou $H^i_c(X_{\overline{k}}, \mathbf{Q}_\ell)$ (2.1)). La conjecture avait été démontrée par Serre dans le cas où X est une variété abélienne [25].

Dans [27], Serre donne un critère pour qu'une famille d'homorphismes continus $\rho_\ell : \Gamma_k \to G_\ell$, où k est un corps de nombres et G_ℓ un groupe de Lie ℓ-adique localement compact, devienne indépendante sur une extension finie de k. Nous montrons que ce critère s'applique aux familles du type considéré plus haut. Pour cela, nous établissons, au §2, dans un cadre plus général, des propriétés de constructibilité générique uniforme en ℓ. Si $f : X \to Y$ est un S-morphisme entre schémas de type fini sur un schéma noethérien S, ℓ un nombre premier inversible sur S, n un entier $\geqslant 1$, d'après Deligne ([7], 1.9), si F est un faisceau constructible de $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$-modules sur X, il existe un ouvert dense U de S tel que, si $f_U : X_U \to Y_U$ est la restriction de f à U, $R^q f_{U*}F$ soit constructible pour tout q, nul pour q assez grand, et de formation compatible à tout changement de base $U' \to U$. L'ouvert U dépend de F. Si l'on considère la famille des faisceaux constants $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$ sur X, il n'est pas clair, *a priori*, qu'on puisse trouver un ouvert U, indépendant de ℓ, tel les $R^q f_{U*}\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}|Y_U[1/\ell]$ soient constructibles. C'est cependant le cas, comme nous le montrons, sous une forme un peu plus précise, en 2.1 (pour X et Y séparés et S de dimension finie). En particulier, nous montrons que, pour $Y = S$, il existe un ouvert dense U de S, indépendant de ℓ, tel que, pour tout q, $R^q f_*\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}|U[1/\ell]$ soit lisse et de formation compatible à tout changement de base $U' \to U$. Nous traitons également des variantes pour les images directes à support propre, et pour les $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux, dans le cas où l'on dispose d'un formalisme ℓ-adique. Les démonstrations, au §3, utilisent une méthode standard : altérations et descente cohomologique.

Les §§ 1 et 5 contiennent quelques compléments. Les bornes (uniformes en ℓ) que nous donnons, au §1, pour les dimensions d'espaces de cohomologie ℓ-adiques sont immédiates dans le cas d'un corps de caractéristique nulle, et sont sans doute connues dans le cas général, mais ne semblent pas figurer dans la littérature [2] [3]. Le critère de Serre mentionné plus haut n'impose aucune condition aux représentations ρ_ℓ localisées aux places de caractéristique résiduelle ℓ. Nous montrons cependant que, si k est un corps de nombres, et si, comme plus haut, V_ℓ désigne un espace de cohomologie ℓ-adique $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbf{Q}_\ell)$ ou $H^i_c(X_{\overline{k}}, \mathbf{Q}_\ell)$, après extension finie de k, il existe un ensemble fini T de places en dehors desquelles les ρ_ℓ sont cristallines en chaque place de caractéristique

2. (ajouté le 22.4.2010) On les trouve dans [17], avec divers compléments.

3. (ajouté en avril 2021) Du moins dans le cas de coefficients $\mathbf{Q}_\ell$. Voir [24] pour de vastes généralisations des résultats de [17].

résiduelle $p = \ell$, et semi-stables (au sens de Fontaine) aux places de T (de caractéristique résiduelle $p = \ell$). A la fin du §5, nous revenons sur la question initiale (corps de fonctions) et celle d'étendre les résultats du §2 à des familles de coefficients ℓ-adiques non constants.

Remerciements

Les questions de constructibilité uniforme m'ont été posées par Serre il y a quelques années. Cet article est issu de lettres que je lui ai écrites à l'époque. Il n'aurait pas vu le jour sans ses encouragements constants à les mettre en forme. Je ne sais comment le remercier pour les remarques et suggestions qu'il m'a faites tout au long. Je tiens également à remercier W. Zheng pour m'avoir signalé une difficulté dans une version préliminaire de 2.1, et T. Tsuji et G. Yamashita pour d'utiles discussions sur les théorèmes de comparaison p-adiques. Cet article a été écrit au cours d'un séjour à l'IHÉS de janvier à mars 2010, et au département de mathématiques de l'université de Tokyo, en avril 2010. Je tiens à remercier chaleureusement ces deux institutions pour leur généreuse hospitalité et les excellentes conditions de travail qu'elles m'ont offertes.

Je suis très reconnaissant à F. Orgogozo et W. Zheng pour leur relecture attentive de la présente version de ce texte, et la correction d'un certain nombre de coquilles.

1 Bornes pour les dimensions

Théorème 1.1. *Soit k un corps algébriquement clos, et soit X un schéma séparé et de type fini sur k. Soit $i \in \mathbf{Z}$. Il existe un entier $n_i \geqslant 0$ tel que, pour tout $\ell \neq \mathrm{car}(k)$, on ait $\dim_{\mathbf{F}_\ell} H^i(X, \mathbf{F}_\ell) \leqslant n_i$ et $\dim_{\mathbf{F}_\ell} H^i_c(X, \mathbf{F}_\ell) \leqslant n_i$.*

Remarque 1.2. Si $\mathrm{car}(k) = 0$, pour tout ℓ assez grand, $H^i(X, \mathbf{Z}_\ell)$ et $H^{i+1}(X, \mathbf{Z}_\ell)$ (resp. $H^i_c(X, \mathbf{Z}_\ell)$ et $H^{i+1}_c(X, \mathbf{Z}_\ell)$) sont sans torsion, et

$$\dim_{\mathbf{F}_\ell} H^i(X, \mathbf{F}_\ell) \ \ (\text{resp. } \dim_{\mathbf{F}_\ell} H^i_c(X, \mathbf{F}_\ell))$$

est indépendant de ℓ, égal à $\dim_{\mathbf{F}_\ell} H^i(X(\mathbf{C}), \mathbf{F}_\ell)$ (resp. $\dim_{\mathbf{F}_\ell} H^i_c(X(\mathbf{C}), \mathbf{F}_\ell)$) si $k = \mathbf{C}$. Par le principe de Lefschetz et les théorèmes de changement de base de ([1], XVII) pour H^i_c, et ([7], Th. finitude) pour H^i, on se ramène à $k = \mathbf{C}$, où le résultat découle du théorème de comparaison de ([1], XVI 4.1).

Corollaire 1.3. *Avec les notations de 1.1, pour tout $\ell \neq \mathrm{car}(k)$, on a $\dim_{\mathbf{Q}_\ell} H^i(X, \mathbf{Q}_\ell) \leqslant n_i$ et $\dim_{\mathbf{Q}_\ell} H^i_c(X, \mathbf{Q}_\ell) \leqslant n_i$, où n_i est l'entier figurant dans 1.1.*

En effet, on a

$$\dim_{\mathbf{Q}_\ell} H^i(X, \mathbf{Q}_\ell) \leqslant \dim_{\mathbf{F}_\ell}(H^i(X, \mathbf{Z}_\ell) \otimes \mathbf{F}_\ell) \leqslant \dim_{\mathbf{F}_\ell} H^i(X, \mathbf{F}_\ell)$$

et

$$\dim_{\mathbf{Q}_\ell} H^i_c(X, \mathbf{Q}_\ell) \leqslant \dim_{\mathbf{F}_\ell}(H^i_c(X, \mathbf{Z}_\ell) \otimes \mathbf{F}_\ell) \leqslant \dim_{\mathbf{F}_\ell} H^i_c(X, \mathbf{F}_\ell).$$

Remarque 1.4. Si X est propre et lisse (resp. projectif et lisse), il découle des résultats de Deligne [8] (resp. [6]), par un argument de spécialisation standard, que $\dim H^i(X, \mathbf{Q}_\ell)$ est indépendant de ℓ. Par ailleurs, d'après Gabber [12] si X est projectif et lisse, et si $H^i(X, \mathbf{Z}_\ell)_{\mathrm{tors}}$ désigne le sous-groupe de torsion de $H^i(X, \mathbf{Z}_\ell)$, on a $H^i(X, \mathbf{Z}_\ell)_{\mathrm{tors}} = 0$ sauf pour un nombre fini de ℓ. On espère des résultats analogues dans le cas général [4].

1.5. Démonstration de 1.1.

(a) *Cas de* H^i_c. On procède par récurrence sur $\dim(X)$. On peut supposer X intègre. Soit U un ouvert dense, lisse sur k. Par l'hypothèse de récurrence et la suite exacte de cohomologie à support propre, on se ramène à $X = U$, autrement dit, on peut supposer X lisse sur k. D'après de Jong [9], il existe alors une altération $a : V \to X$, avec $V = Z - D$, Z intègre, projectif et lisse sur k, et D un diviseur à croisements normaux dans Z. Soient $N = \dim(X) = \dim(V)$. Soient $f : X \to \operatorname{Spec} k$ la projection, et $g = fa : V \to \operatorname{Spec} k$. On a canoniquement $\mathbf{F}_{\ell X}[2N](N) \xrightarrow{\sim} Rf^!\mathbf{F}_\ell$, $\mathbf{F}_{\ell V}[2N](N) \xrightarrow{\sim} Rg^!\mathbf{F}_\ell \xrightarrow{\sim} Ra^!Rf^!\mathbf{F}_\ell$, d'où $Ra^!\mathbf{F}_{\ell X} \xrightarrow{\sim} \mathbf{F}_{\ell V}$. Notons $\mathrm{Tr} : Ra_*\mathbf{F}_\ell = Ra_*Ra^!\mathbf{F}_\ell \to \mathbf{F}_\ell$ le morphisme d'adjonction de la dualité globale. Soit d le degré générique de a. Soit L l'ensemble des nombres premiers $\neq \mathrm{car}(k)$ et ne divisant pas d. Le composé $\mathbf{F}_{\ell X} \to Ra_*\mathbf{F}_{\ell V} \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbf{F}_{\ell X}$ est la multiplication par d, donc est un isomorphisme pour tout $\ell \in L$. Par suite, pour $\ell \in L$, $H^i_c(X, \mathbf{F}_\ell)$ s'injecte dans $H^i_c(V, \mathbf{F}_\ell)$. Par l'hypothèse de récurrence, on est alors ramené à supposer X projectif et lisse. Soit T l'ensemble des $\ell \in L$ pour lesquels $H^i(X, \mathbf{Z}_\ell)_{\mathrm{tors}}$ ou $H^{i+1}(X, \mathbf{Z}_\ell)_{\mathrm{tors}}$ est non nul. Cet ensemble est fini d'après Gabber (1.4). Pour $\ell \in L - T$, on a alors $\dim H^i(X, \mathbf{F}_\ell) = \dim H^i(X, \mathbf{Q}_\ell)$, et d'après Deligne [6] (1.4), cet entier est indépendant de ℓ, ce qui achève la démonstration de (a).

