

Au coeur des équations aux dérivées partielles et au service de la communauté mathématique (période 1971-1989).

Bernard Helffer
Professeur émérite à l'université de Nantes

9 mars 2023

1 Introduction

Plusieurs collègues m'ont suggéré au moment où je prenais ma retraite de raconter la vie scientifique telle que je l'ai vécue depuis les années 70. Il est vrai que la génération scientifique qui m'a précédé est en voie de disparition. Il est donc possible qu'il soit utile à travers mon histoire scientifique personnelle de raconter comment les équations aux dérivées partielles (EDP) ou l'analyse semi-classique se sont développées et aussi comment la communauté scientifique s'est organisée en mathématiques pendant ces années. Bien sûr, le livre de Laurent Schwartz "un mathématicien aux prises avec le siècle", publié par les éditions Odile Jacob, contient beaucoup d'informations sur ce qui s'est passé durant la même période et presque jusqu'à sa mort, nos chemins s'y sont croisés plusieurs fois, mais son texte ne comporte que peu d'informations en ce qui concerne les EDP et est plus une explication de tout ce qu'il a voulu faire tout au long de sa vie, en particulier pour l'Ecole Polytechnique et le développement de la Recherche en France. Je m'en tiendrai à une place, plus modeste, plus descriptive mais personnelle, ayant conscience que si j'ai servi au mieux ma discipline et la communauté, je ne fais pas partie des visionnaires qui, outre L. Schwartz et Jacques Louis Lions, l'ont impulsée en France dans la période décrite parmi lesquels je citerai Jean Pierre Bourguignon, Michel Demazure et Jean François Méla.

Une fois le principe de raconter décidé il y a maintenant dix ans, il reste un gros problème à résoudre : je ne mémorise pas très bien le passé et toute ma famille sait que je n'ai gardé que peu de souvenirs d'enfance. Le plus sage semblait donc de commencer ces mémoires au moment où ma carrière de mathématicien s'est vraiment décidée, c'est à dire en deuxième année de mes études à l'École Polytechnique et de terminer le jour où mes collègues, collaborateurs et anciens élèves organisèrent un colloque pour mes soixante ans. Il est bon en effet de garder un peu de distance avec ce que j'ai fait depuis, en particulier à la présidence de la SMF. Au final, je ne me contenterai pour l'instant qu'à la période se terminant en 1989 date à laquelle je quitte professionnellement l'université de Nantes (du moins jusqu'à mon retour comme émérite 25 ans plus tard). J'espère aussi que le lecteur ne me tiendra pas rigueur des erreurs de date et des souvenirs imprécis. Mieux, j'espère qu'il me rectifiera ou me donnera son point de vue. Le livre de Laurent Schwartz m'a aussi beaucoup aidé de même que l'inévitable Google qui pour le bien ou le mal de chacun se souvient de beaucoup de choses.

Enfin certes, les mathématiques ont occupé une énorme place dans ma vie, mais je ne voudrais pas que le lecteur pense que ce fut toute ma vie : ma famille et d'autres engagements l'ont aussi bien remplie mais ce n'est pas l'objet de ce texte d'en parler et cela restera mon jardin secret, même si parfois je laisserai s'échapper quelques souvenirs familiaux.

Je remercie tous ceux qui ont déjà accepté de partager leurs souvenirs sur certains points¹ et bien sûr tous ceux qui ont collaboré avec moi, que ce soit en faisant des maths ou que ce soit en m'aidant dans toutes mes tâches au long de ma vie scientifique ou administrative : collègues, secrétaires, personnels ATOS,...

J'ai arrêté mon évocation à l'année 1989 qui correspond à la naissance de ma fille Marie (dernière de la série) et à la fin de mon affectation à Nantes, et même avant pour l'analyse semi-classique que je raconte un peu ailleurs [Hel2003]. J'ai connu ensuite beaucoup d'expériences tant scientifiques qu'administratives mais il s'agit d'un passé plus récent où paradoxalement j'ai beaucoup moins d'archives. L'arrivée du courrier électronique a en

1. Parmi eux P. Bolley, A.M. Charbonnel, G. Grubb, G. Métivier, D. Robert, J. Sjöstrand, C. Zuily,...

effet conduit à la disparition des documents papier. Par ailleurs mon profil relève de plus en plus de la physique mathématique et le titre ci-dessus ne reflète plus la réalité.

