“La descente galoisienne ...”

Luc Illusie

À Pierre Deligne,
en témoignage d'amitié et d'admiration

“La descente galoisienne ...” C'est ce que Deligne m'a répondu, la première fois que je l'ai rencontré, et que je lui ai demandé à quoi il s'intéressait. C'était une après-midi d'hiver, à Bures, en 1965, après le séminaire de Grothendieck à l'IHES, début de SGA 5. J'avoue que j'étais surpris. N'était-ce pas juste un cas particulier de la descente fidèlement plate ? Ce que je devais découvrir un peu plus tard, c'est qu'en réalité Deligne réfléchissait déjà à ce qu'on appelle maintenant la *descente cohomologique*. Ni les objets ni les morphismes de catégories dérivées de faisceaux ne se recollent en général. On n'avait alors aucune idée pour contourner l'obstacle. La technique que Deligne mit au point à ce moment-là est devenue, depuis longtemps, un outil familier. Elle était révolutionnaire à l'époque.

Je me souviens de l'exposé qu'en fit Deligne, à Bures, sous l'œil admiratif de Grothendieck. Il avait d'abord rappelé les suites spectrales de Leray, définies par exemple dans le livre de Godement [Go, II 5.2, 5.4], aboutissant à la cohomologie d'un espace topologique Y à valeurs dans un faisceau abélien F, déduites d'un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ supposé soit ouvert, soit fermé localement fini :

$$E_1^{pq} = \check{C}^p(\mathcal{U}, H^q(-, F)) \Rightarrow H^{p+q}(Y, F), \tag{1}$$

où $\check{C}^p(\mathcal{U}, H^q(-, F)) = \prod H^q(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}, F)$ est le groupe des p-cochaînes de Čech du préfaisceau $U \mapsto H^q(U, F)$. La question se posait d'en donner une généralisation commune. Dans les deux cas, si l'on introduit l'espace X_0 somme disjointe des U_i, et le système des produits fibrés successifs $X_n = (X_0/Y)^{n+1}$ (somme disjointe des $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_n}$), on obtient un espace simplicial $\varepsilon_. : X_. \to Y$ au-dessus de Y, d'où un complexe de faisceaux sur Y

$$\varepsilon_{.*}\varepsilon_.^* F = (\varepsilon_{0*}\varepsilon_0^* F \to \cdots \to \varepsilon_{n*}\varepsilon_n^* F \to \cdots)$$

muni d'une augmentation

$$\alpha : F \to \varepsilon_{.*}\varepsilon_.^* F, \tag{2}$$

qui est un quasi-isomorphisme [Go, II 5.2.1]. Toutefois, dans le cas fermé localement fini les foncteurs ε_{n*} sont exacts, alors qu'ils ne le sont pas en général dans le cas ouvert. De ce fait, les méthodes employées dans [Go, II 5.2, 5.4] pour déduire de (2) les suites spectrales sont différentes dans les deux cas. Comment, de façon uniforme, “dériver” le quasi-isomorphisme α ? L'idée - géniale - de Deligne a été de ne pas se borner à considérer les familles de faisceaux sur les X_n provenant de Y par image inverse, mais de regarder plus généralement les *faisceaux* $G_.$ sur $X_.$, i. e. les familles de faisceaux G_n sur les X_n, munies, pour chaque application croissante $f : [m] \to [n]$, définissant $X_f : X_n \to X_m$, d'un homomorphisme $u_f : X_f^* G_m \to G_n$, vérifiant la condition de transitivité naturelle. Les familles de *faisceaux d'ensembles* $G_. = (G_n, u_f)$ forment alors un topos $X_.^{\sim}$ dans lequel la catégorie des faisceaux abéliens possède suffisamment d'objets injectifs (resp. flasques) $G_.$ tels que les restrictions G_n de $G_.$ à chaque “étage” X_n soient injectives (resp. flasques). Ceci vaut plus généralement pour tout espace simplicial. Dans le cas considéré, les ε_n définissent un morphisme de topos $\varepsilon : X_.^{\sim} \to Y$, où $\varepsilon^* = \varepsilon_.^*$ et ε_* est le noyau de la double flèche de ε_{0*} dans ε_{1*}. Il est facile de calculer l'image directe dérivée $R\varepsilon_* : D^+(X_.^{\sim}, \mathbb{Z}) \to D^+(Y, \mathbb{Z})$: pour $G_. \in D^+(X_.^{\sim}, \mathbb{Z})$, $R\varepsilon_* G_.$ est le complexe simple associé au complexe double $\varepsilon_{.*} G'_.$, où $G_. \to G'_.$ est un quasi-isomorphisme, avec $G'_.$ borné inférieurement et ${G'_n}^i$ flasque pour tout $n \geq 0$ et tout $i \in \mathbb{Z}$. La forme dérivée de (2) est que, pour tout faisceau abélien F sur Y, ou plus généralement tout complexe borné inférieurement F sur Y, la flèche d'adjonction