(b) *Cas de* H^i. D'après de Jong [9], il existe un schéma simplicial $Z_\bullet$ sur $\operatorname{Spec} k$, projectif et lisse en chaque degré, un sous-schéma simplicial $D_\bullet$ de $Z_\bullet$ qui est un diviseur à croisements normaux stricts en chaque degré, et un hyperrecouvrement propre $\varepsilon_\bullet : U_\bullet = Z_\bullet - D_\bullet \to X$. Par descente cohomologique, $\varepsilon_\bullet$ induit un isomorphisme $H^*(X, \mathbf{F}_\ell) \xrightarrow{\sim} H^*(U_\bullet, \mathbf{F}_\ell)$. Soit $N = \dim(X)$. Comme $\mathrm{cd}_\ell(X) \leqslant 2N$ ([1], X 4.3), par la suite spectrale

$$E_1^{pq} = H^q(U_p, \mathbf{F}_\ell) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbf{F}_\ell),$$

il suffit de prouver que, pour $p+q \leqslant 2N$, $\dim E_1^{pq}$ est borné indépendamment de ℓ. On est donc ramené à prouver que, pour $X = Z - D$, avec Z projectif

4. (ajouté en avril 2021) D'après Suh [28], le même résultat vaut pour X propre et lisse. Mais on ignore s'il en est encore ainsi pour X supposé seulement lisse. Pour des progrès sur ces questions, voir [4].

et lisse sur k, et $D = D_1 + \cdots + D_m$ un diviseur à croisements normaux stricts dans Z, les $b_i = \dim H^i(X, \mathbf{F}_\ell)$ sont bornés indépendamment de ℓ. Soit $j : X \to Z$ l'inclusion. Par le théorème de pureté relatif ([1], XVI), on a

$$R^q j_* \mathbf{F}_\ell = \oplus_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_q \leqslant m} (\mathbf{F}_\ell)_{D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_q}}(-q),$$

(où l'on convient que l'intersection $D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_q}$ est Z pour $q = 0$). La suite spectrale de Leray de j s'écrit donc

$$E_2^{pq} = \oplus_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_q \leqslant m} H^p(D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_q}, \mathbf{F}_\ell) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbf{F}_\ell).$$

Elle ramène le problème au cas propre et lisse, traité en (a).

2 Constructibilité générique uniforme : énoncés

Dans ce numéro, S désigne un schéma noethérien.

Théorème 2.1. *Soit $f : X \to Y$ un S-morphisme entre S-schémas séparés de type fini.*

(1) Soit d un entier tel que $\dim X_y \leqslant d$ pour tout $y \in Y$. Alors :

(a) Pour tout nombre premier ℓ et tout entier $n \geqslant 1$, on a $Rf_!(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}) \in D^b_{ctf}(Y, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$, et $\mathrm{tor.amp}\, Rf_!(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}) \subset [0, 2d]$.

(b) Il existe un ouvert dense U de S et une décomposition de $Y_U = Y \times_S U$ en réunion finie de parties localement fermées disjointes Y_i, $i \in I$, tels que, pour tout ℓ, tout $n \geqslant 1$ et tout i, $Rf_!(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})|Y_i[1/\ell]$ soit un complexe parfait.

(2) On suppose S de dimension finie. Alors il existe un entier $N \geqslant 0$, un ouvert dense U de S et une décomposition de $Y_U = Y \times_S U$ en réunion finie de parties localement fermées disjointes Y_i, $i \in I$, tels que, pour tout ℓ et tout $n \geqslant 1$:

(a) $Rf_*(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})|Y_U[1/\ell]$ appartienne à $D^b_{ctf}(Y_U, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$, avec $\mathrm{tor.amp}\, Rf_*(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})|Y_U[1/\ell] \subset [0, N]$, et commute à tout changement de base $S' \to U$.

(b) Pour tout i, $Rf_*(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})|Y_i[1/\ell]$ soit un complexe parfait, de formation compatible à tout changement de base $S \to U$.

Rappelons que, sur un schéma noethérien T, on dit qu'un faisceau de $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$-modules est *lisse* s'il est constructible et localement constant, i. e. cohérent comme faisceau de modules sur le faisceau d'anneaux (cohérent) constant $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$. Les $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$-faisceaux lisses sont stables par noyau, conoyau et extension. Pour $K \in D^b_{ctf}(T, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$, où l'indice ctf désigne la sous-catégorie pleine de D^b formée des complexes de tor-dimension finie et à cohomologie constructible, K est *parfait* si et seulement si ses faisceaux de cohomologie $H^q K$ sont lisses [SGA 6, I]. Si $[a, b]$ est un intervalle de $\mathbf{Z}$, la notation

$\operatorname{tor.amp} K \subset [a,b]$ signifie que K est de tor-amplitude contenue dans $[a,b]$, i. e. que, pour tout faisceau M de $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$-modules sur T, $H^i(K \otimes^L_{\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}} M) = 0$ pour $i \notin [a,b]$.

Rappelons par ailleurs que, les schémas X et Y étant séparés de type fini sur S, le morphisme f est compactifiable ([19], [5]), et donc que le foncteur $Rf_! : D^+(X, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}) \to D^+(Y, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$ est défini.

Voici deux cas particuliers de 2.1 :

Corollaire 2.2. *Soit $f : X \to S$ un morphisme séparé, de type fini, de dimension relative $\leqslant d$. Il existe un entier $N \geqslant 0$ et un ouvert dense U de S tel que, pour tout nombre premier ℓ, tout entier $n \geqslant 1$, et tout $q \in \mathbf{Z}$, $R^q f_!(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})|U[1/\ell]$ (resp. $R^q f_*(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})|U[1/\ell]$ si S est de dimension finie) soit lisse, nul pour $q > 2d$ (resp. $q > N$), et de formation compatible à tout changement de base $S' \to U[1/\ell]$.*

Corollaire 2.3. *Soient k un corps, $S = \operatorname{Spec} k$, $f : X \to Y$ un S-morphisme entre S-schémas séparés de type fini, de dimension relative (resp. dimension) $\leqslant d$ (resp. $\leqslant r$). Il existe une décomposition finie de Y en parties localement fermées Y_i, $i \in I$, telle que, pour tout nombre premier $\ell \neq \operatorname{car}(k)$, tout entier $n \geqslant 1$, tout $q \in \mathbf{Z}$,et tout $i \in I$, $R^q f_!(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})|Y_i$ (resp. $R^q f_*(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})|Y_i$) soit lisse, nul pour $q > 2d$ (resp. $q > 2r$), et de formation compatible à tout changement de base $S' \to S$.*

L'assertion d'annulation pour $R^q f_*$ vient de ce que la ℓ-dimension cohomologique de Rf_* est majorée par $2r$ d'après ([1], X, 4.3).

2.4. Variantes ℓ-adiques.

L'énoncé 2.1 et ses corollaires impliquent des variantes ℓ-adiques, lorsqu'on dispose, sur les schémas X séparés de type fini sur S, d'une catégorie $D^b_c(X[1/\ell], \mathbf{Z}_\ell)$ stable par les six opérations de Grothendieck. C'est le cas si S est séparé de type fini sur un schéma noethérien régulier de dimension $\leqslant 1$, d'après Ekedahl [10]. C'est le cas également si S est noethérien, quasi-excellent d'après les théorèmes de finitude de Gabber [21]. Sans hypothèse supplémentaire sur S, on devrait pouvoir construire un formalisme ℓ-adique générique.

Plaçons-nous dans le cas où S est séparé de type fini sur un schéma noethérien régulier de dimension $\leqslant 1$. Si T est un S-schéma séparé de type fini, un complexe $K \in D^b_c(T, \mathbf{Z}_\ell)$ est parfait si ses faisceaux de cohomologie $H^i K$, pour la t-structure canonique ([10], 6.3), sont lisses, ou, ce qui revient au même, si $\mathbf{F}_\ell \otimes^L_{\mathbf{Z}_\ell} K$ est un complexe parfait de $\mathbf{F}_\ell$-modules. Soit $f : X \to Y$ un S-morphisme entre S-schémas séparés de type fini. Alors Rf_* et $Rf_!$ envoient $D^b_c(X[1/\ell], \mathbf{Z}_\ell)$ dans $D^b_c(Y[1/\ell], \mathbf{Z}_\ell)$, et il existe un entier N tel que, pour tout ℓ, et tout $\mathbf{Z}_\ell$-faisceau constructible F sur X, $R^q f_! F = 0$ (resp.

