Grothendieck et la cohomologie étale

Luc Illusie

De toute l'œuvre de Grothendieck, c'est sans doute la cohomologie étale qui aura exercé l'influence la plus profonde sur l'évolution de la géométrie arithmétique dans les cinquante dernières années. Cela tient autant à la multiplicité des applications et développements qu'elle a suscités qu'à la fécondité du concept de localisation qui en est à l'origine. C'est l'une des théories cohomologiques les plus achevées. Par sa puissance, sa souplesse, sa beauté, elle a souvent servi de modèle.

1. Les débuts

Il semble que ce soit à l'issue de l'exposé de Serre au séminaire Chevalley du 21 avril 1958 [S] que Grothendieck ait conçu l'idée de la topologie étale. Serre y introduisait une notion de fibrés algébriques plus large que celle des fibrés localement triviaux pour la topologie de Zariski, les fibrés *localement isotriviaux*, qui sont, localement pour la topologie de Zariski, trivialisés par un revêtement étale fini. Grothendieck, enthousiaste, confia à Serre qu'il voyait déjà comment la "localisation étale", en un sens qui devait être précisé plus tard, donnerait non seulement "le bon H^1" (*), mais aussi "les bons H^i supérieurs" d'une "cohomologie de Weil". Il l'annoncera la même année au congrès international d'Edimbourg [Gr2] : "Such an approach was suggested to me by the *connections between sheaf-theoretic cohomology and cohomology of Galois groups on the one hand, and the classification of unramified coverings of a variety on the other* $\cdots$, and by Serre's idea that a "reasonable" algebraic principal fiber space $\cdots$ should become locally trivial on some covering *unramified* over a given point." Cependant, quelques années s'écoulèrent avant que cette idée ne prenne réellement forme : Grothendieck ne voyait pas comment démarrer. Il avait aussi d'autres occupations :

• ses exposés au séminaire Bourbaki sur les fondements de la géométrie algébrique [FGA] (géométrie formelle et géométrie algébrique, descente fidèlement plate, modules formels, construction de schémas de Hilbert et de Picard), qui se poursuivront jusqu'en mai 1962,

• sa série d'exposés au séminaire Cartan 1960-61 sur la géométrie analytique complexe,

• ses séminaires à l'IHES, SGA 1, 2, et 3, qui s'échelonnent de 1960 à 1963, et son séminaire à Harvard de l'automne 1961.

• la rédaction des EGA (EGA I sort en 1960, EGA II en 1961, EGA III en 1962-63, EGA IV, Première partie, en 1964).

D'autre part, des travaux de fondements étaient indispensables. D'abord, la notion même de *morphisme étale*, dans le cadre des schémas, n'avait pas encore été définie.

(*) Un point technique : Raynaud a donné des exemples de torseurs sous des schémas abéliens qui sont localement triviaux pour la topologie étale, mais non localement isotriviaux [R, p. 199-200]

Grothendieck le fera au début de SGA 1. Le choix de l'adjectif "étale", inspiré de la notion classique de "domaine étalé" en géométrie analytique complexe, sera, d'ailleurs, l'une de ses plus grandes réussites terminologiques. Les diverses définitions équivalentes des morphismes étales, lisses, et non ramifiés, leurs propriétés différentielles, les critères infinitésimaux serviront de base à tout l'édifice de la cohomologie étale. Les morphismes étales, analogues des isomorphismes locaux de la géométrie analytique complexe, permettent en quelque sorte de faire comme si l'on disposait, en géométrie algébrique, d'un théorème des fonctions implicites. Ce point de vue sera exploité quelques années plus tard par Artin dans sa théorie d'algébrisation (voir notamment [Ar2], [Ar3]). La localisation étale amenait à étudier l'opération inverse, le recollement, ou descente. Pour ce faire, Grothendieck introduira le langage des catégories fibrées ([FGA, Exp. 190], [SGA 1 VI]), que Giraud développera dans toute la généralité désirable ([Gi1], [Gi2]). Pour en revenir à la cohomologie étale, le premier objectif était l'étude du H^1, ce qui amenait à examiner le *groupe fondamental*. La construction, catégorique, que Grothendieck en donnera dans [SGA 1 V], ne sera pas dépassée. Elle sera imitée dans d'autres contextes (catégories tannakiennes, géométrie logarithmique, notamment). L'un des buts principaux de [SGA 1] était d'obtenir la structure du groupe fondamental *premier à* p d'une courbe lisse sur un corps algébriquement clos de caractéristique p, c'est-à-dire une description par générateurs et relations analogue à celle du cas transcendant [SGA 1 XIII 2.12]. En fait, les théorèmes de spécialisation pour le groupe fondamental qui sont à la base de cette description, en même temps que les théorèmes de type Lefschetz développés dans [SGA 2] donneront la clé des théorèmes fondamentaux de la cohomologie étale pour les coefficients de torsion.

Serre était sceptique sur la possibilité de comprendre les H^i supérieurs. D'ailleurs, comme le souligne Grothendieck dans [SGA 4 VII 2.1] : "On peut dire qu'en passant de la topologie de Zariski à topologie étale, "on a fait ce qu'il fallait" pour obtenir "le bon" H^1 [...] pour un groupe de coefficients constant fini G. *C'est un fait remarquable, qui sera démontré dans la suite de ce séminaire, que cela suffit également pour trouver les "bons"* $H^i(X, G)$ *pour tout groupe de coefficients de torsion (du moins si* G *est premier aux caractéristiques résiduelles de* X*)*". Je vois cependant quelques raisons à l'optimisme initial de Grothendieck. Grothendieck pensait toujours en termes relatifs : un espace au-dessus d'un autre. Une fois la cohomologie des courbes (sur un corps algébriquement clos) tirée au clair, on pouvait espérer des résultats similaires pour les images directes pour une courbe *relative* (les théorèmes de spécialisation du π_1 devaient le lui suggérer), et, "par dévissage" (fibrations en courbes, suites spectrales de Leray), atteindre les H^i supérieurs. Ces dévissages allaient faire intervenir la notion fondamentale de *faisceau constructible* [SGA 4 IX]. Elle était inspirée par celle, classique, de partie constructible [EGA O_{III} 9], dont le théorème de Chevalley (cf. [EGA IV 1.8.4]) avait montré l'intérêt. Les images directes font en effet sortir de la catégorie des faisceaux localement constants, tandis que la constructibilité devait être préservée.

Un autre ingrédient crucial allait être l'usage systématique de la *hensélisation*, introduite par Nagata ([Na1], [Na2], [Na3]) et développée par Grothendieck dans [EGA IV 18].