$$\alpha : F \to R\varepsilon_* \varepsilon^* F \tag{3}$$

est un isomorphisme (de $D^+(Y, \mathbb{Z})$). En d'autres termes, pour tout faisceau abélien F sur Y, $F \xrightarrow{\sim} \varepsilon_* \varepsilon^* F$ et $R^i \varepsilon_* \varepsilon^* F = 0$ pour $i > 0$ (ce qui, dans le cas d'un recouvrement ouvert, équivaut à (2) pour F flasque). Les suites spectrales (1) en découlent aussitôt.

L'isomorphisme (3) permet de donner un sens au recollement “dans la catégorie dérivée” : le foncteur $\varepsilon^* : D^+(Y, \mathbb{Z}) \to D^+(X_.^{\sim}, \mathbb{Z})$ est pleinement fidèle, et l'image essentielle est formée des objets K dont les faisceaux de cohomologie $H^i K$ sont dans l'image essentielle, i. e. proviennent de Y par image inverse : pour un recouvrement ouvert, cela signifie que ces faisceaux sont les familles de faisceaux sur les U_i munies d'une donnée de recollement sur les intersections $U_i \cap U_j$. Le point de vue est changé : il ne s'agit plus de se donner naïvement une famille d'objets de $D^+(U_i, \mathbb{Z})$ munie d'une donnée de recollement sur les intersections, mais des complexes de faisceaux sur les U_i, les $U_i \cap U_j$, $\cdots$, $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_n}$, avec des flèches de transition formant un complexe de faisceaux sur $X_.^{\sim}$, astreint à certaines conditions sur ses faisceaux de cohomologie. Plus tard, Deligne reviendra sur la question du recollement “naïf”, dans le cas des faisceaux pervers, où il redevient possible [BBD, 3.2].

Par ailleurs, la généralisation désirée des deux suites spectrales est toute trouvée. Partant d'une application continue $\varepsilon_0 : X_0 \to Y$, on forme l'espace simplicial $X_. = ([n] \to (X_0/Y)^{n+1})$, augmenté par $\varepsilon_.$ vers Y. On dispose encore d'un topos $X_.^{\sim}$ et d'une flèche d'adjonction (3). Deligne dira que ε_0 est *de descente cohomologique pour* F (resp. *de descente cohomologique*) quand cette flèche est un isomorphisme (resp. est un isomorphisme pour tout F). Par exemple si l'application ε_0 est propre et surjective (on appelle ici *propre* une application séparée et universellement fermée), ε_0 est de descente cohomologique grâce au théorème de changement de base propre topologique [SGA 4

Vbis 4.1.1]. On obtient alors une suite spectrale

$$E_1^{pq} = H^q(X_p, \varepsilon_p^* F) \Rightarrow H^{p+q}(Y, F), \tag{4}$$

généralisation commune des deux suites spectrales (1). Bien entendu, cette notion se prête à de nombreuses variantes et généralisations en géométrie algébrique : topologie de Zariski et faisceaux quasi-cohérents, topologie étale et faisceaux constructibles, etc. Dans son exposé à Bures, Deligne s'était gardé de noyer l'auditeur sous une trop grande généralité. La rédaction qu'en fera Saint-Donat dans [SGA 4 V bis] n'aura pas le même souci pédagogique, mais couvrira tous les cas de figure utiles.