$R^q f_* F = 0$) pour $q > N$ (et dans le cas de $R^q f_!$ on peut prendre $N = 2d$, où d majore la dimension des fibres de f). De plus :

Corollaire 2.5. *Avec les notations précédentes, il existe un ouvert dense U de S et une décomposition de $Y_U = Y \times_S U$ en réunion finie de parties localement fermées disjointes Y_i, $i \in I$, tels que, pour tout ℓ et tout i, $Rf_!(\mathbf{Z}_\ell)|Y_i[1/\ell]$ (resp. $Rf_*(\mathbf{Z}_\ell)|Y_i[1/\ell]$) soit un complexe partait, de formation compatible à tout changement de base $Y' \to Y_i$ (resp. $S' \to U$).*

Il suffit en effet d'appliquer 2.1, compte tenu des isomorphismes canoniques (en restriction à $Y_i[1/\ell]$) $\mathbf{F}_\ell \otimes^L_{\mathbf{Z}_\ell} Rf_! \mathbf{Z}_\ell \xrightarrow{\sim} Rf_! \mathbf{F}_\ell$ (resp. $\mathbf{F}_\ell \otimes^L_{\mathbf{Z}_\ell} Rf_* \mathbf{Z}_\ell \xrightarrow{\sim} Rf_* \mathbf{F}_\ell$) ([10], 6.3).

En particulier, on a les variantes ℓ-adiques suivantes de 2.2 et 2.3 :

Corollaire 2.6. *Soient S comme en 2.5, et soit $f : X \to S$ un morphisme séparé, de type fini. Il existe un ouvert dense U de S tel que, pour tout nombre premier ℓ et tout $q \in \mathbf{Z}$, $R^q f_!(\mathbf{Z}_\ell)|U[1/\ell]$ (resp. $R^q f_*(\mathbf{Z}_\ell)|U[1/\ell]$) soit lisse et de formation compatible à tout changement de base $S' \to U[1/\ell]$.*

Corollaire 2.7. *Soient k un corps, $S = \operatorname{Spec} k$, $f : X \to Y$ un S-morphisme entre S-schémas séparés de type fini. Il existe une décomposition finie de Y en parties localement fermées Y_i, $i \in I$, telle que, pour tout nombre premier $\ell \neq \operatorname{car}(k)$, tout $q \in \mathbf{Z}$, et tout $i \in I$, $R^q f_!(\mathbf{Z}_\ell)|Y_i$ (resp. $R^q f_*(\mathbf{Z}_\ell)|Y_i$) soit lisse, et de formation compatible à tout changement de base $S' \to S$.*

3 Démonstration de 2.1

Comme dans la section 2, S désigne un schéma noethérien.

Lemme 3.1. *Soit un diagramme commutatif*

(3.1.1)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & Z \arrow[d, "h"] & D \arrow[l, "i"'] \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd} ,$$

où h est lisse, $D = D_1 + \cdots + D_m \subset Z$ est un diviseur à croisements normaux stricts relativement à S, et j est l'inclusion de $X = Z - D$ dans Z. Soient ℓ un nombre premier et n un entier $\geqslant 1$. Alors :

(i) Pour tout $a \geqslant 0$, on a un isomorphisme canonique

(3.1.2)
$$R^a j_*(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})|Z[1/\ell] = \oplus_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_a \leqslant m} (\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})(-a)|D_{i_1 \cap \cdots \cap D_{i_a}}[1/\ell],$$

et la formation de $R^a j_*(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})|Z[1/\ell]$ commute à tout changement de base $S' \to S[1/\ell]$.

(ii) Si de plus h est propre et de dimension relative $\leqslant d$, alors $Rf_*(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})|S[1/\ell]$ (resp. $Rf_!(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})|S[1/\ell]$) est parfait, de tor-amplitude $\subset [0,2d]$, et de formation compatible à tout changement de base $S' \to S[1/\ell]$.

(i) est un corollaire classique ([7], Th. finitude, App. 1.3.3]) du théorème de pureté relatif ([1], XVI 3.7). Prouvons (ii). Posons $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z} = \Lambda$. D'après (i), $Rf_*(\Lambda)|S[1/\ell]$ est sous-jacent à un complexe filtré de filtration finie, de gradué associé $\oplus Rh_*(\Lambda_{D_{i_1\cdots i_q}}(-q))[-q]|S[1/\ell]$, où $D_{i_1\cdots i_q} = D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_q}$. Comme $D_{i_1\cdots i_q}$ est propre et lisse sur S, de dimension relative $\leqslant d-q$, il résulte du théorème de spécialisation ([1], XVI 2.2) que $Rh_*(\Lambda_{D_{i_1\cdots i_q}}(-q))[-q]|S[1/\ell]$ est parfait, d'amplitude plate $\subset [0,2d-q]$ (et de formation compatible à tout changement de base). L'assertion (ii) en découle pour Rf_*. Appliquant Rh_* à la suite exacte $0 \to j_!\Lambda_X \to \Lambda_Z \to i_*\Lambda_D \to 0$, et tenant compte du fait que $Rh_*(\Lambda)|S[1/\ell]$ est parfait, d'amplitude plate dans $[0,2d]$, il suffit de prouver que $Rg_*(\Lambda)|S[1/\ell]$ est parfait, d'amplitude plate dans $[0,2d-1]$, ce qui résulte du recouvrement de D par les D_i, et de la filtration correspondante de $Rg_*\Lambda|S[1/\ell]$, de gradué $\oplus_{1\leqslant i_0<\cdots<i_q\leqslant m} Rg_*(\Lambda_{D_{i_0\cdots i_q}})[-q]|S[1/\ell]$.

Le lemme suivant est une variante de ([20], 2.6) :

Lemme 3.2. *Soit $f : X \to Y$ un S-morphisme entre S-schémas séparés de type fini, et soit N un entier $\geqslant 1$. Il existe un ouvert dense U de S, un homéomorphisme universel $U' \to U$, et un diagramme commutatif de schémas simpliciaux :*

(3.2.1)
$$\begin{tikzcd} X_\bullet \arrow[r, "j_\bullet"] \arrow[d] & Z_\bullet \arrow[d, "\varepsilon_\bullet"] \\ X_{U'} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_{U'}"] & Z \arrow[dl, "h"] \\ Y_{U'} \arrow[d, "g_{U'}"] & \\ U' & \end{tikzcd} ,$$

où : - j est une immersion ouverte d'image dense ;

- $j_\bullet$ est une immersion ouverte simpliciale, et le carré est cartésien ;

- h est propre, et $\varepsilon_\bullet$ est un hyperrecouvrement propre ;

- pour $i \leqslant N$, le composé $g_{U'}h\varepsilon_i$ est lisse et $Z_i - X_i$ est le support d'un diviseur à croisements normaux stricts D_i relativement à U'.

On suit la démonstration de (*loc. cit.*). On peut supposer S intègre, de point générique η. Soit k une clôture parfaite de $k(\eta)$. On choisit une factorisation de $f_k : X_k \to Y_k$ en $X_k \xrightarrow{u} T \xrightarrow{v} Y_k$, avec u une immersion ouverte dense, et v un morphisme propre. A l'aide du théorème de de Jong ([9], 3.1), et de la méthode de construction pas à pas d'hyperrecouvrements ([1], Vbis 5.1), on construit un hyperrecouvrement propre N-tronqué $\alpha_\bullet : T_\bullet \to T$ tel que, pour $i \leqslant N$, T_i soit lisse sur k et $X_k \times_T T_i$ le complément d'un diviseur à croisements normaux stricts dans T_i. On descend $\alpha_\bullet$ à une extension finie radicielle k' de k, puis on l'étend en un hyperrecouvrement propre N-tronqué $\beta_\bullet : W_\bullet \to Z$, avec U', Z, h comme en (3.2.1), où pour $i \leqslant N$, $g_{U'} h \varepsilon_i : W_i \to U'$ est lisse et $X_i = X \times_Z W_i$ est le complément d'un diviseur à croisements normaux stricts relativement à U'. Enfin, on définit $\varepsilon_\bullet : Z_\bullet \to Z$ comme $\mathrm{cosq}_N \alpha_\bullet$. On a alors $Z_{\bullet \leqslant N} = W_\bullet$, et $\varepsilon_\bullet$ est un hyperrecouvrement propre de Z.

Lemme 3.3. *Soient f et N comme en 3.2. Il existe un ouvert dense U de S, un homéomorphisme universel $U' \to U$, un ouvert V_1 de $Y_{U'}$ dense fibre à fibre, un homéomorphisme universel $V' \to V_1$, et un diagramme commutatif*

(3.3.1)
$$\begin{tikzcd} X_\bullet \arrow[r, "j_\bullet"] \arrow[d] & Z_\bullet \arrow[d, "\varepsilon_\bullet"] \\ X_{V'} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_{V'}"] & Z \arrow[dl, "h"] \\ V' & \end{tikzcd} ,$$

où : - j est une immersion ouverte d'image dense ;

- $j_\bullet$ est une immersion ouverte simpliciale, et le carré est cartésien ;

- h est propre, et $\varepsilon_\bullet$ est un hyperrecouvrement propre ;

- pour $i \leqslant N$, le composé $h\varepsilon_i$ est propre et lisse et $Z_i - X_i$ est le support d'un diviseur à croisements normaux stricts D_i relativement à V'.