Le texte a été principalement écrit lors de mon départ à la retraite. Dans les dix années qui ont suivi j'ai mis quelques retouches mais je n'ai pas complètement retravaillé le texte en particulier pour y intégrer des découvertes récentes.

2 La vocation ?

Je n'ai pas particulièrement été attiré par les mathématiques au début de ma scolarité au Lycée. Jusqu'à la seconde, j'étais plus intéressé par les langues : allemand, latin, grec, russe.. et, ce qui restera une constante, le sport, tout particulièrement le rugby.

Cela a-t-il eu une incidence ? J'étais le camarade de classe de Vincent Piron, qui était le petit-fils de Paul Lévy et le neveu de Laurent Schwartz² et je me souviens d'avoir vu, en allant chez mon camarade, Paul Lévy qui habitait chez sa fille Denise (soeur de Marie-Hélène Schwartz). C'était un vieux monsieur très discret. J'ai aussi entendu parler par V. Piron de "tonton Laurent" bien avant d'entrer à Polytechnique.

Après les deux années de classe préparatoire au Lycée Janson de Sailly³, me voici donc à Polytechnique⁴ après avoir échoué de peu à l'ENS. Je n'ai pas beaucoup de souvenirs de la première année. Bien sûr il y avait des enseignements magistraux de qualité⁵ (Gustave Choquet, Jacques Deny, Jacques-

2. Paul Lévy : 1886-1971 est un des fondateurs de la théorie moderne des probabilités en France. Laurent Schwartz (1915-2002) est le fondateur de la théorie des distributions. Il obtient la médaille Fields en 1950. Nous renvoyons à ses mémoires pour l'histoire de sa vie engagée dans son siècle. Marie-Hélène Schwartz (née Lévy) (1913-2013) fut aussi une grande mathématicienne.

3. Sans jamais être dans la même classe, c'est à Janson que je rencontre pour la première fois Michèle Schatzman, plus visible à l'époque comme militante des comités Vietnam.

4. Comme mon père, de la promotion 1942, mais qui peu après sa sortie en 1946 (la rentrée effective ne se fit qu'après la guerre) décida de se lancer dans une carrière de pianiste professionnel.

5. G. Choquet (1915-2006) est de la même promotion que L. Schwartz à l'ENS. J-L. Lions (1928-2001), élève de L. Schwartz, jouera un rôle fondamental dans le développement des math. appliquées en France. Jacques Neveu (1932-2016) est après Paul Lévy est un des fondateurs des probabilités en France.

Louis Lions, Jacques Neveu) mais qui étaient peu présents en dehors de leurs cours, des encadrants motivés (comme par exemple Michel Métivier et Pierre-Arnaud Raviart qui montraient beaucoup d'enthousiasme pour les "petites classes"⁶ mais d'autres enseignants ou encadrants avaient une compétence plus contestable et ne devaient leur position qu'à leur statut d'ancien polytechnicien. Je suis resté dans cette période sans doute assez scolaire, même si l'école vivait une période agitée⁷ après 1968. La promotion précédente avait été envoyée⁸ au vert pour éviter une contagion possible et notre promo a ainsi évité les traditionnels bizutages et s'est toutefois exercée à une contestation qui était dans l'air du temps. Je me souviens par exemple d'un examen (je crois de Mécanique) en casert (au lieu de le faire dans une salle d'examen) dont le résultat m'avait laissé perplexe. J'avais en effet beaucoup aidé mes petits camarades et restais étonné de me retrouver avec une note inférieure à la plupart d'entre eux. La copie est parfois supérieure à l'original). L'idée dans cette contestation des formes classiques d'examen était bonne sur le fond. Elle entraînait dans la contestation plus générale du système du classement de sortie à l'école Polytechnique.