Revenons à la condition de descente cohomologique. Un morphisme fidèlement plat, quasi-compact et quasi-séparé $f : X_0 \to Y$ est de descente cohomologique pour les faisceaux quasi-cohérents F sur Y (généralisation d'un résultat de Grothendieck [FGA, TDTE I, B, Lemme 1.1]). Un morphisme propre et surjectif $f : X_0 \to Y$ entre schémas séparés de type fini sur $\mathbb{C}$ (resp. entre schémas) est de descente cohomologique pour les faisceaux abéliens et la cohomologie de Betti (resp. les faisceaux étales de torsion et la cohomologie étale). Le cas où f est un revêtement fini étale galoisien de groupe G est précisément celui de la "descente galoisienne", qui donne une version dérivée de l'équivalence entre G-faisceaux sur X_0 et faisceaux sur Y. Cependant, Deligne allait exploiter, de façon plus profonde, cette condition de descente cohomologique. Il rêvait probablement déjà d'une théorie de Hodge des variétés singulières. J'en vois pour preuve la généralisation qu'il donna de (3) pour des *hyperrecouvrements*.

La notion d'hyperrecouvrement dans un topos T venait d'être introduite par Verdier ([SGA 4 V 7]), d'après une idée de Cartier. Verdier montrait qu'on peut calculer les groupes de cohomologie $H^q(T, F)$ de T à valeurs dans un faisceau abélien F comme limite inductive de groupes de cohomologie de Čech associés à des hyperrecouvrements de T de plus en plus fins. L'objet simplicial $X_{.} = [n] \mapsto X_n = (X_0/Y)^{n+1}$ associé à la somme X_0 d'une famille couvrante $(U_i)_{i \in I}$ de l'objet final e_T de T est l'exemple le plus simple d'un hyperrecouvrement : c'est le cosquelette d'indice zéro de X_0/T. Plus généralement, un objet simplicial tronqué d'ordre n $S_{\leq n}$ au dessus de (l'objet final) de T se prolonge en un objet simplicial $S.$ au-dessus de T par le n-ième cosquelette : $S_{.} = \mathrm{cosq}_n(S_{\leq n})$, adjoint à droite du foncteur restriction. Un hyperrecouvrement $X_{.}$ de T est un objet simplicial tel que $X_0 \to e_T$ soit un épimorphisme et que pour chaque n, la flèche naturelle de X_{n+1} vers $\mathrm{cosq}_n(X_{\leq n})_{n+1}$ soit un épimorphisme (intuitivement, on "recouvre" les $U_i \cap U_j$ par des U_{ij}, les $U_{ij} \cap U_{jk} \cap U_{ki}$ par des U_{ijk}, etc.). Si T est le topos ponctuel, les hyperrecouvrements de T sont les ensembles simpliciaux de Kan contractiles. Le théorème de Verdier avait alors surtout pour intérêt de montrer qu'on pouvait calculer la cohomologie (Zariski, ou étale) de schémas non nécessairement séparés, par un procédé "à la Čech" utilisant des hyperrecouvrements à composantes sommes de schémas affines. Deligne allait donner à la notion d'hyperrecouvrement une toute autre portée.