La démonstration est analogue à celle de 3.2. On peut supposer S intègre, de point générique η. On choisit une clôture parfaite k de $k(\eta)$. Soient $y_1, \cdots, y_r$ les points maximaux de Y_k. Pour chaque i, on choisit une clôture parfaite k_i de $k(y_i)$, et une factorisation de $X_{k_i} \to \operatorname{Spec} k_i$ en $X_{k_i} \overset{u_i}{\to} T_i \overset{v_i}{\to} \operatorname{Spec} k_i$, où u_i est une immersion ouverte dense, et v_i un morphisme propre. A l'aide du théorème de de Jong, on construit comme précédemment un hyperrecouvrement N-tronqué $(\alpha_i)_\bullet : (W_i)_\bullet \to T_i$, où pour $m \leqslant N$, $(W_i)_m$ est lisse sur k_i et $X_{k_i} \times_T (W_i)_m$ le complément d'un diviseur à croisements normaux stricts dans $(W_i)_m$. On descend ces objets à des extensions finies radicielles k'_i de k_i, puis on les étend au-dessus d'un revêtement fini radiciel R d'un ouvert dense V de Y_k : on obtient un diagramme

(3.3.2)
$$\begin{tikzcd} X_R \times_T P_\bullet \arrow[r] \arrow[d] & P_\bullet \arrow[d, "\alpha_\bullet"] \\ X_R \arrow[r] \arrow[d, "f_R"] & P \arrow[dl] \\ R & \end{tikzcd} ,$$

où $X_R \to P$ est une immersion ouverte dominante, $\alpha_\bullet$ est un hyperrecouvrement propre N-tronqué, P_i est lisse sur R pour $i \leqslant N$ et $X_R \times_T P_i$ le complément d'un diviseur à croisements normaux stricts dans P_i relativement à R. On descend $R \to V$ et (3.3.2) à une extension finie radicielle k' de k, puis (notant encore par les mêmes lettres les objets descendus) on étend $R \to V \subset Y_{k'}$ en $V' \to V_1 \subset Y_{U'}$, $X_R \to P$ en $X_{V'} \to Z$, et l'hyperrecouvrement $P_\bullet \to P$ en un hyperrecouvrement N-tronqué $Z.$ de Z, de manière à assurer lissité et diviseur à croisements normaux strict en chaque degré relativement à V'. Enfin on prolonge $Z_\bullet$ en un hyperrecouvrement par le N-cosquelette, obtenant ainsi le diagramme (3.3.1) désiré.

Le lemme suivant est un résultat de Gabber ([15], 1.4) :

Lemme 3.4. *Soit $f : X \to Y$ comme en 2.1. On suppose S de dimension finie. Il existe alors un entier c tel que, pour tout nombre premier ℓ, et tout faisceau constructible F de ℓ-torsion sur X, on ait $R^q f_* F|S[1/\ell] = 0$ pour tout $q > c$.*

Lemme 3.5. *Soient A une catégorie abélienne, K un complexe de A, muni d'une filtration décroissante $(F^p K)_{p\in\mathbf{Z}}$. On considère la suite spectrale correspondante*

$$E(K) : E_1^{pq} = H^{p+q}(\mathrm{gr}^p K) \Rightarrow H^{p+q}(K).$$

On suppose que, pour tout p et tout $i < p$, $H^i(\mathrm{gr}^p K) = 0$. Soit $n \in \mathbf{Z}$. Alors, pour tous p, q tels que $p + q \leqslant n$ et tout $r \geqslant 1$, la projection $K \to K/F^{n+2}K$ induit un isomorphisme

$$E_r^{pq}(K) \xrightarrow{\sim} E_r^{pq}(K/F^{n+2}K),$$

où $K/F^{n+2}K$ est muni de la filtration quotient.

C'est standard. Nous donnons une démonstration, faute de référence. Pour $m \leqslant n$, la factorisation de $K \to K/F^{m+2}K$ à travers $K/F^{n+2}K$ montre qu'on peut se borner à supposer $p + q = n$. On observe d'abord que l'hypothèse entraîne que, pour $i < a \leqslant b$, $H^i(F^a K/F^b K) = 0$. Posons

$L = K/F^{n+2}K$. On a $H^n(\mathrm{gr}^p K) = H^n(\mathrm{gr}^p L) = 0$ pour $p > n$, et pour $p \leqslant n$, $\mathrm{gr}^p K = \mathrm{gr}^p L$. L'assertion est donc vérifiée pour $r = 1$. On a, par définition,

$$E_{r+1}^{pq}(K) = Z_r^{pq}(E_1)/B_r^{pq}(E_1),$$

avec, pour $p + q = n$,

$$Z_r^{pq}(E_1) = \mathrm{Ker}\ \delta : H^n(\mathrm{gr}^p K) \to H^{n+1}(F^{p+1}K/F^{p+r}K),$$

(resp.

$$B_r^{pq}(E_1) = \mathrm{Im}\ \delta : H^{n-1}(F^{p-r+1}K/F^pK) \to H^n(\mathrm{gr}^{\mathrm{p}}K)),$$

où δ est l'opérateur bord associé à la suite exacte

$$0 \to F^{p+1}K/F^{p+r}K \to F^pK/F^{p+r}K \to \mathrm{gr}^pK \to 0,$$

(resp.

$$0 \to \mathrm{gr}^pK \to F^{p-r+1}K/F^{p+1}K \to F^{p-r+1}K/F^pK \to 0).$$

On peut supposer $p \leqslant n$. On a $F^{p-r+1}K/F^{p+1}K = F^{p-r+1}L/F^{p+1}L$, d'où, trivialement, $B_r^{pq}(E_1)(K) = B_r^{pq}(E_1)(L)$. Pour $p+r \leqslant n+1$, $F^pK/F^{p+r}K = F^pL/F^{p+r}L$, donc $Z_r^{pq}(E_1)(K) = Z_r^{pq}(E_1)(L)$. Supposons $p + r \geqslant n + 2$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^n(\mathrm{gr}^pK) \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & H^{n+1}(F^{p+1}K/F^{p+r}K) \arrow[d, "u"] \\
H^n(\mathrm{gr}^pL) \arrow[r] & H^{n+1}(F^{p+1}L/F^{p+r}L)
\end{tikzcd},$$

où u est la projection canonique, et les flèches horizontales sont les opérateurs δ. On a $F^{p+1}L/F^{p+r}L = F^{p+1}K/F^{n+2}K$, et la suite exacte

$$0 \to F^{n+2}K/F^{p+r}K \to F^{p+1}K/F^{p+r}K \to F^{p+1}K/F^{n+2}K \to 0$$

montre que u est injective, et donc que $Z_r^{pq}(E_1)(K) = Z_r^{pq}(E_1)(L)$, ce qui achève la démonstration.

3.6. Démonstration de 2.1 (1)

La partie (a) résulte de ([1], XVII, 5.2.8.1, 5.2.10, 5.3.6). Prouvons (b). On peut supposer S intègre, de point générique η. On raisonne par récurrence sur $\dim Y_\eta$. Compte tenu de la commutation de $Rf_!$ à tout changement de base $Y' \to Y$, il suffit de montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de η et un ouvert V de Y_U, avec V_η dense dans Y_η, tel que, pour tout ℓ et tout $n \geqslant 1$, $R^q(f_V)_!(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$ soit lisse pour tout q, où $f_V : X_V \to V$ est déduit de f par restriction à V. Choisissons un diagramme (3.3.1), avec $N = 2d + 1$.

Posons $f' = f_{V'}$, $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z} = \Lambda$. Il s'agit de montrer que, pour tout $i \leqslant 2d$, $R^i f'_! \Lambda | V'[1/\ell]$ est lisse. Le carré de (3.3.1) étant cartésien, on a $\varepsilon^*_\bullet(j_!\Lambda) = j_{\bullet !}\Lambda$, et par descente cohomologique, $j_!\Lambda = R\varepsilon_{\bullet *} j_{\bullet !}\Lambda$. Donc

$$Rf'_!\Lambda|V'[1/\ell] = Rh_* R\varepsilon_{\bullet *} j_{\bullet !}\Lambda|V'[1/\ell] = R(h\varepsilon_\bullet)_* j_{\bullet !}\Lambda|V'[1/\ell],$$

d'où une suite spectrale

$$E_1^{pq} = R^q(h\varepsilon_p)_*(j_{p!}\Lambda)|V'[1/\ell] \Rightarrow R^{p+q} f'_!\Lambda|V'[1/\ell]. \tag{3.6.1}$$

Si $\varepsilon_{\leqslant N} : Z_{\leqslant N} \to Z$ désigne la restriction de $\varepsilon_\bullet$ à l'objet simplicial tronqué en degré $\leqslant N$, et $h_{\leqslant N} = h\varepsilon_{\leqslant N}$, on a de même une suite spectrale

$$(E_{\leqslant N})_1^{pq} = R^q(h\varepsilon_p)_*(j_{p!}\Lambda)|V'[1/\ell] \Rightarrow R^{p+q}(h_{\leqslant N})_*(j_{\leqslant N})_!\Lambda|V'[1/\ell], \tag{3.6.2}$$

et un morphisme naturel r de (3.6.1) dans (3.6.2). D'après 3.5, r induit un isomorphisme

$$E_\infty^{pq} \xrightarrow{\sim} (E_{\leqslant N})_\infty^{pq}$$

pour $p + q = i \leqslant 2d$. Comme la catégorie des faisceaux lisses sur $V'[1/\ell]$ est stable par noyau, conoyau et extension, il suffit donc de montrer que E_1^{pq} est lisse pour $p+q \leqslant 2d$. Comme pour $p \leqslant N = 2d+1$ (*a fortiori* pour $p \leqslant 2d$), $h\varepsilon_p$ est propre et lisse et $Z_p - X_p$ le support d'un diviseur à croisements normaux stricts relativement à V', la conclusion découle donc de 3.1 (ii).