Je retrouvais le soir⁹ à la bibliothèque Sainte-Geneviève Lise, ma future femme (en deuxième année de médecine à Cochin, donc pas si loin via la rue Saint-Jacques et la rue de la montagne Sainte-Geneviève) et nous travaillions

6. Travaux dirigés dans le langage polytechnicien

7. Les événements de Mai 1968 et l'écho qu'ils ont eu au sein de l'Ecole pour les promotions X 66 et X 67, ont conduit la direction de l'école à remplacer le système antérieur : deux ans d'étude puis un an purement militaire, en un système où après la première année d'étude, la deuxième année commençait par quatre mois de formation militaire suivie de huit mois d'étude (en fait six mois à cause des vacances et du stage ouvrier), la troisième année commençant par quatre mois d'études suivis de huit mois où le polytechnicien était affecté comme sous-lieutenant dans un régiment. Le diplôme d'ingénieur de l'école est attribué à la fin de la deuxième année.

8. Je cite Wikipedia : En mai 1968, l'École est occupée à la suite d'un vote recueillant la majorité des deux promotions 1966 et 1967, avec la neutralité de l'administration militaire, qui laisse les élèves participer librement aux événements externes (assemblées générales et manifestations étudiantes) mais à la condition de ne pas engager l'École par le port de l'uniforme. Un comité d'action en prend la direction, réunissant réformistes et révolutionnaires, enseignants (Gustave Choquet, Laurent Schwartz et Louis Leprince-Ringuet) et élèves (Yves Bamberger, Jean-Pierre Bourguignon, Alain Lipietz, Michel Spiro, etc.). Le comité organise des "cours sauvages", propose une nouvelle pédagogie, soutient les piquets de grève ouvriers en leur fournissant des "gauloises de troupe".

9. Le système d'internat à Polytechnique imposait un retour à l'Ecole avant 22h ou, au-delà de cet horaire, de faire le mur du côté de la station de métro Cardinal Lemoine.

sérieusement (enfin presque). Le rugby prend beaucoup de mon temps et de mes forces mais je participe aussi à quelques séminaires autoorganisés en maths par les élèves¹⁰. En deuxième année, je choisis une option Théorie des Groupes de Lie (enseignée par Charles Marle) et un travail personnel avec un physicien théoricien Gérard Fuchs¹¹ (en binôme avec Jacques Magnen, qui deviendra un très bon spécialiste en Physique Théorique et fera toute sa carrière au CNRS). Je deviens représentant des élèves dans une structure créée (je crois) par L. Schwartz (que je rencontre à cette occasion pour la première fois, il ne fut en effet jamais mon enseignant à l'école). C'est dans ce cadre que je rencontre pour la première fois Jean Pierre Bourguignon qui dans le cadre de sa troisième année avait (avec Yves Bamberger) une position de conseiller à l'enseignement¹². Je ne fus pas enthousiasmé par les maths qui me furent enseignées cette année là mais au moment de choisir pour la troisième année (en fait les quatre mois restants avant le service militaire). Je choisis, un peu par hasard, une option Equations aux dérivées Partielles enseignée par C. Goulaouic¹³. Sans doute à peu près au même moment, L. Schwartz me propose (je ne sais plus exactement dans quelle condition) de candidater pour un poste de stagiaire au CNRS. En fait, L. Schwartz avait obtenu de la commission maths du CNRS que un ou deux postes soient en quelque sorte attribués à un polytechnicien dont il donnerait le nom. L'idée de L. Schwartz¹⁴ était qu'il fallait des mesures concrètes pour encourager des

10. Les sujets choisis (théorie des catégories par exemple) n'étaient sans doute pas les meilleurs. Il ne me semble pas qu'on était vraiment encadré en première année par les enseignants de l'école. Un des animateurs les plus mordus fut Bernard Gaveau qui fit une belle carrière de recherche en analyse complexe mais eut une activité de directeur d'UFR à Paris 6 dans les années 90 plus contestée.

11. Bien m'en a pris de ne pas continuer en recherche avec lui car quelques années plus tard, il se reconvertira à l'Économie avant de s'engager avec succès dans une carrière politique au sein du Parti Socialiste.