Si $\varepsilon_{.} : X_{.} \to Y$ est un espace topologique simplicial augmenté, on dispose encore, pour tout faisceau abélien F sur Y, d'une flèche d'adjonction (3). Deligne dira que $\varepsilon.$ est *de* *descente cohomologique* si (3) est un isomorphisme. Dans le cas où $X_. = \mathrm{cosq}_0(X_0/Y)$, on retrouve la notion précédente. De la théorie qu'il développe, dès 1965, résulte le fait que, si $X.$ est un *hyperrecouvrement propre* de Y, par quoi on entend que la flèche ε_0 ainsi que, pour tout n, la flèche $X_{n+1} \to \mathrm{cosq}_n(X_{\leq n})_{n+1}$ est propre et surjective, alors $\varepsilon_.$ est de descente cohomologique. En même temps, Deligne montre comment construire des hyperrecouvrements d'un type prescrit. Par exemple, si Y est un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{C}$, on dispose, par Hironaka, d'un morphisme propre et surjectif $\varepsilon_0 : X_0 \to Y$, où X_0 est lisse sur $\mathbb{C}$. Les composantes du 0-ième cosquelette de ε_0, i. e. les produits fibrés successifs $(X_0/Y)^{n+1}$ ne sont plus en général lisses sur $\mathbb{C}$. On peut cependant appliquer Hironaka à $X_0 \times_Y X_0$, i. e. trouver $X'_1 \to X_0 \times_Y X_0$ propre et surjectif, avec X'_1 lisse sur $\mathbb{C}$, puis remplacer $X_0 \times_Y X_0$ par $X_1 = X_0 \coprod X'_1$, prendre le 1-cosquelette de l'espace simplicial 1-tronqué ainsi obtenu, puis appliquer Hironaka à sa composante de degré 2, etc. On construit ainsi, pas à pas, un hyperrecouvrement propre $\varepsilon_. : X_. \to Y$, dont les composantes X_n sont lisses sur $\mathbb{C}$. Comme $\varepsilon_.$ est de descente cohomologique, (3) est un isomorphisme et la suite spectrale (4) qui en découle permet d'exprimer la cohomologie de Betti de Y en termes de cohomologies de Betti de schémas lisses sur $\mathbb{C}$. Si Y est propre sur $\mathbb{C}$, il en est de même des X_n. Dans le cas général, on peut imposer à X_n d'être le complément d'un diviseur à croisements normaux dans un schéma projectif et lisse sur $\mathbb{C}$, plus précisément, obtenir un diagramme commutatif

(5)
$$\begin{tikzcd} X_. \arrow[r, "j_."] \arrow[d, "\varepsilon_."] & Z_. \arrow[ddl] \\ Y \arrow[d] & \\ \operatorname{Spec}\mathbb{C} & \end{tikzcd} ,$$

où $\varepsilon_.$ est un hyperrecouvrement propre, $Z_.$ un schéma simplicial augmenté vers $\mathbb{C}$, projectif et lisse sur $\mathbb{C}$ en chaque degré, $j_.$ un morphisme de schémas simpliciaux tel que, pour tout n, j_n soit une immersion ouverte, avec $X_n = Z_n - D_n$, et D_n un diviseur à croisements normaux dans Z_n : ce sera le point de départ de la construction d'une structure de Hodge mixte sur Y [D2].

Cette construction ne viendra qu'au début des années 70, et d'ici là, Deligne ne donnera que peu d'applications de la descente cohomologique. Il s'agira essentiellement de l'extension de la définition des foncteurs $Rf_!$ et $Rf^!$, en cohomologie étale, du cas compactifiable au cas séparé de type fini [SGA 4 XVII 7]. Des variantes de cette méthode joueront plus tard un rôle important pour le calcul de la cohomologie cristalline (ou log cristalline) en termes de cohomologie de de Rham (cf. par exemple [BO, 7.8] et [HK, 2.18]). Les techniques de descente cohomologique s'avèreront de nouveau cruciales dans la construction, par Laszlo-Olsson, d'un formalisme de six opérations à la Grothendieck sur les champs algébriques [LO].