3.7. Démonstration de 2.1 (2). Prouvons (a). Soit c un entier comme dans 3.4. D'après ([1] XVII, 5.2.11) on a, pour tout ℓ, tor.amp $Rf_*(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})|Y[1/\ell] \subset [0, c]$. Choisissons un diagramme (3.2.1) comme en 3.2, avec $N = c+1$. Posons $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z} = \Lambda$. Comme $\varepsilon'_\bullet : X_\bullet \to X_{U'}$, induit par $\varepsilon_\bullet$, est un hyperrecouvrement propre, on a $\Lambda_{X_{U'}} = R\varepsilon'_{\bullet *}\Lambda$, donc

$$Rf_{U' *}\Lambda = R(h\varepsilon_\bullet)_* Rj_{\bullet *}\Lambda,$$

d'où une suite spectrale

$$E_1^{pq} = R^q(h\varepsilon_p)_*(Rj_{p*}\Lambda)|Y_{U'}[1/\ell] \Rightarrow R^{p+q} f_*\Lambda|Y_{U'}[1/\ell]. \tag{3.7.1}$$

Il suffit de montrer que $Rf_{U'*}\Lambda|Y_{U'}[1/\ell] \in D_c^b(Y_{U'}[1/\ell], \Lambda)$ et commute à tout changement de base $S' \to U'[1/\ell]$. Par le même argument que précédemment, utilisant 3.7 et (3.7.1), il suffit de montrer que, pour tout ℓ, et tous p, q tels que $p + q \leqslant c$, $R^q(h\varepsilon_p)_*(Rj_{p*}\Lambda)|Y_{U'}[1/\ell]$ est constructible, de formation compatible à tout changement de base $S' \to U'[1/\ell]$. Comme $g_{U'}h\varepsilon_p$ est lisse pour $p \leqslant N$, et $Z_p - X_p$ le support d'un diviseur à croisements normaux stricts relativement à U', d'après 3.1 $Rj_{p*}\Lambda|Z_p[1/\ell]$ est dans $D_c^b(Z_p[1/\ell], \Lambda)$ et est de formation compatible à tout changement de base $S' \to U'[1/\ell]$. Comme $h\varepsilon_p$ est propre, la même propriété vaut pour $R^q(h\varepsilon_p)_*(Rj_{p*}\Lambda)|Y_{U'}[1/\ell]$, ce qui achève la démonstration de (a).

Prouvons (b). Il suffit d'établir l'assertion suivante :

(*) *Il existe, pour p, q tels que $p+q \leqslant c$, un ouvert dense $W_{pq} \subset U'$ et une décomposition $\mathcal{S}_{pq}$ de $Y|W_{pq}$ en parties localement fermées Y_i, $i \in I_{pq}$, tels que, pour tout ℓ, tout $n \geqslant 1$, tous p, q tels que $p+q \leqslant c$, et tout $i \in I_{pq}$, $R^q(h\varepsilon_p)_*(Rj_{p*}\Lambda)|Y_i[1/\ell]$ soit lisse et de formation compatible à tout changement de base $S' \to W_{pq}$.*

En effet, si W est l'intersection des W_{pq}, choisissant une décomposition $\mathcal{S}$ de $Y|W$ en Z_i, $i \in I$ raffinant les $\mathcal{S}_{pq}$, on obtient que, pour $p+q \leqslant c$, $R^q(h\varepsilon_p)_*(Rj_{p*}\Lambda)|Z_i[1/\ell]$ est lisse et de formation compatible à tout changement de base $S' \to W$. Par 3.5 et (3.7.1), il en résulte que la même propriété est satisfaite par les $R^m(h\varepsilon_\bullet)_*(Rj_{\bullet *}\Lambda)|Z_i[1/\ell] = R^m f_{W*}\Lambda|Z_i[1/\ell]$ pour tout $m \leqslant c$.

Il reste à établir l'assertion (*). Elle est un cas particulier du résultat suivant, corollaire de 2.1 (1) :

Lemme 3.8. *Soit un diagramme commutatif*

(3.8.1)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & Z \arrow[d, "h"] & D \arrow[l] \arrow[dl] \\ & Y \arrow[d, "g"] & \\ & S & \end{tikzcd},$$

où h est propre, g de type fini, gh lisse, $D = D_1 + \cdots + D_m \subset Z$ un diviseur à croisements normaux stricts dans Z relativement à S, et j l'inclusion de $Z - D$. Il existe un ouvert dense W de S et une décomposition $\mathcal{S}$ de Y_W en parties localement fermées Y_i, $i \in I$, tels que, pour tout $k \geqslant 0$, tout ℓ, tout n, et tout $i \in I$,$R^k f_*(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})|Y_i[1/\ell]$ ($= R^k h_* Rj_*(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})|Y_i 1/\ell]$) soit lisse et de formation compatible à tout changement de base $S' \to W$.

Posons $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z} = \Lambda$. D'après 3.1 (i), appliqué ici au morphisme lisse $gh : Z \to S$, la suite spectrale de $f = hj$ s'écrit

(3.8.2)
$$E_2^{pq} = \oplus_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_q \leqslant m} R^p h_* \Lambda_{D_{i_1 \cdots i_q}}(-q)|Y[1/\ell] \Rightarrow R^{p+q} f_*\Lambda|Y[1/\ell],$$

où $D_{i_1\cdots i_q} = D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_q}$, et elle commute à tout changement de base $S' \to S[1/\ell]$. Soit $h_{i_1\cdots i_q} : D_{i_1\cdots i_q} \to Y$ la restriction de h. C'est un morphisme propre. Appliquant 2.1 (1) (b) à $h_{i_1\cdots i_q}$, on trouve, pour tout p, un ouvert dense U_{pq} de S, et une décomposition $\mathcal{S}_{pq}$ de $Y_{U_{pq}}$ en parties localement fermées Y_i, $i \in I_{pq}$ tels que, pour tout ℓ, tout $n \geqslant 1$, et tout $i \in I_{pq}$, $R^p h_* \Lambda_{D_{i_1 \cdots i_q}}(-q)|Y_i[1/\ell]$ soit lisse, et de formation compatible à tout changement de base $S' \to U_{pq}[1/\ell]$. Prenant, sur $U = \cap_{pq} U_{pq}$ un raffinement commun $\mathcal{S} = (Y_i)_{i \in I}$ des $\mathcal{S}_{pq}$, les $R^p h_* \Lambda_{D_{i_1 \cdots i_q}}(-q)|Y_i[1/\ell]$ sont lisses pour tout (p,q) et tout $i \in I$, et de formation compatible à tout changement de base $S' \to U$. Par (3.8.2), les $R^k f_*(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})|Y_i[1/\ell]$ vérifient la même propriété, ce qui prouve 3.8 et achève la preuve de 2.1 (2).

4 Application aux représentations ℓ-adiques

4.1. Les conditions (B) et (ST). Soient k un corps de nombres, $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, Γ_k le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Soit L un ensemble de nombres premiers. Pour chaque $\ell \in L$, soit G_ℓ un groupe de Lie ℓ-adique localement compact, et soit $\rho_\ell : \Gamma_k \to G_\ell$ un homomorphisme continu. On en déduit un homomorphisme continu

$$\rho = (\rho_\ell)_{\ell \in L} : \Gamma_k \to \prod_{\ell \in L} G_\ell. \tag{4.1.1}$$

Serre [27] a donné un critère pour que la famille (ρ_ℓ) soit *indépendante*, i. e. que l'on ait

$$\rho(\Gamma_k) = \prod_{\ell \in L} \rho_\ell(\Gamma_k). \tag{4.1.2}$$

Ce critère fait intervenir les conditions (B) et (ST) ci-après.

(B) *Il existe un entier n tel que, pour tout $\ell \in L$, $\rho_\ell(\Gamma_k)$ soit isomorphe à un sous-quotient de* $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}_\ell)$.

(Par *sous-quotient* on entend un quotient d'un sous-groupe fermé.) La famille (ρ_ℓ) est dite *bornée* si la condition (B) est satisfaite.

Soient R l'anneau des entiers de k, $S = \mathrm{Spec}\, R$, $\eta = \mathrm{Spec}\, k$, $\overline{\eta} = \mathrm{Spec}\, \overline{k}$. Pour chaque point fermé s de S, soit K_s le corps des fractions de $\widehat{\mathcal{O}_{S,s}}$, p_s la caractéristique du corps résiduel k_s, $\overline{K_s}$ une clôture algébrique de K_s contenant $\overline{k}$, $I_s \subset \Gamma_k$ le sous-groupe d'inertie correspondant (qui, à conjugaison près, ne dépend pas du choix du plongement $\overline{k} \subset \overline{K_s}$).

(ST) *Il existe une partie fermée finie $T \subset S$ telle que les conditions (i) et (ii) suivantes soient satisfaites :*

(i) Pour tout point fermé $s \in S - T$ et tout $\ell \in L$, $\ell \neq p_s$, ρ_ℓ est non ramifié en s, i. e. $\rho_\ell(I_s) = 1$;

(ii) Pour $s \in T$ et tout $\ell \in L$, $\ell \neq p_s$, $\rho_\ell(I_s)$ est un pro-ℓ-groupe.

Nous pouvons maintenant énoncer le critère de Serre ([27], th. 1) :

Théorème 4.2. *Avec les notations de 4.1, si la famille* (ρ_ℓ) *est bornée et s'il existe une extension finie* k_1 *de* k *contenue dans* $\overline{k}$ *telle que la restriction de* (ρ_ℓ) *à* Γ_{k_1} *vérifie (ST), alors il existe une extension finie* k' *de* k *contenue dans* $\overline{k}$ *telle que la restriction de* (ρ_ℓ) *à* $\Gamma_{k'}$ *soit indépendante (i. e. vérifie* $\rho(\Gamma_{k'}) = \prod \rho_\ell(\Gamma_{k'})$*).*

Ce critère s'applique aux représentations ℓ-adiques venant de la cohomologie :

Théorème 4.3. *Soit* X *un schéma séparé de type fini sur* k*, et soit* $i \in \mathbf{Z}$*. Pour* $\ell \in L$*, désignons par* V_ℓ *le groupe de cohomologie* $H^i_c(X_{\overline{k}}, \mathbf{Q}_\ell)$ *ou* $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbf{Q}_\ell)$*, et considérons la représentation naturelle*

$$\rho_\ell : \Gamma_k \to \mathrm{GL}(V_\ell).$$

Alors la famille (ρ_ℓ) *est bornée, et vérifie* (ST) *après passage à une extension finie de* k*.*

Compte tenu de 4.2, on en déduit :

Corollaire 4.4. *Avec les notations de 4.3, il existe une extension finie* k' *de* k *telle que la restriction de* (ρ_ℓ) *à* $\Gamma_{k'}$ *soit indépendante.*

4.5. Démonstration de 4.3. Que la famille (ρ_ℓ) soit bornée découle de 1.3 : il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que, pour tout ℓ, $\rho_\ell(\Gamma_k)$ soit isomorphe à un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}_\ell)$.