Cette notion avait été peu utilisée jusque là. C'est Grothendieck qui a mis en évidence son importance en géométrie algébrique, particulièrement pour la cohomologie étale. Les schémas *strictement locaux*, i. e. les spectres d'anneaux locaux strictement henséliens, sont en effet les objets locaux de la topologie étale, de même que les schémas locaux, i. e. les spectres d'anneaux locaux, sont les objets locaux de la topologie de Zariski. Ils se comportent topologiquement comme des "boules de Milnor". La fibre d'un faisceau étale en un point géométrique est l'ensemble de ses sections globales sur le localisé strict correspondant. Ce fait, combiné avec des théorèmes généraux de passage à la limite dans la cohomologie ([SGA 4 VI]), jouera un rôle capital dans tous les principaux théorèmes de la cohomologie étale. La hensélisation, qui fait intervenir une limite inductive filtrante, est à bien des égards plus maniable que la complétion. La descente du complété au hensélisé, dans le cas excellent, donnera lieu aux théorèmes d'approximation d'Artin [Ar4] et, plus tard, à ceux de Popescu ([P1], [P2]).

2. Les théorèmes fondamentaux pour les coefficients de torsion

Au printemps 1962, Artin conduit à Harvard un séminaire sur les "topologies de Grothendieck". Il y présente la notion - révolutionnaire à l'époque - de topologie sur une catégorie, et le formalisme de faisceaux correspondant. Les mots "site" et "topos" n'y figurent pas encore. Ce sera le point de départ de la théorie développée plus sytématiquement, avec le concours de Giraud et Verdier, dans le premier volume de [SGA 4]. En même temps, Artin définit précisément la topologie étale : la considération des familles surjectives de morphismes étales arbitraires sera un point essentiel pour toute la suite. Il donne les premiers résultats sur la dimension cohomologique étale des schémas et le calcul de la cohomologie des courbes à coefficients dans un faisceau constructible (le cas des coefficients constants avait été abordé, dans un autre langage, par Kawada-Tate [KT]). Il examine aussi le cas d'une surface fibrée sur une courbe. Ce séminaire débloque complètement la situation. Grothendieck va désormais consacrer toute son énergie à la cohomologie étale. En moins d'un an, de septembre 62 à mars 63, Artin et Grothendieck auront établi les théorèmes fondamentaux pour les coefficients de torsion. Dressons-en brièvement la liste :

(i) structure de la cohomologie des courbes [SGA 4 IX 4.6]
(ii) changement de base propre [SGA 4 XII et XIII]
(iii) acyclicité locale des morphismes lisses [SGA 4 XV]
(iv) pureté relative et changement de base lisse [SGA 4 XVI]
(v) finitude pour un morphisme propre [SGA 4 XIV]
(vi) bornes pour la dimension cohomologique, Lefschetz affine [SGA 4 X, XIV]
(vii) comparaison avec la cohomologie de Betti [SGA 4 XI, XVI]
(viii) cohomologie à supports propres et dualité globale [SGA 4 XVII, XVIII]
(ix) dualité locale [SGA 5 I].

Les résultats (i), (ii) et (iii) sont en fait les piliers sur lesquels les autres reposent. Le théorème de Tsen et des énoncés de cohomologie galoisienne sont les outils qui permettent de calculer la cohomologie, à coefficients dans $\mathbb{G}_m$, d'une courbe propre et lisse sur un corps algébriquement clos, et donc aussi sa cohomologie à coefficients dans un faisceau constant $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Plus tard, Grothendieck reviendra sur l'étude du *groupe de Brauer cohomologique* $H^2(X, \mathbb{G}_m)$ pour des schémas X plus généraux [Gr4]. Fibrations en courbes et suites spectrales de Leray ramènent (ii) à un théorème de spécialisation pour le π_1, sur une base S strictement locale noethérienne. Seul le cas où S est le spectre d'un anneau local noethérien complet était traité dans [SGA 1 X], Des arguments supplémentaires (délicats) sont donc requis [SGA 4 XIII]. Les théorèmes d'algébrisation d'Artin évoqués plus haut apporteront une simplification notable (cf. [SGA 4 1/2 Cohomologie étale : Les points de départ]). Des dévissages astucieux réduisent la vérification de l'acyclicité locale d'un morphisme lisse $X \to S$ au cas où X est la droite affine $S[t]$ sur S. La théorie de Lefschetz locale de [SGA 2 X] pour la section hyperplane $t = 0$, combinée au lemme d'Abyankhar et au théorème de pureté de Zariski-Nagata, permet alors de conclure.

Pour s'assurer que la cohomologie étale donnerait les "bons" H^i supérieurs, il y avait deux tests cruciaux. Le premier était la comparaison avec la cohomologie de Betti pour les schémas X séparés de type fini sur $\mathbb{C}$. Artin le fera d'abord, pour des coefficients constants du type $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, dans le cas où X est *lisse* sur $\mathbb{C}$, à l'aide d'une notion nouvelle qu'il dégage à cette occasion, celle de *bon voisinage* (et de *fibration élémentaire*) [SGA 4 XI]. Artin procède par réduction au cas d'une courbe (relative). Serre, de son côté, observe qu'un bon voisinage est un espace $K(\pi, 1)$, et donc que sa cohomologie étale se calcule de façon galoisienne (ce qui implique aisément la comparaison désirée). Cette remarque sera exploitée plus tard par Faltings dans sa théorie de Hodge p-adique [Fa 2]. Dans le cas général, pour des coefficients constructibles, et des $R^i f_*$ plutôt que des H^i, Artin, dans [SGA 4 XVI], fera appel à la résolution des singularités de Hironaka et au théorème de pureté pour les couples lisses (iv). Le second test était le calcul des $H^i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ pour X l'espace affine épointé de dimension d sur un corps algébriquement clos (et n premier à la caractéristique), ou le localisé strict épointé correspondant : on devait trouver les mêmes valeurs que pour une sphère de dimension $2d - 1$. Là encore, ce sera une conséquence facile de (iv) (le cas $d = 2$ avait déjà été traité, plus élémentairement, par Artin dans [Ar1]). D'ailleurs (iv) et (v), ainsi que les bornes pour la dimension cohomologique de schémas de type fini sur un corps [SGA 4 X], découlent sans grande difficulté de (i), (ii), et (iii). Il n'en va pas de même pour le théorème de Lefschetz affine (vi), dont la démonstration met en œuvre un subtil va-et-vient entre énoncés locaux et globaux. En fait, c'est dans l'énoncé dégagé là [SGA 4 XIV 3.1] qu'apparaît pour la première fois une condition de *perversité* (ou plutôt de *semi-perversité*). Il jouera un rôle important dans la théorie des faisceaux pervers [BBD]. Par ailleurs, la méthode de démonstration sera reprise par Gabber pour un morphisme affine sur un trait (au lieu d'un corps) (cf. [I2]); ce sera un ingrédient essentiel de sa démonstration de la conjecture de pureté absolue de Grothendieck (cf. [Fu2]).