À propos de champs, je ne peux m'empêcher d'évoquer ici les beaux exposés que Deligne fit, à l'IHES, de la théorie de ce qu'on appelle aujourd'hui "les champs de Deligne-Mumford", une généralisation des "topologies modulaires" introduites par Mumford quelques années auparavant [M]. Les notions de champs et gerbes sont, semble-t-il, dues à Grothendieck, et furent développées systématiquement par Giraud [Gi] pour construire un formalisme de cohomologie non abélienne dans les topos. L'irruption de la géométrie dans ce domaine déroutait quelque peu. En dépit de la magnifique application que Deligne et Mumford en donnèrent dans [DM], et des critères de représentabilité fort commodes prouvés par Artin [A], au début des années 70, pour des objets un peu plus généraux, la théorie ne devait passer dans l'usage courant que bien des années plus tard.

Le formalisme des faisceaux sur les espaces ou schémas simpliciaux allait offrir, vers la fin des années 60, une application dans un tout autre domaine. Généralisant une construction de Quillen [Q], j'avais, dans ma thèse ([I1], [I2]) défini le complexe cotangent $L_{X/S}$ d'un morphisme de topos annelés $f : X \to S$. J'avais montré que, pour un épaississement S' de S d'idéal de carré nul I, si f est plat, la catégorie des déformations plates de X au-dessus de S' est contrôlée par les $\mathrm{Ext}^i(L_{X/S}, f^*I)$ pour $i \leq 2$: obstruction dans le Ext^2, classes d'isomorphie de déformations formant un torseur sous le Ext^1 quand cette obstruction est nulle, et groupe d'automorphismes d'une déformation isomorphe au Ext^0 ([I1, III 2.1.7]). Lorsque f est un morphisme de schémas, et que X est muni de structures additionnelles, telles que l'action d'un groupe d'opérateurs, ou une structure de schéma en groupes, voire en groupes commutatifs, le problème de déformation avec cette structure additionnelle se ramène à un problème de déformation de certains diagrammes de schémas. Par exemple, si G est un schéma en groupes plat, localement de présentation finie sur S, les déformations plates de G sur un épaississement S' de S défini par un idéal de carré nul correspondent aux déformations plates du schéma simplicial $B_{.}G$, $[n] \to (G/S)^n$, avec opérateurs de face et de dégénérescence standard : le *nerf* de G, noté $\mathrm{Ner}(G)$ dans [I2]. Les déformations sont donc contrôlées par les $\mathrm{Ext}^i(L_{B.G/S}, \pi^*I)$, où $L_{B.G/S}$ est le complexe cotangent du topos annelé au-dessus de S défini par le S-schéma simplicial $B.G$ et $\pi : B.G \to S$ la projection. Dans [I2, VII 3.2], on récrit ces groupes en termes de cohomologie G-équivariante de S à coefficients dans le *complexe de Lie* de G tensorisé avec I. Le cas où G est commutatif, voire un schéma en modules sur un anneau constant A tel que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, requiert des diagrammes beaucoup plus compliqués, variantes des "résolutions de MacLane". L'explicitation des Ext^i, dans ce cas, en termes de Ext^i (sur A) de G et du complexe de Lie de G (tensorisé avec I) [I2, VII 4.2.1] se ramène, en dernier ressort, à un miraculeux lemme d'acyclicité combinatoire, que Deligne m'a gracieusement communiqué à cette occasion [I2, VI 4.4]. C'est Grothendieck qui m'avait demandé d'établir ces résultats. Peu de temps après, il les utilisera pour prouver l'existence de déformations infinitésimales de groupes de Barsotti-Tate (ou Barsotti-Tate tronqués) [I3]. Par ailleurs, les résolutions à la MacLane considérées dans [I2] serviront à Breen, huit ans plus tard, pour calculer les extensions du groupe additif [B].