Soient U un ouvert non vide de S et $\mathcal{X}$ un schéma séparé de type fini sur U tel que $\mathcal{X}_\eta = X$. Soient $f : \mathcal{X} \to U$ la projection, et, si $V_\ell = H^i_c(X_{\overline{k}}, \mathbf{Q}_\ell)$ (resp. $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbf{Q}_\ell)$), notons F_ℓ le $\mathbf{Z}_\ell$-faisceau $R^i f_! \mathbf{Z}_\ell$ (resp. $R^i f_* \mathbf{Z}_\ell$) sur $U[1/\ell]$. La représentation ρ_ℓ est donnée par la fibre de F_ℓ en $\overline{\eta}$. D'après 2.6, on peut rétrécir U de manière que, pour tout ℓ, le faisceau $F_\ell | U[1/\ell]$ soit lisse. En particulier, la représentation ρ_ℓ est non ramifiée en tout point fermé s de U tel que $\ell \neq p_s$. La famille (ρ_ℓ) vérifie donc (ST) (i).

Prouvons que, quitte à remplacer k par une extension finie k_1, elle vérifie (ST) (ii). Soit T l'ensemble fermé fini $S - U$. Soit $s \in T$. D'après ([2], 6.3.2), il existe un sous-groupe ouvert I'_s de I_s tel que, pour tout $\ell \neq p_s$, $\rho_\ell(I'_s) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}_\ell)$ soit formé d'éléments unipotents. Il existe donc une extension finie K'_s de K_s contenue dans $\overline{K_s}$ telle que $\rho_\ell(I_{K'_s})$ soit formé d'éléments unipotents, où $I_{K'_s} \subset \mathrm{Gal}(\overline{K_s}/K'_s)$ désigne le sous-groupe d'inertie. L'image de $I_{K'_s}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_\ell)$ est donc un ℓ-groupe, et $\rho_\ell(I_{K'_s})$ est un pro-ℓ-groupe. Soit $k(s)$ une extension finie de k telle que le complété de $k(s)$ en s soit isomorphe à K'_s. Soit $R(s)$ l'anneau des entiers de $k(s)$. En tout point fermé t de $\mathrm{Spec}\, R(s)$ au-dessus de U (resp. T), et tel que $\ell \neq p_s$, la restriction de ρ_ℓ à $\Gamma_{k(s)}$ est non ramifiée (resp. $\rho_\ell(I_t)$ est un pro-ℓ-groupe). Soit k_1 une extension composée des $k(s)$ pour $s \in T$. La restriction de la famille (ρ_ℓ) à Γ_{k_1} continue de vérifier (ST) (i), et vérifie de plus (ST) (ii), ce qui achève la démonstration.

Remarque 4.6. Serre observe que les conclusions de 4.3 et 4.4 sont encore valides si l'on remplace V_ℓ par E_ℓ, où E_ℓ désigne le groupe de cohomologie $H^i_c(X_{\overline{k}}, \mathbf{Z}_\ell)$ (resp. $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbf{Z}_\ell)$). L'argument qui suit lui est dû.

Le groupe profini $G_\ell = \mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}_\ell}(E_\ell)$ est un groupe de Lie ℓ-adique. D'après 1.2, la famille des G_ℓ vérifie (B), pour un entier n majorant les dimensions des $E_\ell/\ell E_\ell$. La condition (ST) (i) est satisfaite, comme on l'a vu dans la démonstration de 4.3. Il reste à vérifier (ST) (ii). Soit E'_ℓ le sous-groupe de torsion de E_ℓ, de sorte qu'on a une suite exacte

$$0 \to E'_\ell \to E_\ell \to L_\ell \to 0,$$

où L_ℓ désigne l'image de E_ℓ dans $H^i_c(X_{\overline{k}}, \mathbf{Q}_\ell)$ (resp. $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbf{Q}_\ell)$). Comme, d'après 1.2, il n'y a qu'un nombre fini de E'_ℓ qui sont non nuls, quitte à faire une extension finie de k, on peut supposer que Γ_k opère trivialement sur tous les E'_ℓ. Par l'argument de 4.5, il existe donc, pour tout $s \in S$, après extension finie de K_s, un sous groupe ouvert I'_s de I_s tel que, pour tout $\ell \neq p_s$, et tout $g \in I'_s$, $\rho_\ell(g)$ opère trivialement sur E'_ℓ et de façon unipotente sur L_ℓ. L'ordre profini de $\rho_\ell(g)$ est alors une puissance de ℓ, et $\rho_\ell(I'_s)$ est un pro-ℓ-groupe. On conclut comme dans 4.5.

5 Compléments et questions

Les hypothèses du critère 4.2 n'imposent aucune condition aux représentations ρ_ℓ le long de la "diagonale" $\ell = p_s$. Dans le cas où elles viennent de la cohomologie, on a cependant le renforcement suivant de 4.3 :

Théorème 5.1. *Les hypothèses et notations étant celles de 4.3, après passage à une extension finie de k, la famille ρ_ℓ vérifie (ST) et la condition suivante :*

(ST') Il existe une partie fermée finie T de S telles que :

(i) pour tout point fermé $s \in S - T$ et tout $\ell \in L$, $\ell = p_s$, la représentation $\rho_\ell|\mathrm{Gal}(\overline{K_s}/K_s)$ soit cristalline :

(ii) pour tout $s \in T$ et $\ell = p_s$, la représentation $\rho_\ell|\mathrm{Gal}(\overline{K_s}/K_s)$ soit semi-stable.

(Rappelons ([11]) qu'une représentation (continue) de $G = \mathrm{Gal}(\overline{K_s}/K_s)$ dans un $\mathbf{Q}_p$-expace vectoriel de dimension finie H est *cristalline* (resp. *semi-stable*) si $\dim_{(K_s)_0}(B_{crys} \otimes_{\mathbf{Q}_p} H)^G = \dim_{\mathbf{Q}_p} H$ (resp. $\dim_{(K_s)_0}(B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} H)^G = \dim_{\mathbf{Q}_p} H$), où $(K_s)_0$ est le corps des fractions de $W(k_s)$.)

Lemme 5.2. *Soient A un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K de caractéristique zéro et de corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$. Soient $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Soit m un entier $\geqslant 0$ et soit $X_\bullet$ un schéma simplicial m-tronqué au-desus de Spec A. Soit $D_\bullet \subset X_\bullet$ un sous-schéma simplicial (m-tronqué) fermé de $X_\bullet$. Soit $j_\bullet : U_\bullet = X_\bullet - D_\bullet \to X_\bullet$ l'inclusion.*

(1) On suppose que, pour $0 \leqslant r \leqslant m$, X_r est propre et lisse sur $\mathrm{Spec}\, A$ et $D_r \subset X_r$ est un diviseur à croisements normaux relatifs. Alors, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, la représentation de G_K sur $H^i((U_\bullet)_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$ (resp. $H^i((X_\bullet)_{\overline{K}}, (j_\bullet)_!\mathbf{Q}_p)$) est cristalline.

(2) On suppose que, pour $0 \leqslant r \leqslant m$, X_r est propre sur $\mathrm{Spec}\, A$ et le couple (X_r, D_r) est strictement semi-stable au sens de de Jong ([9], 6.3). Alors, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, la représentation de G_K sur $H^i((U_\bullet)_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$ (resp. $H^i((X_\bullet)_{\overline{K}}, (j_\bullet)_!\mathbf{Q}_p)$) est semi-stable.