Lorsqu'il s'attaque à la dualité en cohomologie étale, Grothendieck a déjà en tête un canevas, fourni par la dualité dans le cas des coefficients continus (faisceaux cohérents), traitée dans le cadre des catégories dérivées, même si ce n'est qu'à l'été 1963 qu'il rédigera les "prénotes" pour le séminaire de Hartshorne à Harvard de 1963-64 [H]. Le théorème de dualité globale de (*loc.cit*) avait inspiré à Verdier un analogue pour les coefficients discrets dans le cadre topologique ([V1], [V2]). Le passage au cadre étale posait cependant des problèmes sérieux. Il fallait d'abord définir la cohomologie à supports propres, et plus généralement, les images directes à supports propres. Cette définition n'allait pas de soi. La définition naïve, calquée sur celle du cas topologique, ne donnait pas les "bons" groupes de cohomologie. C'est un miracle que la définition hybride proposée par Grothendieck, à savoir $Rf_! := Rg_* \circ j_!$, où $f = gj$ est une compactification de f (j une immersion ouverte, g propre), ait finalement si bien fonctionné (ce foncteur était d'ailleurs noté initialement $R_!f$, pour indiquer qu'il ne s'agissait pas du foncteur dérivé du foncteur composé $g_*j_!$). Dans le séminaire oral, Grothendieck avait défini $Rf^! : D^+(Y, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to D^+(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ pour $f : X \to Y$ *lissifiable*, i. e. de la forme gi, où g est lisse et i une immersion fermée, et n inversible sur Y, comme le composé $Ri^! \circ g^*[2d](d)$, où d est la dimension relative, et $Ri^!$ le dérivé du foncteurs "sections à supports dans Y", restreint à Y. L'indépendance du choix de la factorisation résultait facilement du théorème de pureté relatif (iv) (là aussi, la notation primitive était $R^!f$, ce foncteur n'étant pas non plus le dérivé d'un foncteur au niveau des faisceaux). La dualité globale exprime que le foncteur $Rf^!$ ainsi défini est adjoint à droite de $Rf_!$, ce qui fournit pour les schémas quasi-projectifs lisses sur un corps algébriquement clos, la dualité de Poincaré sous une forme analogue à celle du cas transcendant. La difficulté réside principalement dans la construction du morphisme d'adjonction (ou *morphisme trace*). La démonstration est esquissée dans l'article de Verdier [V3]. S'inspirant de la méthode utilisée par Verdier pour la dualité dans le cadre topologique, Deligne, dans [SGA 4 XVIII], définira *a priori* $Rf^!$ comme adjoint à droite de $Rf_!$. La difficulté est alors reportée dans le calcul de $Rf^!$ pour f lisse, où l'on doit retrouver la définition de Grothendieck. Deligne emploiera une méthode analogue dans l'appendice de [H]. Une présentation axiomatique de ces constructions, à partir d'une version triangulée d'un théorème de représentabilité de Brown, sera donnée par Neeman dans [Ne].

La dualité locale (ix), plus profonde, sera exposée par Grothendieck dans [SGA 5 I]. Il s'agit, comme dans le cas des coefficients continus [H], de construire, sur des schémas X "raisonnables", des *foncteurs dualisants* $D_X = R\mathcal{H}om(-, K)$, où K est un "complexe dualisant", de manière que $D_X D_X = \mathrm{Id}$ (et donc que D_X induise une auto-anti-équivalence de la catégorie $D^b_c(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ avec elle-même) (n premier aux caractéristiques résiduelles, D^b_c désignant la sous-catégorie des complexes à cohomologie bornée et constructible). Cette construction sera possible sur les schémas excellents de caractéristique nulle, grâce à la résolution de Hironaka et aux résultats d'Artin dans [SGA 4 XIX], mais seulement conjecturale dans le cas excellent noethérien général. Une construction inconditionnelle dans ce cas ne sera donnée que très récemment, par Gabber [Ga]. Elle utilise, notamment, sa démonstration, mentionnée plus haut, de la conjecture de pureté absolue.

Si le théorème de finitude pour un morphisme propre (v), et plus généralement, la constructibilité des $R^q f_! F$ pour F constructible de torsion, s'avérait être une conséquence facile de (i) et (ii), il n'en allait pas de même pour la constructiblité des $R^q f_* F$. Tout d'abord, celle-ci requiert que la torsion de F soit première aux caractéristiques résiduelles. Pour un schéma X séparé de type fini sur un corps algébriquement clos k, la finitude des $H^q(X, F)$, pour F un faisceau constructible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules (n premier à la caractéristique de k) était connue, dans [SGA 4], dans le cas quasi-projectif lisse, comme conséquence de la dualité de Poincaré, mais n'était que conjecturale dans le cas général, subordonnée à la résolution des singularités. La constructibilité des $R^q f_* F$, pour $f : X \to Y$ un morphisme de schémas de type fini sur un corps (et F comme ci-dessus), ne sera établie qu'une dizaine d'années plus tard, par Deligne, dans [SGA 4 1/2, Th. de finitude]. Deligne traite plus généralement le cas d'un morphisme de schémas de type fini sur un schéma noethérien régulier de dimension ≤ 1, et établit la dualité locale dans ce cadre. Dans [SGA 4 XIX], Artin avait prouvé la constructibilité des $R^q f_* F$ pour f de type fini entre schémas excellents de caractéristique nulle (et F constructible de torsion), à l'aide de Hironaka. Gabber, exploitant les théorèmes d'altération de de Jong ([dJ 1], [dJ2]) réussira à lever cette restriction de caractéristique [Ga], i. e. prouver la constructibilité des $R^q f_* F$ pour f de type fini entre schémas quasi-excellents noethériens et F constructible de torsion première aux caractéristiques résiduelles. Il généralisera aussi, dans ce cadre, le théorème de Lefschetz affine (vi) et résoudra certaines conjectures sur la dimension cohomologique des corps posées dans l'exposé d'Artin [SGA 4 X].