On peut regretter la lourdeur du formalisme cohomologique et homotopique sur lequel s'appuient les résultats précédents. Deligne, avec qui j'en avais souvent discuté, proposa, dans un texte inédit [D1], une approche plus géométrique. Inspiré par une lettre de Grothendieck à Verdier, il avait dégagé, dans [SGA 4 XVIII 1.4], la notion de *champ de Picard*, et l'avait utilisée pour établir une "formule des coefficients universels" [SGA 4 XVIII 1.5.2] pour le foncteur de Picard relatif d'une courbe projective et lisse sur une base générale. Les champs de Picard offraient un cadre naturel pour étudier les déformations. Le résultat principal de [I1] concernant la classification des épaississements d'un schéma par un idéal de carré nul ([I1, III 1.2.3]) peut se reformuler ainsi : si X est un S-schéma, et M un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent, le champ de Picard $\mathcal{O}_X$-linéaire des S-extensions locales de X par M (comme idéal de carré nul) est représenté par $(\tau_{\leq 1} R\mathcal{H}om(L_{X/S}, M))[1]$. Ce champ ne dépend que du tronqué $\tau_{\geq -1} L_{X/S}$. Deligne donne une description directe du champ défini par ce tronqué, en termes de plongements locaux de X dans un S-schéma lisse. Il voit dans cette méthode "un avatar de la descente cohomologique". Il est tentant d'essayer de récupérer par ce biais la théorie d'obstructions de [I2, VII]. Il faudrait, pour cela, pouvoir interpréter, en termes de champs (éventuellement, de n-champs), des tronqués convenables du triangle de transitivité de complexes cotangents associé à un composé. Deligne, dans [D1], fait des suggestions en ce sens, mais à ma connaissance, à part une brève mention dans [O2], ces questions n'ont pas été réexaminées depuis. Dans une autre direction, je signalerai l'usage essentiel qui est fait de la descente cohomologique dans la construction de complexes cotangents pour les champs algébriques ou les log schémas ([LM], [O1], [O2]).

En 1996, les théorèmes d'altération de de Jong ([dJ1], [dJ2]) allaient ouvrir à la descente cohomologique un tout nouveau et vaste champ d'applications. Dans l'introduction de [dJ1], de Jong note que, si Y est un schéma séparé de type fini sur un corps parfait k, son résultat principal permet de construire par la méthode rappelée plus haut, un diagramme du type (5), avec k au lieu de $\mathbb{C}$, et il mentionne quelques applications, telles que la finitude de la cohomologie rigide de Berthelot (cf. [BdJ], [L]) (l'argument esquissé là sera complété par Tsuzuki ([Ts1], [Ts2]) et Nakkajima [Na]). D'autres, telles que la semi-stabilité potentielle de la cohomologie étale p-adique des schémas séparés de type fini sur un corps de valuation discrète complet de caractéristique nulle et corps résiduel parfait de caractéristique $p > 0$ (conjecture C_{pst} de Fontaine) utilisent une variante de (5), sur un trait, avec des couples (Z_n, D_n) "à réduction semi-stable" (voir [Fa], [Ni], [T1], [T2], [T3], [T4] pour le cas semi-stable, [T1] pour le cas propre, et [K], [Y] pour le cas général). Bien d'autres seront obtenues.

"La descente galoisienne ..." Sous sa forme la plus simple, Deligne devait, dix ans après, en donner une application inattendue. Avec Lusztig, dans [DL], il prouve que, si X est un schéma quasi-projectif sur un corps algébriquement clos k, muni d'un automorphisme d'ordre fini u, alors le nombre de Lefschetz $\mathrm{Tr}(u, H_c^*(X, \mathbb{Q}_\ell)) = \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(u, H_c^i(X; \mathbb{Q}_\ell))$ (ℓ premier différent de la caractéristique de k) est un entier rationnel, indépendant de ℓ. Une réduction standard ramène au cas où k est une clôture algébrique d'un corps fini $\mathbb{F}_q$, X provient, par extension des scalaires, d'un schéma quasi-projectif X_0 sur $\mathbb{F}_q$, et u, d'un automorphisme u_0 de X_0. Soit $F \in \mathrm{Gal}(k/k_0)$ le Frobenius géométrique. Un argument classique montre qu'il suffit de prouver que, pour tout $n \geq 1$, le nombre de Lefschetz