C'est un corollaire des théorèmes de comparaison de Yamashita [30], généralisant ceux de Tsuji dans [29]. Considérons d'abord le cas de $H^i((U_\bullet)_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$, et plaçons-nous dans la situation de (2). Notons $Y_\bullet = (X_\bullet)_k$ la fibre spéciale. Munissons $X_\bullet$ de la log structure $M_{X_\bullet} = \mathcal{O}_{X_\bullet} \cap (v_\bullet)_*\mathcal{O}^*_{V_\bullet}$, où $v : V_\bullet = X_\bullet - Y_\bullet - D_\bullet$ est l'inclusion, et $Y_\bullet$ de la log structure induite. Le log schéma simplicial tronqué $Y_\bullet$ est log lisse en chaque degré sur $\mathrm{Spec}\, k$, muni de la log structure N^0 associée à $\mathbf{N} \to k$, $1 \mapsto 0$. Pour $n \geqslant 1$, on note $H^i((Y_\bullet, M_{Y_\bullet})/(W_n, N^0_n))$ sa cohomologie log cristalline, où $W_n = W_n(k)$ est muni du relèvement de Teichmüller N^0_n de N^0, et l'on pose

$$H^i_{logcrys}(Y_\bullet, M_{Y_\bullet}) = K_0 \otimes_W \mathrm{proj.lim}_n H^i((Y_\bullet, M_{Y_\bullet})/(W_n, N^0_n)),$$

où $K_0 = \mathrm{Frac}(W)$. Dans (*loc. cit.*, §6) Yamashita construit un isomorphisme

$$B_{st} \otimes_{K_0} H^i_{logcrys}(Y_\bullet, M_{Y_\bullet}) \xrightarrow{\sim} B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} H^i((U_\bullet)_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p) \tag{5.2.1}$$

compatible aux actions de φ, N, G_K, et aux filtrations de Hodge après tensorisation avec B_{dR}, $K \otimes_{K_0} H^i_{logcrys}(Y_\bullet, M_{Y_\bullet})$ étant identifié à $H^i((X_\bullet)_K, \Omega^\cdot_{(X_\bullet)_K/K}(\log(D_\bullet)_K))$ par la variante simpliciale de l'isomorphisme de Hyodo-Kato. En particulier, la représentation de G_K sur $H^i((U_\bullet)_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$ est semi-stable. Plaçons-nous maintenant dans la situation de (1). Notons $L_{X_\bullet}$ la log structure $\mathcal{O}_{X_\bullet} \cap (j_\bullet)_*\mathcal{O}_{U_\bullet}$ sur $X_\bullet$ définie par le diviseur $D_\bullet$, et $L_{Y_\bullet}$ son image inverse sur $Y_\bullet$. Le schéma simplicial tronqué $Y_\bullet$, muni de $L_{Y_\bullet}$, est log lisse en chaque degré sur $\mathrm{Spec}\, k$, muni de la log structure triviale. Pour $n \geqslant 1$, notons $H^i((Y_\bullet, L_{Y_\bullet})/W_n)$ sa cohomologie log cristalline (W_n étant muni de la log structure triviale), et posons

$$H^i_{logcrys}(Y_\bullet, L_{Y_\bullet}) = K_0 \otimes_W \varprojlim_n H^i((Y_\bullet, L_{Y_\bullet})/W_n).$$

Le morphisme naturel $(Y_\bullet, M_{Y_\bullet}) \to (Y_\bullet, L_{Y_\bullet})$ (au-dessus de $(\operatorname{Spec} k, N^0) \to \operatorname{Spec} k$) induit, pour tout n, un homomorphisme

$$H^i((Y_\bullet, L_{Y_\bullet})/W_n) \to H^i((Y_\bullet, M_{Y_\bullet})/(W_n, N_n^0)), \tag{5.2.2}$$

compatible à φ et N, N étant nul sur le membre de gauche.

(*) *L'homomorphisme (5.2.2) est un isomorphisme.*

Il est en effet induit par un homomorphisme

$$Ru_{(Y_\bullet, L_{Y_\bullet})/W_n *}\mathcal{O}_{(Y_\bullet, L_{Y_\bullet})/W_n} \to Ru_{(Y_\bullet, M_{Y_\bullet})/(W_n, N_n^0)*}\mathcal{O}_{(Y_\bullet, M_{Y_\bullet})/(W_n, N_n^0)}$$

(déduit de $(Y_\bullet, M_{Y_\bullet}) \to (Y_\bullet, L_{Y_\bullet})$), lequel est compatible à la restriction aux composantes de $Y_\bullet$. Il suffit donc de montrer que, si Y est un schéma lisse sur k et $Z \subset Y$ est un diviseur à croisements normaux stricts, l'homomorphisme (déduit de $(Y, M_Y) \to (Y, L_Y)$, où L_Y est la log structure sur Y définie par Z)

$$Ru_{(Y, L_Y)/W_n *}\mathcal{O}_{(Y, L_Y)/W_n} \to Ru_{(Y, M_Y)/(W_n, N_n^0)*}\mathcal{O}_{(Y, L_Y)/(W_n, N_n^0)} \tag{5.2.3}$$

est un isomorphisme. C'est une question locale sur Y pour la topologie étale. On peut supposer que le couple (Y, Z) est relevé en $(\tilde{Y}, \tilde{Z})/W_n$, où $\tilde{Y}$ est lisse sur W_n et $\tilde{Z}$ est un diviseur à croisements normaux relatifs. Notons $L_{\tilde{Y}}$ la log structure sur $\tilde{Y}$ définie par $\tilde{Z}$, et soit $(\tilde{Y}, M_{\tilde{Y}})$ le log schéma déduit de $(\tilde{Y}, L_{\tilde{Y}})$ par le changement de base $(\operatorname{Spec} W_n, N_n^0) \to \operatorname{Spec} W_n$. On a

$$Ru_{(Y, L_Y)/W_n *}\mathcal{O}_{(Y, L_Y)/W_n} = \Omega_{(\tilde{Y}, L_{\tilde{Y}})/W_n},$$

$$Ru_{(Y, M_Y)/(W_n, N_n^0)*}\mathcal{O}_{(Y, L_Y)/(W_n, N_n^0)} = \Omega_{(\tilde{Y}, M_{\tilde{Y}})/(W_n, N_n^0)},$$

et (5.2.3) est induit par la flèche canonique

$$\Omega_{(\tilde{Y}, L_{\tilde{Y}})/W_n} \to \Omega_{(\tilde{Y}, M_{\tilde{Y}})/(W_n, N_n^0)}.$$

Celle-ci est un isomorphisme, ce qui prouve (*). En particulier, l'opérateur N est nul sur
$H^i((Y_\bullet, M_{Y_\bullet})/(W_n, N_n^0))$. On a donc

$$\operatorname{Ker}(N | B_{st} \otimes_{K_0} H^i_{logcrys}(Y_\bullet, M_{Y_\bullet})) = B_{crys} \otimes_{K_0} H^i_{logcrys}(Y_\bullet, L_{Y_\bullet})$$

et (5.2.1) induit sur les noyaux de N un isomorphisme

$$B_{crys} \otimes_{K_0} H^i_{logcrys}(Y_\bullet, L_{Y_\bullet}) \xrightarrow{\sim} B_{crys} \otimes_{\mathbf{Q}_p} H^i((U_\bullet)_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p), \tag{5.2.4}$$

ce qui prouve (1) pour $H^i((U_\bullet)_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$.

La démonstration de (1) et (2) pour $H^i((X_\bullet)_{\overline{K}}, (j_\bullet)_! \mathbf{Q}_p)$ est analogue, les faisceaux structuraux $\mathcal{O}_{(Y_\bullet,*)/(W_n,*)}$ étant remplacés par les idéaux cristallins $K_{(Y_\bullet,*)/(W_n,*)}$ ([30], 1.5), où * désigne une log structure convenable.

5.3. Démonstration de 5.1. Comme dans 4.5, choisissons un ouvert non vide U de S et un schéma séparé de type fini $\mathcal{X}$ sur U tel que $\mathcal{X}_\eta = X$. Appliquons 3.2 à la projection $f : \mathcal{X} \to Y = U$. Soit m un entier $\geqslant i+1$. Quitte à rétrécir U, on peut trouver un diagramme commutatif de schémas simpliciaux

(5.3.1)
$$\begin{tikzcd} X_\bullet \arrow[r, "j_\bullet"] \arrow[d] & Z_\bullet \arrow[d, "\varepsilon_\bullet"] \\ \mathcal{X}_{U'} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_{U'}"] & Z \arrow[dl, "h"] \\ U' & \end{tikzcd} ,$$

où : - $U' \to U$ est un homéomorphisme universel ;

- j est une immersion ouverte d'image dense ;
- $j_\bullet$ est une immersion ouverte simpliciale, et le carré est cartésien ;
- h est propre, et $\varepsilon_\bullet$ est un hyperrecouvrement propre ;
- pour $n \leqslant m$, $h\varepsilon_n$ est (propre et) lisse et $Z_n - X_n$ est le support d'un diviseur à croisements normaux stricts D_n relativement à U'. Comme le corps de nombres k est de caractéristique nulle, la démonstration de 3.2 montre qu'on peut supposer que l'homéomorphisme universel $U' \to U$ est l'identité. Soit $T = S - U$. Soit $s \in U$. Avec les notations de 4.1, comme $\varepsilon_\bullet$ est un hyperrecouvrement propre, l'homomorphisme canonique

$$H^i(\mathcal{X}_{\overline{K_s}}, \mathbf{Q}_p) \to H^i((X_\bullet)_{\overline{K_s}}, \mathbf{Q}_p)$$

(où $p = p_s$) est un isomorphisme, $\mathrm{Gal}(\overline{K_s}/K_s)$ équivariant. Notons $X_{\leqslant m}$ le schéma simplicial m-tronqué déduit de $X_\bullet$. Comme $m \geqslant i+1$, d'après 3.5, l'homomorphisme de restriction

$$H^i((X_\bullet)_{\overline{K_s}}, \mathbf{Q}_p) \to H^i((X_{\leqslant m})_{\overline{K_s}}, \mathbf{Q}_p)$$

est un isomorphisme ($\mathrm{Gal}(\overline{K_s}/K_s)$ équivariant). Pour chaque $n \leqslant m$, $(X_n)|\mathrm{Spec}\,\widehat{\mathcal{O}_{S,s}}$ est le complément d'un diviseur à croisements normaux stricts relatifs dans le schéma propre et lisse $(Z_n)|\mathrm{Spec}\,\widehat{\mathcal{O}_{S,s}}$. D'après 5.2, la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{K_s}/K_s)$ sur $H^i((X_{\leqslant m})_{\overline{K_s}}, \mathbf{Q}_p)$ est cristalline. Il en est donc de même de $\rho_\ell|\mathrm{Gal}(\overline{K_s}/K_s)$ pour $V_\ell = H^i(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_\ell)$, $\ell = p_s$. Le cas de $H^i_c(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_\ell)$ se traite de façon analogue. On obtient donc (ST)' (i) (sans extension de k). Il reste à prouver qu'après extension finie k' de k, et le remplacement de S (resp. $U = S - T$) par le normalisé S' de S dans k' (resp. l'image inverse U' de U dans S'), on peut réaliser (ST)' (ii) en chaque point $s \in S' - U'$. Comme on l'a vu dans la démonstration de 4.5, il suffit de construire, pour chaque $s \in T$, une extension finie K'_s de K_s contenue dans $\overline{K_s}$ telle que la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{K_s}/K'_s)$ sur $H^i(\mathcal{X}_{\overline{K_s}}, \mathbf{Q}_p)$ (resp. $H^i_c(\mathcal{X}_{\overline{K_s}}, \mathbf{Q}_p)$) (où $p = p_s$) soit semi-stable. Ceci est démontré par Yamashita-Yasuda ([30], 6.3) [5], comme corollaire de (5.2 (2)) (par la méthode esquissée à la fin de l'introduction de [9]).