Indépendamment du problème de finitude pour Rf_*, le formalisme présenté dans [SGA 4] et [SGA 5], consistant en la définition des foncteurs $\otimes^L$, $R\mathcal{H}om$, f^*, Rf_*, $Rf_!$, $Rf^!$ et les relations entre eux, appelé, plus tard, "formalisme des six opérations", ainsi que le formalisme analogue développé dans [H], changeaient radicalement la vision que l'on avait jusque-là de la cohomologie. Ils allaient avoir un impact considérable, non seulement en géométrie algébrique, mais aussi, plus tard, dans des domaines apparemment éloignés, comme la théorie analytique complexe des $\mathcal{D}$-modules (Kashiwara-Schapira, Mebkhout, etc.) (cf. [KSc]) et son analogue algébrique (Beilinson, Bernstein) (cf. [Bo]) - qui, à leur tour, inspireront celle des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques de Berthelot [Be].

3. La cohomologie ℓ-adique

Comme Grothendieck le rappelle dans l'avant-propos de [SGA 4], le but était de construire une "cohomologie de Weil" sur les schémas. Une telle théorie devait fournir des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle. Or la cohomologie étale n'est raisonnable que pour des coefficients *de torsion* (laquelle doit être de surcroît, le plus souvent, supposée première aux caractéristiques résiduelles) : pour X intègre et géométriquement unibranche, un calcul élémentaire montre que les $H^q(X, \mathbb{Z})$ sont de torsion pour $q \geq 1$. C'est ce qui a amené Grothendieck à définir la cohomologie ℓ-adique par passage à la limite sur les cohomologies à coefficients $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$, par analogie avec la définition du module de Tate d'une variété abélienne. En particulier, pour X séparé de type fini sur un corps algébriquement clos k de caractéristique p, et l

premier différent de p, les groupes de cohomologie à supports compacts de X à coefficients dans $\mathbb{Z}_\ell$ sont définis par

$$H^q_c(X, \mathbb{Z}_\ell) := \text{proj.lim } H^q_c(X, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}).$$

Ce sont des $\mathbb{Z}_\ell$-modules de type fini, et les groupes de cohomologie à supports compacts à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$, définis par $H^q_c(X, \mathbb{Q}_\ell) = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^q_c(X, \mathbb{Z}_\ell)$, des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie. Plus généralement, Grothendieck propose une définition de $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau (constructible) comme système projectif de faisceaux constructibles de $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$-modules s'induisant les uns les autres par réduction modulo ℓ^n. Ceux d'entre eux pour lesquels les faisceaux de $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$-modules sont localement constants - qu'il appelle *constants tordus* (on dira *lisses* plus tard) - correspondent (dans le cas noethérien connexe) aux représentations du groupe fondamental dans des $\mathbb{Z}_\ell$-modules de type fini. Il prouve la stabilité (essentielle) des $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux par les $R^q f_!$. Ceci est expliqué dans les exposés de Jouanolou [SGA 5 V et VI]. Faute de disposer de théorèmes de finitude pour les $R^q f_*$, il n'était guère possible, à l'époque, d'aller beaucoup plus avant, du moins, autrement que conjecturalement. La théorie exposée dans (*loc. cit.*) suffira néammoins pour le formalisme des fonctions L.

Elle fournira aussi une *cohomologie de Weil* pour les schémas propres et lisses sur un corps algébriquement clos, en fait, une pour chaque nombre premier ℓ différent de la caractéristique (cf. [Kl]). La construction, par Grothendieck, de la classe de cohomologie associée à un cycle y joue un rôle crucial. Dans le cas des schémas singuliers, Grothendieck définira, à l'aide de la dualité locale, une théorie d'*homologie*, adaptant et généralisant la théorie de Borel-Moore du cas topologique (cf. [BM], [V5]). Ces constructions, qui avaient été exposées en détail dans le séminaire oral, ne seront pas reprises dans [SGA 5]. Elles font l'objet des exposés de Deligne [SGA 4 1/2, Cycle] et Laumon [La1]. La distinction entre homologie et cohomologie et les relations entre les deux étaient chères à Grothendieck. Elles se manifesteront de nouveau, dans [SGA 6], dans le jeu entre complexes "pseudo-cohérents" et complexes "parfaits", et entre les groupes de Grothendieck correspondants, désignés dans (*loc. cit.*) par $K_\cdot(X)$ et $K^\cdot(X)$. Bien entendu, Grothendieck avait aussi transposé, en cohomologie étale, la théorie des classes de Chern de [Gr1]. Elle est exposée dans [SGA 5 VII]. Il en donnera même une version plus générale, valable sur des topos de base, et en particulier applicable aux représentations linéaires des groupes discrets, dans [Gr5].

Restait cependant à étendre au cadre ℓ-adique le formalisme des six opérations. C'était la tâche assignée à Jouanolou pour sa thèse. Celle-ci ne sera pas publiée. A partir de 1973, disposant des théorèmes de Deligne de [SGA 4 1/2 Th. finitude], on pouvait espérer une solution inconditionnelle du problème pour les schémas séparés de type fini sur un schéma régulier de dimension ≤ 1. Celle-ci ne sera trouvée que plus tard, par Gabber. Elle ne sera pas rédigée. Une version équivalente sera obtenue indépendamment par Ekedahl, et, cette fois, publiée [E]. Une solution partielle, valable en tout cas pour les schémas séparés de type fini sur un corps fini ou un corps algébriquement clos, sera présentée par Deligne dans [D2]. Elle suffira pour les applications qu'il avait en vue, ainsi que la théorie ultérieure des faisceaux pervers [BBD]. Diverses extensions de la théorie peuvent être désormais envisagées : schémas - voire champs algébriques - excellents (grâce aux résultats récents de Gabber [Ga]), cf. [LO]. Les fondations sont encore inachevées !

4. Formule des traces et rationalité des fonctions L

L'idée de Weil, à la base de ses conjectures, était que le nombre de points rationnels d'une variété projective lisse X sur un corps fini $k = \mathbb{F}_q$ devait pouvoir s'exprimer comme somme alternée des traces (*nombre de Lefschetz*) de l'opérateur de Frobenius sur des groupes de cohomologie convenables de X : l'ensemble $X(k)$ des points rationnels de X sur k est en effet l'ensemble des points fixes de cet opérateur sur $X(\overline{k})$, où $\overline{k}$ est une clôture algébrique de k. Le fait que, pour ℓ premier distinct de la caractéristique de k, $X \mapsto H^*(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell))$ forme une "cohomologie de Weil" impliquait formellement une telle formule de Lefschetz (cf. [Kl]), à savoir :

$$|X(k)| = \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(F, H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)), \tag{1}$$

où F désigne le Frobenius *géométrique* ($a \to a^{1/q}$ sur $\overline{k}$). Grothendieck ira beaucoup plus loin. Il généralisera (1) au cas où le schéma X est seulement supposé séparé de type fini sur k et $\mathbb{Q}_\ell$ est remplacé par un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau arbitraire E, la cohomologie étant prise à supports compacts. La formule s'écrit alors :

$$\sum_{x \in X(k)} \operatorname{Tr}(F, E_x) = \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(F, H^i_c(X_{\overline{k}}, E)), \tag{2}$$