$\mathrm{Tr}(uF^n, H_c^*(X, \mathbb{Q}_\ell))$ appartient à $\mathbb{Q}$ et est indépendant de ℓ. Or la descente galoisienne montre l'existence d'un schéma quasi-projectif X'_n sur $\mathbb{F}_{q^n}$ tel que $X = X'_n \otimes_{\mathbb{F}_{q^n}} k$ et $uF^n = \mathrm{Id}_{X'_n} \otimes_{\mathbb{F}_{q^n}} F^n$. La conclusion découle alors de la formule des traces de Grothendieck. Une variante de cet argument, en conjonction avec les résultats de de Jong rappelés *supra*, vient d'être utilisée par Zheng [Z] pour prouver l'analogue sur un corps local à corps résiduel fini du théorème d'indépendance de ℓ de Gabber [Fu] (stabilité, par les six opérations de Grothendieck, des familles rationnelles et indépendantes de ℓ de complexes ℓ-adiques). Qui sait, la "descente galoisienne" n'a peut-être pas encore livré tous ses secrets ...

Je remercie Michel Raynaud, Takeshi Tsuji et le rapporteur pour d'utiles remarques.

[A] M. Artin, *Versal deformations and algebraic stacks*, Inv. Math. 27 (1974), 65-189.

[B] L. Breen, *Extensions du groupe additif*, Publ. Math. IHES 48 (1978), 39-126.

[BdJ] P. Berthelot, *Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide, avec un appendice de A. J. de Jong*, Inv. Math. 128 (1997), 329-377.

[BBD] A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux pervers*, dans Analyse et topologie sur les espaces singuliers (I), Astérisque 100, SMF, 1982.

[BO] P. Berthelot and A. Ogus, *Notes on crystalline cohomology*, Math. Notes Princeton Univ. Press, 1978.

[D1] P. Deligne, Notes manuscrites sur le complexe cotangent, août 1970.

[D2] P. Deligne, *Théorie de Hodge III*, Pub. Math. IHES 44 (1975), 5-77.

[dJ1] A. J. de Jong, *Smoothness, semi-stability and alterations*, Pub. Math. IHES 83 (1996), 51-93.

[dJ2] A. J. de Jong, *Families of curves and alterations*, Ann. Inst. Fourier 47, 2 (1997), 599-621.

[DL] P. Deligne and G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Math. 103 (1976), 103-161.

[DM] P. Deligne and D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of given genus, Pub. Math. IHES 36 (1969), 75-109.

[Fa] G. Faltings, *Almost étale extensions*, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II, Astérisque 279 (2002), 185-270.

[Fu] K. Fujiwara, *Independence of ℓ for Intersection Cohomology (after Gabber)*, Algebraic Geometry 2000, Azumino (Ed. S. Usui, M. Green, L. Illusie, K. Kato, E. Looijenga, S. Mukai, S. Saito), Advanced Studies in Pure math. 36 (2002), 145-151.

[Gi] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Die Grundlehren der mathematische Wissenschaften in Einzeldarstellungen Bd 179, Springer-Verlag, 1971.

[Go] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, 1958.

[HK] O. Hyodo and K. Kato, *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, Exp. V dans Périodes p-adiques, Séminaire de Bures, 1988, 221-268, Astérisque 223, SMF, 1994.

[I1] L. Illusie, *Complexe cotangent et déformations I*, SLN 239, Springer-Verlag, 1971.