12. Ils oeuvrèrent avec succès dans cette fonction pour modifier l'enseignement complètement sclérosé de la mécanique : c'est grâce à eux que je découvre la mécanique hamiltonienne.

13. C. Goulaouic (1938-1983) est nommé Professeur à Orsay en Octobre 1970 et est Maître de Conférences à mi-temps à Polytechnique depuis 69, avant de devenir Professeur à plein temps détaché de Paris-Sud.

14. Je cite à ce sujet, ce qu'il raconte dans une interview publiée par la SMF en 1995 : *" Dans la scolarité d'élèves, on n'a rien qui tourne vers la recherche, il fallait autre chose. Je les connaissais, les candidats à la recherche, puisqu'ils avaient travaillé avec moi dans le séminaire. Alors je leur faisais passer à tous un dernier entretien. Et puis je téléphonais au Président de la commission au CNRS, je lui disais : "J'ai trouvé 3 ou 5 ou 8 élèves de*

polytechniciens à s'engager dans la recherche¹⁵. Toujours est-il que me voilà candidat (alors que j'ai tout juste un niveau maîtrise) en train de remplir un dossier dans lequel on me demande de préciser mon programme de recherche. Bien embarrassé, je recopie les têtes de chapitre du cours de C. Goulaouic qui m'était proposé. Le plus amusant est que certains travaux de ma première période (en collaboration avec Pierre Bolley et Jacques Camus) rentrent dans le cadre de ce programme. Peu de temps après, j'apprend que je suis recruté au CNRS comme stagiaire, à l'issue de mon service militaire, c'est-à-dire au 1-er Octobre 1971. Ainsi, plus que par vocation, mais parce que quelqu'un a parié sur mes capacités à faire de la recherche, je me retrouve chercheur en mathématiques.

Pour resituer ce choix de devenir chercheur (indépendamment de la discipline), il faut sans doute évoquer la bataille menée au sein de la promotion sur une facilité donnée aux futurs chercheurs à laquelle j'ai participé. Jus-

l'Ecole polytechnique qui désirent entrer au CNRS, je les ai bien repérés et je pense qu'ils sont capables de faire de la recherche plus tard; ils n'ont rien encore qui puisse le prouver, mais je pense qu'il faut faire confiance". Et connaissant le sérieux avec lequel j'avais procédé, et surtout le niveau des polytechniciens (...), on l'admettait ainsi au CNRS. Et je dois dire que je ne me suis pas trompé une seule fois, que tous les élèves de l'Ecole polytechnique qui sont sortis de cette manière dans la recherche sont tous devenus des mathématiciens professeurs d'université en France."

Bien sûr, après des années exceptionnelles avec les promotion 65 où j'ai dénombré douze mathématiciens (D. Barsky, N. Bouleau, P. Cahen, J.L. Chabert, J.M. Deshouillers, M. Fliess, P. Gauduchon, J.P. Henry, F. Ledrappier, E. Mazet, J. Petitot, L. Tartar) et 66 où j'ai dénombré douze mathématiciens ou informaticiens (F. Blanchard, J.-P. Bourguignon, J.F. Boutot, J. Ecalle, D. Gabay, A. Louveau, B. Maurey, F. Murat, D. Perrin, O. Pironneau, J. Sakharovich, J. Vuillemin), le flux s'est tari et L. Schwartz embellit un peu la situation sur le nombre d'entrants au CNRS, mais cette confiance qu'il avait en nous était communicative.

15. Dans les années 65-69, il eut un réel succès. J'ai déjà mentionné le cas exceptionnel de la promotion 66. Pour la promotion 67, je ne trouve que 3 noms J.M. Bismut (qui passera par le corps des mines avant d'en démissionner), E. Pardoux, J. Simon. Dans ma promotion 68, outre B. Gaveau déjà mentionné, et B. Beauzamy, je peux citer en Math. Appliquées Bertrand Mercier, Alain Bamberger, Jean Duchon mais c'est surtout en Informatique (en passant par la logique) que les "matheux" de la promotion 68 eurent des succès spectaculaires avec Olivier Faugeras (qui deviendra académicien), Philippe Flajolet (qui deviendra également académicien, décédé prématurément en 2011), Jacques Mazoyer et Jean-Marc Steyaert. D'autres ont espéré faire de la recherche en maths via les corps mais à ma connaissance, peu¹⁶ ont pu continuer par cette voie. Enfin, il y eut quelques échecs et des reconversions plus ou moins souhaitées. Pour la promotion 69, j'ai trouvé : Daniel Bertrand, Pascal Cherrier, Michel Merle, Gilles Pisier (qui deviendra Académicien) et Mikael Balabane.