(au premier membre, E_x désigne la fibre de E au point géométrique $x \in X(\overline{k})$ fixe par F). Cette formule, qu'on appelle *formule des traces de Grothendieck*, entraîne non seulement la rationalité de la fonction zêta de X (cas $E = \mathbb{Q}_\ell$), mais aussi de la fonction L associée à E :

$$L(X, E, t) = \prod_i \det(1 - Ft, H^i_c(X_{\overline{k}}, E))^{(-1)^{i+1}}. \tag{3}$$

À la différence de (1), elle ne résulte pas formellement des propriétés générales de la cohomologie ℓ-adique. Sa démonstration a donné lieu à malentendus et polémiques (cf. [RS]). L'histoire est la suivante. Des dévissages faciles montrent qu'il suffit de prouver (2) quand X est une *courbe propre et lisse* sur k. Dans ce cas, Grothendieck avait donné une démonstration (complète) par une méthode de *traces non commutatives* inspirée de travaux de Nielsen-Wecken. Cette démonstration est exposée par Bucur dans [SGA 5 XII], et sous une forme simplifiée, par Deligne dans [SGA 4 1/2, Rapport]. Grothendieck avait aussi esquissé, dans son exposé Bourbaki [Gr3], une autre approche, à partir de la *formule de Lefschetz-Verdier*. Cette formule très générale, due à Verdier, exprime, pour un schéma X *propre* sur le spectre S d'un corps algébriquement clos, le nombre de Lefschetz d'une *correspondance cohomologique* (c, u) sur X ($c : Z \to X \times X$, $u \in Hom(c_1^* L, c_2^! L)$, L un complexe de tor-dimension finie et à cohomologie constructible de $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$-modules, ℓ inversible sur S) comme une somme de *termes locaux* attachés aux composantes de points fixes de c. Verdier avait montré [V4] que cette formule implique que si X est une courbe propre et lisse sur S, f un endomorphisme de X, L un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau sur X, $u : f^*L \to L$ un endomorphisme de L "au-dessus de f", alors, si les points fixes de f sont isolés et transversaux, on a

$$\sum_{x \in X^f} \mathrm{Tr}(u, L_x) = \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}((f, u), H^i(X, L)). \tag{4}$$

La formule désirée pour Frobenius en est un cas particulier. Le problème de cette méthode était le statut de la formule de Lefschetz-Verdier. Tout d'abord, la définition des termes locaux utilisait des propriétés non démontrées à l'époque (finitude, Künneth, dualité locale). Dans le cas d'une courbe propre et lisse X, celles-ci étaient cependant disponibles. Ensuite, la formule devait découler de compatibilités formelles, qui n'avaient pas été vérifiées. Ces difficultés seront levées dans la version publiée ([SGA 5 III, III B]) : les propriétés requises avaient été établies par Deligne dans [SGA 4 1/2 Th. finitude], et les compatibilités nécessaires sont prouvées ; diverses généralisations de (4) et [SGA 5 X] y sont également données.

La formule (2) jouera un rôle fondamental dans les travaux de Deligne sur la conjecture de Weil (voir plus bas). Elle suggérera aussi à Deligne une conjecture sur les termes locaux de la formule de Lefschetz-Verdier, pour des correspondances cohomologiques composées avec une grande puissance de Frobenius, conjecture qui sera démontrée par Fujiwara [Fu1] et, indépendamment, Varshavsky [Va].

Par la méthode de Nielsen-Wecken, Grothendieck avait non seulement démontré le cas particulier de (2) où X est une courbe propre et lisse, mais aussi une généralisation de (4), ou plutôt de sa variante pour des coefficients de torsion, sans hypothèse de transversalité sur les points fixes, cf. [SGA 5 X]. Les termes locaux qui apparaissent sont analogues à ceux que Grothendieck avait découverts pour la formule donnant la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(X, L)$, qui font intervenir des conducteurs de Swan. Cette dernière formule, qu'on appelle maintenant *formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevitch*, est le fruit d'un extraordinaire échange épistolaire entre Grothendieck et Serre, cf. [GS, 139-144]. Elle inspirera un grand nombre de travaux ultérieurs. Une généralisation de celle-ci, de type Riemann-Roch-Grothendieck, reste un problème ouvert, activement étudié aujourd'hui (voir notamment les travaux récents d'Abbes, Kato, Saito [AS], [KS]).

Pour X propre et lisse sur $k = \mathbb{F}_q$ et $E = \mathbb{Q}_\ell$, (3) s'écrit

$$Z(X, t) = \prod_i \det(1 - Ft, H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell))^{(-1)^{i+1}}.$$

L'équation fonctionnelle de $Z(X, t)$, conjecturée par Weil, découle aisément de la dualité de Poincaré (cf. [D1, 2.6]). Quelques années après, Deligne démontrera que le polynôme

$\det(1 - Ft, H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell))$ est à coefficients entiers, indépendant de ℓ, et que les inverses de ses racines (valeurs propres de F) sont des entiers algébriques dont tous les conjugués complexes sont de valeur absolue $q^{i/2}$, achevant ainsi la preuve des conjectures de Weil (voir [D1] pour le cas projectif, [D2] pour le cas général).

Les conjectures de Weil, et le formalisme des poids (que Grothendieck appelait "yoga des poids", conjectural à l'époque), développé par Deligne dans [D2] puis dans la théorie des faisceaux pervers [BBD], auront d'immenses applications, dont la description sort du cadre de cet exposé. Bornons-nous à mentionner :

• la théorie de Lusztig des faisceaux caractères [Lu]

• la transformation ℓ-adique de Fourier-Deligne et la méthode de la phase stationnaire ℓ-adique de Laumon (inspirée d'une démonstration de Witten des inégalités de Morse) ([La3], [KL], [I1])

• la construction, par Lafforgue, de la correspondance de Langlands pour GL_n sur les corps de fonctions [Laf]

• la preuve, par Laumon-Ngo et Ngo, du lemme fondamental de Langlands ([LaN], [Ng]).