5.4 Coefficients ℓ-adiques uniformes. Les énoncés 2.1 et 2.5 posent le problème de construire une catégorie de familles de faisceaux ℓ-adiques (ou d'objets de catégories dérivées ℓ-adiques) vérifiant une stabilité uniforme en ℓ par les six opérations usuelles Rf_*, $Rf_!$, etc. quand celles-ci sont définies. Il y a deux types de questions :

(a) pour S noethérien irréductible, de point générique η, définir, sur des schémas X séparés de type fini sur S, des familles d'objets de $D^b_{ctf}(X, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$ (ou $D^b_c(X, \mathbf{Z}_\ell)$), dans un voisinage de η non précisé, mais indépendant de ℓ, stables (hors de ℓ) par les six opérations (*constructibilité générique uniforme*) ;

(b) pour S séparé de type fini sur un schéma noethérien régulier de dimension $\leqslant 1$, voire pour S noethérien quasi-excellent, définir, sur des schémas X séparés de type fini sur S, des familles d'objets de $D^b_{ctf}(X, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$ (ou $D^b_c(X, \mathbf{Z}_\ell)$) stables (hors de ℓ) par les six opérations (*constructibilité uniforme globale*).

Ces questions sont considérées par Orgogozo dans [22]. Il prouve, par d'autres méthodes, des généralisations importantes des résultats du §2. Signalons que des résultats d'unipotence uniforme, dans des situations relatives, avaient été obtenus par Pink [23]. [6]

5.5. Corps de fonctions. Soient k un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$, $\overline{k}$ une

5. Voir [31] pour un résumé de [30].

6. (ajouté en avril 2021) Les résultats de Katz-Laumon [18] cités dans la note de bas de page 1 apportent une réponse à (a) dans le cas où η est de caractéristique nulle. Les phénomènes de ramification sauvage en caractéristique positive obligent à des restrictions sur les familles mentionnées en (b). Les théorèmes de stabilité établis par Orgogozo dans [22] valent pour des familles vérifiant une condition introduite par Gabber, de constructibilité et modération uniformes pour la topologie des altérations. Un autre point de vue est développé par Guignard dans [14], où les familles considérées sont des familles E-compatibles (E un corps de nombres) en un sens plus fort que le sens habituel. Enfin, des travaux tout récents de Cadoret-Zheng [4], exploitant le point de vue des ultraproduits (déjà présent à la fin de [22]), présentent des résultats d'indépendance de ℓ pour des énoncés de type "Weil II".

clôture algébrique de k, $\Gamma_k = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Dans ([26], 10.1), Serre conjecture que, si E est un motif (pur) sur k, il existe une extension finie k' de k telle que la famille des représentations ℓ-adiques $\rho_\ell : \Gamma_k \to \mathrm{GL}_E(\mathbf{Q}_\ell)$ devienne indépendante sur k'. Nous avons vu que c'est le cas si k est un corps de nombres et $E = H^i(X)$, pour $i \in \mathbf{Z}$, où X est un schéma propre et lisse sur k, auquel cas $\mathrm{GL}_E(\mathbf{Q}_\ell) = \mathrm{GL}(H^i(X_{\overline{k}}, \mathbf{Q}_\ell))$, et même que cette propriété vaut plus généralement pour $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbf{Q}_\ell)$ ou $H^i_c(X_{\overline{k}}, \mathbf{Q}_\ell)$, où X est un schéma séparé de type fini sur k (4.3). On peut espérer que l'analogue de 4.3 est encore valable pour k un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$. [7] Une telle extension demanderait une généralisation convenable du critère de Serre 4.2 et pourrait faire appel aux résultats d'Orgogozo mentionnés plus haut. [8]

Références

[1] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3.* Lecture notes in Mathematics 305, Springer-Verlag, Berlin, 1973. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963-1964 (SGA 4) ; dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat.

[2] P. Berthelot, *Altération des variétés algébriques (d'après A. J. de Jong)*, Sém. Bourbaki 1995/1996, exposé **815**, Astérisque **241**, SMF, 1997, 273-311.

[3] G. Böckle, W. Gajda, S. Petersen, *Independence of ℓ-adic representations of geometric Galois groups.* J. Reine Angew. Math. 736 (2018), 69–93.

[4] A. Cadoret, W. Zheng, travail en préparation.

[5] B. Conrad, *Deligne's notes on Nagata compactifications*, preprint available from the author's homepage, 1997.

[6] P. Deligne, *La conjecture de Weil I*, Pub. Math. IHES 43 (1974), 273-307.

[7] P. Deligne, *Cohomologie étale* (SGA 4 1/2), Lecture Notes in Math. 569, Springer-Verlag 1977.

7. (ajouté en avril 2021) Cette extension de 4.3 a été prouvée par Gajda-Petersen [13].

8. (ajouté en avril 2021) Cette extension ne nécessite pas de généralisation de 4.2, et se fait par réduction à 4.3. L'analogue de 4.3 pour les corps de type fini sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geqslant 0$ a été établi par Böckle-Gajda-Petersen [3]. Il repose sur des résultats de Larsen et Pink, et non sur ceux de Nori utilisés dans [27]. Un ingrédient clé de leur démonstration ([3], 6.3, 7.4) est aussi un corollaire immédiat des résultats de [22].

[8] P. Deligne, *La conjecture de Weil II*, Publ. Math. IHES 52 (1980), 137-252.

[9] A. J. de Jong, *Smoothness, semi-stability and alterations*, Pub. Math. IHES 83 (1996), 51-93.

[10] T. Ekedahl, *On the adic formalism*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Progress in Math. 87, 1990, Birkhäuser, 197-218.

[11] J.-M. Fontaine, *Représentations p-adiques semi-stables*, dans *Périodes p-adiques* (Séminaire de Bures, 1988), Astérisque 223 (1994).

[12] O. Gabber, *Sur la torsion dans la cohomologie ℓ-adique d'une variété*, Note C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, t. 297 (26 septembre 1983), 179-182.

[13] W. Gajda, S. Petersen, *Independence of ℓ-adic Galois representations over function fields.* Compos. Math. 149 (2013), no. 7, 1091–1107.

[14] Q. Guignard, *Compatible systems of ℓ-adic sheaves.* arXiv :2101.00846v1, 2021.

[15] L. Illusie, *Cohomological dimension : first results*, Exposé XVIII_A in [16].

[16] *Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents.* Séminaire à l'École Polytechnique 2006–2008. Eds. Luc Illusie, Yves Laszlo and Fabrice Orgogozo. Avec la collaboration de Frédéric Déglise, Alban Moreau, Vincent Pilloni, Michel Raynaud, Joël Riou, Benoît Stroh, Michael Temkin and Weizhe Zheng. Astérisque No. 363-364 (2014). Société Mathématique de France, Paris, 2014.

[17] N. M. Katz, *Sums of Betti numbers in arbitrary characteristic.* Dedicated to Professor Chao Ko on the occasion of his 90th birthday. Finite Fields Appl. 7 (2001), no. 1, 29–44.

[18] N. M. Katz, G. Laumon, *Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 62 (1985), 361–418.

[19] W. Lütkebohmert, *On compactifications of schemes*, Manuscripta Math. 80 (1993), 95-111.

[20] F. Orgogozo, *Altérations et groupe fondamental premier à p*, Bull. SMF 131 (2003), 123-147.

[21] F. Orgogozo, *Le théorème de finitude*, Exp. XIII, dans [16].

[22] F. Orgogozo, *Constructibilité et modération uniformes en cohomologie étale.* Compos. Math. 155 (2019), no. 4, 711–757.

[23] R. Pink, Lettre à Nick Katz, 26 mai 1995.

[24] W. Sawin, A. Forey, J. Fresán, E. Kowalski, *Quantitative sheaf theory.* arXiv :2101.00635v2, 2021.

[25] J-P. Serre, *Résumés des cours au Collège de France*, Annuaire du Collège de France (1985-1986), 95-99.

[26] J-P. Serre, *Propriétés conjecturales des groupes de Galois motiviques et des représentations ℓ-adiques*, Motives, Proc. of Symp. in Pure Math. **55** (1994), Part I, 377-400, AMS.

[27] J-P. Serre, *Un critère d'indépendance pour une famille de représentations ℓ-adiques.* Comment. Math. Helv. 88 (2013), no. 3, 541–554.

[28] J. Suh, *Symmetry and parity in Frobenius action on cohomology.* Compos. Math. 148 (2012), no. 1, 295–303.

[29] T. Tsuji, *p-adic Hodge theory in the semi-stable reduction case*, Proc. of the ICM, Vol. II (Berlin 1998), Doc. Math. 1998, Extra Vol. II, 207-216.

[30] G. Yamashita, *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology for open varieties with semistable reduction*, preprint, 2009.

[31] G. Yamashita, *p-adic Hodge theory for open varieties.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris 349 (2011), no. 21-22, 1127–1130.

Luc Illusie
Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay Cedex, France — luc.illusie@wanadoo.fr