[I2] L. Illusie, *Complexe cotangent et déformations II*, SLN 283, Springer-Verlag, 1972.

[I3] L. Illusie, *Déformations de groupes de Barsotti-Tate, d'après A. Grothendieck*, dans Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, par L. Szpiro, Astérisque 127, SMF, 1985.

[K] M. Kisin, *Potential semi-stability of p-adic étale cohomology*, Israël J. Math. 129 (2002), 157-173.

[L] B. Le Stum, *Rigid Cohomology*, Cambridge Tracts in Math.172, Cambridge Univ. Press, 2007.

[LM] G. Laumon et L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 39, Springer-Verlag, 2000.

[LO] Y. Laszlo, M. Olsson, *The six operations for sheaves on Artin stacks II : adic coefficients*, arXiv :math/0603680v1.

[M] D. Mumford, *Picard Groups of Moduli Problems*, in Arithmetical Algebraic Geometry, Proceedings of a Conference held at Purdue Univ., Dec. 5-7, 1963, Edited by O. F. G. Schilling, 33-81, Harper and Row, 1965.

[Na] Y. Nakkajima, *Weight filtration and slope filtration on the rigid cohomology of a variety in characteristic* $p > 0$, preprint, 2007.

[Ni] W. Niziol, *Semistable conjecture via K-theory*, Duke Math. J. 141 (2008), 151-178.

[O1] M. Olsson, *The logarithmic cotangent complex*, Math. Ann. 333 (2005), 859-931.

[O2] M. Olsson, *Deformation theory of representable morphisms of algebraic stacks*, Math. Zeit. 253 (2006), 25-62.

[Q] D. Quillen, *On the (co-) homology of commutative rings*, in Applications of Categorical Algebra, Proc. Sympos. Pure Math., vol. XVII, New York, 1968, 65-87, AMS, Providence, R. I.

[T1] T. Tsuji, *p-adic Hodge theory in the semi-stable reduction case*, Proc. of the ICM, Vol. II (Berlin 1998), Doc. Math. 1998, Extra Vol. II, 207-216.

[T2] T. Tsuji, *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. Math. 137 (1999), 233-411.

[T3] T. Tsuji, *Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen : a survey*, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II, Astérisque 279 (2002), 323-370.

[T4] T. Tsuji, *On the Maximal Unramified Quotients of p-adic Étale cohomology Groups and Logarithmic Hodge-Witt Sheaves*, Documenta Math., Extra Volume : Kazuya Kato's Fiftieth Birthday (2003), 833-890.

[Ts1] N. Tsuzuki, *Cohomological descent of rigid cohomology for proper coverings*, Invent. Math. 151 (2003), 101-133.

[Ts2] N. Tsuzuki, *Cohomological descent in rigid cohomology*, Geometric aspects of Dwork theory, Vol. II (A. Adolphson, F. Baldassarri, P. Berthelot, N. Katz, F. Loeser, eds), 931-981, Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, Berlin, 2004.

[Y] G. Yamashita, *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology for open varieties with semistable reduction*, preprint, 2008.

[Z] W. Zheng, *Sur l'indépendance de ℓ en cohomologie ℓ-adique sur les corps locaux*, Thèse (Orsay), 2007.

[FGA] A. Grothendieck, *Fondements de la géométrie algébrique. Extraits du Séminaire Bourbaki* 1957-1962, Secrétariat mathématique, Paris, 1962.

[SGA 4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963-64, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, SLN 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972, 1973.

[SGA 4 1/2] *Cohomologie étale*, par P. Deligne, SLN 569, Springer- Verlag, 1977.

[SGA 5] *Cohomologie ℓ-adique et fonctions L*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1965-66, dirigé par A. Grothendieck, SLN 589, Springer-Verlag, 1977.

Luc Illusie
Université de Paris-Sud (Orsay)
Département de Mathématiques, Bât. 425
91405 Orsay Cedex, France
Luc.Illusie@math.u-psud.fr