5. Cycles évanescents et monodromie

Dans l'avant-propos de [SGA 4], Grothendieck mentionne l'influence sur la cohomologie étale des travaux d'Igusa sur les cycles évanescents. Il annonce qu'il en sera question dans un séminaire ultérieur, à savoir [SGA 7]. Celui-ci, continuation logique de [SGA 5], ne commencera toutefois qu'un an plus tard, après [SGA 6]. Dans sa lettre à Serre du 30 octobre 1964 [GS, p. 214], Grothendieck introduit déjà les foncteurs Φ^n et les calcule dans un cas crucial. Ces foncteurs, qui "mesurent" la différence entre la cohomologie de la fibre générale et de la fibre spéciale, seront l'objet principal de la théorie développée dans [SGA 7]. Le livre de Milnor [M] ne paraît qu'en 1968. Grothendieck devait cependant en avoir eu connaissance quelque temps auparavant. La conjecture de (*loc. cit.*) sur la quasi-unipotence de la monodromie d'un point critique isolé a en effet été pour lui une motivation, en même temps qu'un test, pour sa théorie générale des foncteurs $R\Psi$ (*cycles proches*) et $R\Phi$ (*cycles évanescents*) (la terminologie "cycles proches" ne lui est cependant pas due, ce n'est que vers la fin des années 70 qu'elle deviendra d'un usage courant).

Les deux résultats majeurs que Grothendieck allait présenter dans [SGA 7] sont :

(1) le théorème de réduction semi-stable pour les variétés abéliennes [SGA 7 IX 3.6],

(2) le théorème de monodromie locale [SGA 7 I 1.3].

La démonstration de (1) donnée par Grothendieck dans (*loc. cit.*) s'appuie d'une part sur un théorème d'orthogonalité pour les modules de Tate [SGA 7 IX 2.4], d'autre part sur un résultat sur l'échelon de quasi-unipotence du H^1 des courbes, qui était établi dans sa lettre à Serre citée plus haut (il figure, avec sa démonstration originelle, dans le résumé rédigé par Deligne [SGA 7 I 3.5]). Mumford donnera, à peu près au même moment une démonstration indépendante, à l'aide de sa théorie des fonctions thêta, valable en caractéristique résiduelle $\neq 2$). Deligne et Mumford montreront que (1) implique le théorème de réduction semi-stable pour les courbes [DM, 2.4], dont, un peu plus tard, Artin et Winters donneront une démonstration indépendante de (1) [AW].

Grothendieck donna deux démonstrations de (2), l'une géométrique et conditionnelle (dépendant de la pureté et de la résolution des singularités), l'autre, arithmétique et inconditionnelle. Cette dernière repose sur un résultat élémentaire de quasi-unipotence pour des représentations ℓ-adiques d'un corps local à corps résiduel pas trop gros [ST, Appendix], obtenu bien avant (cf. lettre de Grothendieck à Serre du 24.9.64 [GS, p. 182]). Une variante, inconditionnelle, de la première démonstration, sera donnée par de Jong à la fin des années 90 [dJ1].

Les théorèmes (1) et (2) et le formalisme des foncteurs $R\Psi$ et $R\Phi$ seront extrêmement féconds. La conjecture de Milnor citée plus haut est un corollaire facile de (2). La théorie cohomologique des pinceaux de Lefschetz, développée dans la seconde partie de [SGA 7], sera un ingrédient essentiel de la première démonstration, par Deligne, de la conjecture de Weil sur les valeurs propres de Frobenius [D1]. A la suite de (1), la notion de réduction semi-stable prendra une importance considérable dans les questions de compactifications de problèmes de modules, par le biais de la théorie des variétés toriques, et plus tard, de la géométrie logarithmique. Une généralisation en dimension relative supérieure du théorème de réduction semi-stable pour les courbes, en caractéristique nulle, sera obtenue par Mumford et al. [KKMS]. On peut considérer le théorème "d'altération semi-stable" de de Jong [dJ1] comme un substitut efficace à ce dernier résultat en caractéristique positive ou mixte. Par ailleurs, une généralisation de (1) au cas d'une base normale, due à Gabber [D3], sera un ingrédient important de la démonstration, par Faltings [Fa1], de la conjecture de Mordell.

Le calcul des cycles évanescents dans le cas de réduction semi-stable, en caractéristique positive ou mixte, et pour le faisceau constant, conditionnel dans [SGA 7 I], sera effectué quinze ans après, par Rapoport et Zink [RZ]. Réduction semi-stable et cycles évanescents joueront un rôle majeur en théorie de Hodge classique et, à partir de la fin des années 80, dans la théorie de Hodge p-adique. La conjecture dite de *monodromie-poids* ("pureté de la filtration de monodromie") reste à ce jour l'un des problèmes ouverts majeurs du sujet. Rappelons que celle-ci n'est établie pour l'instant qu'en égale caractéristique positive ([D2, 1.8.4], [It1]) ou en égale caractéristique nulle [St], [Sa, 4.2]) (mis à part le cas de dimension relative ≤ 2 [RZ] ou de variétés admettant une uniformisation p-adique ([dS], [It2]))

Le foncteur $R\Psi$ globalise, le long de la fibre spéciale, les cohomologies des "fibres de Milnor". Il n'est défini toutefois que sur une base de dimension 1. Au début des années 80, Deligne proposera une construction sur des bases de dimension quelconque [La2] et formulera des conjectures de finitude qui n'ont été établies que tout récemment [Or]. L'étude de ce foncteur $R\Psi$ généralisé est encore embryonnaire. Signalons cependant que la construction de Deligne intervient dans les travaux de Gabber cités à la fin du numéro 3.

6. Cohomologies ℓ-adiques et motifs

C'est sans doute le fait que les cohomologies ℓ-adiques pour ℓ premier aux caractéristiques résiduelles se comportent toutes de la même manière qui a amené Grothendieck à concevoir sa théorie des motifs. Cependant, en dépit de tous les développements qu'elle a suscités depuis quarante ans (cf. [An], [Mot]), les questions d'indépendance de ℓ qu'elle était censée expliquer restent encore ouvertes pour la plupart. On ignore par exemple si les nombres de Betti ℓ-adiques (à supports propres ou sans supports) d'un schéma séparé de type fini sur un corps algébriquement clos (ℓ différent de la caractéristique) sont indépendants de ℓ. Le cas où X est propre et lisse est cependant connu, comme conséquence du théorème principal de Deligne [D2], ainsi que l'analogue pour les nombres de Betti de la cohomologie d'intersection dans le cas propre, d'après Gabber [Fu]. Voir [Ka] et [I3] pour un aperçu sur ces problèmes, et [Z] pour quelques progrès récents.

Je tiens à remercier M. Artin, P. Deligne, S. Kleiman, B. Messing, F. Orgogozo, M. Raynaud et J-P. Serre pour leurs remarques et suggestions sur une première version de ce texte.

Bibliographie

[An] Y. André, *Une introduction aux motifs*, Panoramas et synthèses 17 (2004), 1-258, SMF.

[Ar1] M. Artin, *Grothendieck Topologies*, Harvard mimeographed notes, 1962.

[Ar2] M. Artin, *Algebraization of formal moduli I*, in Global Analysis (papers in honor of K. Kodaira), Univ. Tokyo P. (1969), 21-71.

[Ar3] M. Artin, *The implicit function theorem in algebraic geometry*, Algebraic Geometry (Int. Coll. Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968), Oxford Univ. Press, London, 1969, 13-34.

[Ar4] M. Artin, *Algebraic approximation of structures over complete local rings*, Pub. Math. IHES 36 (1969), 23-58.

[AS] A. Abbes, T. Saito, *The characteristic class and ramification of an ℓ-adic sheaf*, Invent. math. 168 (2007), 567-612.

[AW] M. Artin, G. Winters, *Degenerate fibres and stable reduction of curves*, Topology 10 (1971), 373-383.

[Be] P. Berthelot, *Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules*, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques II, P. Berthelot, J.-M. Fontaine, L. Illusie, K. Kato, M. Rapoport, Eds., Astérisque 279 (2002), SMF, 1-80.

[Bo] A. Borel et al., Algebraic $\mathcal{D}$-Modules, Perspectives in Math. 2, J. Coates, S. Helgason, eds., 1987, Academic Press Inc.

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Astérisque 100, SMF, 1982.

[BM] A. Borel, J. C. Moore, *Homology theory for locally compact spaces*, Mich. Math. J. 7 (1960, 137-159.

[D1] P. Deligne, *La conjecture de Weil. I*, Pub. Math. IHES 43 (1974), 273-307.

[D2] P. Deligne, *La conjecture de Weil. II*, Pub. Math. IHES 52 (1980), 137-252.

[D3] P. Deligne, *Le lemme de Gabber*, Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, par L. Szpiro, Astérisque 127, 1985, 131-150.

[DM] P. Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Pub. math. IHES 36 (1969), 75-110.

[dJ1] A. J. de Jong, *Smoothness, semi-stability and alterations*, Pub. Math. IHES 83 (1996), 51-93.

[dJ2] A. J. de Jong, *Families of curves and alterations*, Ann. Inst. Fourier 47 (1997), 599-621.

[dS] E. de Shalit, The p-adic monodromy-weight conjecture fpr p-adically uniformized varieties, Comp. Math. 141 (2005), 101-120.

[E] T. Ekedahl, *On the Adic Formalism*, The Grothendieck Festschrift, vol. II, Progress in Math. 87, Birkhäuser, 1990, 197-218.

[Fa1] G. Faltings, *Endlichkeitsätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. math. 73 (1983), 349-366.

[Fa2] G. Faltings, *p-adic Hodge theory*, J. of the AMS 1 (1988), 255-299.

[Fu1] K. Fujiwara, *Rigid geometry, Lefschetz-Verdier trace formula and Deligne's conjecture*, Invent. math. 127 (1997), 489-533.

[Fu2] K. Fujiwara, *A Proof of the Absolute Purity Conjecture (after Gabber)*, Algebraic Geometry 2000, Azumino (Ed. S. Usui, M. Green, L. Illusie, K. Kato, E. Looijenga, S. Mukai, S. Saito), Advanced Studies in Pure math. 36 (2002), 153-183.

[Fu3] K. Fujiwara, *Independence of ℓ for Intersection Cohomology (after Gabber)*, Algebraic Geometry 2000, Azumino (Ed. S. Usui, M. Green, L. Illusie, K. Kato, E. Looijenga, S. Mukai, S. Saito), Advanced Studies in Pure math. 36 (2002), 145-151.

[Ga] O. Gabber, *Finiteness theorems for étale cohomology of excellent schemes*, Conference in honor of P. Deligne on the occasion of his 61st birthday, IAS, Princeton, October 2005.

[Gi1] J. Giraud, *Méthode de la descente*, Bull. SMF, Mémoire 2, 1964.

[Gi2] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Grundl. der math. 179, Springer-Verlag, 1971.

[Gr1] A. Grothendieck, *La théorie des classes de Chern*, Bull. SMF 86 (1958), 137-154.

[Gr2] A. Grothendieck, *The cohomology theory of abstract algebraic varieties*, Proc. Internat. Congress Math. (Edinburgh, 1958), 1960, 103-118, Cambridge Univ. Press, New York.

[Gr3] A. Grothendieck, *Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L*, Sém. Bourbaki 1964/65, 290, dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, A. Grothendieck and N. Kuiper, eds., Noth Holland Pub. Co., Masson et Co., 1968, 31-45.

[Gr4] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer I, II, III*, dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, A. Grothendieck and N. Kuiper, eds., Noth Holland Pub. Co., Masson et Co., 1968, 46-188.

[Gr5] A. Grothendieck, *Classes de Chern et représentations linéaires des groupes discrets*, dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, A. Grothendieck and N.

Kuiper, eds., Noth Holland Pub. Co., Masson et Co., 1968, 215-305.

[GS] *Correspondance Grothendieck-Serre*, P. Colmez, J-P. Serre Eds., Documents Mathématiques 2, SMF, 2001.

[H] R. Hartshorne, *Residues and Duality*, SLN 20, Springer-Verlag, 1966.

[I1] L. Illusie, *Deligne's ℓ-adic Fourier transform*, Algebraic Geometry Bowdoin 1985, Proc. Symp. in Pure Math. 46, Part 2, S. Bloch, ed., AMS 1987, 151-163.

[I2] L. Illusie, *Perversité et variation*, Manuscripta. math. 112 (2003), 271-295.

[I3] L. Illusie, *Miscellany on traces in ℓ-adic cohomology : a survey*, Japanese J. of Math. 1, 107-136 (2006).

[It1] T. Ito, *Weight-monodromy conjecture over equal characteristic local fields*, Amer. J. Math. 127 (2005), 647-658.

[It2] T. Ito, *Weight-modromy conjecture for p-adically uniformized varieties*, Invent. math. 159 (2005), 607-656.

[Ka] N. M. Katz, *Review of ℓ-adic Cohomology*, Motives, Proc. of Symp. in Pure Math. 55 , Part I, U. Jannsen, S. Kleiman, J-P. Serre, Eds., AMS (1994), 21-30.

[Kl] S. Kleiman, *Algebraic cycles and the Weil conjectures*, dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, A. Grothendieck and N. Kuiper, eds., Noth Holland Pub. Co., Masson et Co., 1968, 359-386.

[KKMS] K. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings I*, SLN 339, Springer-Verlag, 1973.

[KL] N. Katz, G. Laumon, *Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles*, Pub. math. IHES 62 (1986), 361-418.

[KS] K. Kato, T. Saito, *Ramification theory for varieties over a perfect field*, Ann. of Math. 168 (2008), 33-96.

[KSc] M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlheren der math. Wiss. 292, Springer-Verlag, 1990.

[KT], Y. Kawada, J. Tate, *On the Galois Cohomology of Unramified Extensions of Function Fields in One Variable*, Amer. J. Math. 77 (1955), 197-217.

[La1] G. Laumon, *Homologie étale*, Séminaire de géométrie analytique A. Douady - J.-L. Verdier, Astérisque 36-37, SMF, 1976, 163-188.

[La2] G. Laumon, *Vanishing cycles over a base of dimension* > 1, Algebraic Geometry (Tokyo-Kyoto 1982), SLN 1016, Springer-Verlag, 1983, 143-150.

[La3] G. Laumon, *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil*, Pub. Math. IHES 65 (1987), 131-210.

[Laf] L. Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Invent. math. 147 (2002), 1-241.

[LO] Y. Laszlo, M. Olsson, *The six operations for sheaves on Artin stacks II : adic coefficients*, arXiv :math/0603680v1, 2006.

[LaN] G. Laumon, B. C. Ngo, *Le lemme fondamental pour les groupes unitaires*, à paraître dans Ann. of Math.

[Lu] G. Lusztig, *Character sheaves I, II, III*, Adv. in Math. 56 (1985), 193-237, 57 (1985), 226-265, 57 (1985), 266-315.

[M] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies 61, Princeton Univ. Press, 1968.

[Na1] M. Nagata, *On the theory of Henselian rings*, Nagoya Math. J. 5 (1953), 45-57.

[Na2] M. Nagata, *On the theory of Henselian rings II*, Nagoya Math. J. 7 (1954), 1-19.

[Na3] M. Nagata, On the theory of Henselian rings III, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A, Math., vol. 32 (1959), 93-101.

[Ne] A. Neeman, *The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability*, J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), 205-236.

[Ng] B. C. Ngo, *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie*, arXiv :0801.0446v3, 2008.

[Or] F. Orgogozo, *Modifications et cycles proches sur une base générale*, IMRN, vol. 2006, ID 25315, 38 p., 2006.

[P1] D. Popescu, *General Néron desingularization and approximation*, Nagoya Math. J. 104 (1986), 85-115.

[P2] D. Popescu, *Letter to the editor, General Néron desingularization and approximation*, Nagoya Math. J. 118 (1990), 45-53.

[R] M. Raynaud, *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, SLN 119, Springer-Verlag, 1970

[RS] A. Grothendieck, *Récoltes et semailles, Réflexion et témoignage sur un passé de mathématicien*, Univ. Sc. et Techniques du Languedoc, Montpellier, 1985.

[RZ] M. Rapoport, T. Zink, *Ueber die lokale Zetafunktion von Shimuravarietten, Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik*, Inv. Math. 68 (1982), 21-201.

[Sa] M. Saito, *Modules de Hodge polarisables*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 24 (1988), 849-995.

[S] J-P. Serre, *Espaces fibrés algébriques*, Séminaire Claude Chevalley, t. 3 (1958), Exp. 1, 1-37, Secr. math. Paris, 1958.

[St] J. Steenbrink, *Limits of Hodge structures*, Invent. math. 31 (1976), 229-257.

[ST] J-P. Serre J.-P. and J. Tate, *Good reduction of abelian varieties*, Ann. of math. 88 (1968), 492-517.

[Va] Y. Varshavsky, *Lefschetz-Verdier trace formula and a generalization of a theorem of Fujiwara*, Geom. Funct. Anal. 17 (2007), 271-319.

[V1] J.-L. Verdier, Le théorème de dualité de Poincaré, C. R. Acad. Sci. Paris 256 (1963), 2084-2086.

[V2] J.-L. Verdier, Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts, Séminaire Bourbaki, Vol. 9, Exp. 300, 337-349, SMF Paris; 1995.

[V3] J.-L. Verdier, *A Duality Theorem in the Etale Cohomology of Schemes*, Proc. of a Conf. on Local Fields, Driebergen 1966, Ed. T. A. Springer, Springer-Verlag, 1967, 184-198.

[V4] J.-L. Verdier, *The Lefschetz Fixed Point Formula in Etale Cohomology*, Proc. of a Conf. on Local Fields, Driebergen 1966, Ed. T. A. Springer, Springer-Verlag, 1967, 199-214.

[V5] J.-L. Verdier, *Classe d'homologie associée à un cycle*, Séminaire de géométrie analytique A. Douady - J.-L. Verdier, Astérisque 36-37, SMF, 1976, 101-151.

[Z] W. Zheng, *Sur l'indépendance de ℓ en cohomologie ℓ-adique sur les corps locaux*, Thèse (Orsay), 2007.

[EGA] *Éléments de Géométrie Algébrique*, par A. Grothendieck, rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné, Pub. Math. IHES 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32, and Grundlehren 166, Springer-Verlag, 1971.

[FGA] A. Grothendieck, *Fondements de la géométrie algébrique. Extraits du Séminaire Bourbaki 1957-1962*, Secr. math. Paris, 1962.

[Mot] *Motives,* Proc. of Symp. in Pure Math. 55 , Parts I, II, U. Jannsen, S. Kleiman, J-P. Serre, Eds., AMS (1994).

[SGA 1] *Revêtements étales et groupe fondamental*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1960/1961, dirigé par A. Grothendieck, SLN 224, Springer-Verlag, 1971, et Documents mathématiques 3, SMF, 2003.

[SGA 2] *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1962, dirigé par A. Grothendieck, North-Holland Pub. Comp., Masson et Cie, 1968, et Documents mathématiques 4, SMF, 2005.

[SGA 3] *Schémas en groupes I, II, III*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1962-64, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck, SLN 151, 152, 153, Springer-Verlag, 1970.

[SGA 4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963-64, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, SLN 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972, 1973.

[SGA 4 1/2] *Cohomologie étale*, par P. Deligne, SLN 569, Springer- Verlag, 1977.

[SGA 5] *Cohomologie ℓ-adique et fonctions L*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1965/66, dirigé par A. Grothendieck, SLN 589, Springer-Verlag, 1977.

[SGA 6] *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1966/67, dirigé par P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, SLN 225, Springer-Verlag, 1971.

[SGA 7] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967-1969, I dirigé par A. Grothendieck, II par P. Deligne et N. Katz, SLN 288, 340, Springer-Verlag 1972, 1973.