qu'à la promotion précédente, ceux qui souhaitaient faire de la recherche après l'Ecole, pouvaient bénéficier pour leur troisième année d'une affectation dans un laboratoire de recherche, leur permettant de passer leur DEA et de se trouver en meilleure position pour entrer dans la recherche. Malgré le soutien des enseignants comme L. Schwartz, nos protestations et pétitions n'aboutirent à rien. Pour marquer le coup, je refusais le prix G. Julia attribué au polytechnicien le mieux classé choisissant la recherche.

Dans mon cas particulier, la seule solution fut de demander une affectation dans la région parisienne en espérant pouvoir m'échapper une demi-journée par semaine. C'est ainsi que de février 1971 à septembre 1971, je me retrouve à former de jeunes recrues dans le camp militaire de Frileuse à l'ouest de Paris (pas loin de Plaisir-Grignon).

Enfin, pour compléter sur mon choix de devenir chercheur, il faut peut-être mentionner que ma mère était chercheuse au CNRS (en ethnomusicologie) et que cela peut-être joué un rôle dans mon inconscient.

En Juillet 70, je discute avec C. Goulaouic de la meilleure manière de préparer ma reconversion en EDP. Le premier conseil est d'apprendre la théorie des distributions qui n'avait pas été enseignée pour ma promotion¹⁷. J'ai passé une partie de l'été à lire le gros livre à la couverture orangée décorée déjà d'un papillon noir¹⁸ de L. Schwartz sur les distributions (en omettant les courants). Les plus jeunes collègues seront sans doute surpris d'apprendre que cette lecture fut précédée de la lecture des volumes : Topologie générale et Espaces Vectoriels Topologiques de Bourbaki. De retour de vacances, C. Goulaouic me remet un cours d'une quarantaine de pages de Lars Hörmander sur les distributions¹⁹ qui m'en apprend beaucoup plus sur l'utilisation des distributions en EDP. Le cours un peu touffu mais très motivant de C. Goulaouic est donc ma première vraie rencontre avec les équations aux dérivées partielles (même si les problèmes variationnels m'avaient été enseignés dans

17. L. Schwartz n'enseignait qu'une année sur deux. L'enseignement en première année en analyse fut pour ma promotion dirigé par G. Choquet et plus orienté vers la théorie de la mesure.

18. Depuis sa création, la page de couverture de chaque volume du séminaire Goulaouic-Schwartz (même après ses changements de nom) est illustrée par un papillon, toujours différent. Laurent Schwartz est un grand collectionneur de papillons.

19. L. Hörmander (1931-2012) est le père de l'analyse microlocale. Il a aussi des contributions fondamentales en Analyse complexe. Il obtient la médaille Fields en 1962 pour ses travaux en résolubilité locale.

un cours de J.L. Lions de l'année précédente et si l'équation de Schrödinger pour l'atome d'hydrogène avait été racontée deux fois : dans le cours de mécanique quantique et celui de chimie quantique.). Je ne me souviens plus du sujet de mon mémoire de DEA présenté en Janvier 1971, quelques jours après mon mariage²⁰. Il me restera pour compléter mon DEA de valider un 1/2 AEA. Je choisis sur la suggestion de Goulaouic un cours de Claude Bardos à Jussieu sur les semi-groupes, que je suis dans les conditions indiquées ci-dessus au deuxième trimestre de 1971. Je ne reviendrai à l'usage de cette théorie que quarante ans plus tard.

3 1971-1978 : les années CNRS

3.1 Chercheur à temps plein

3.1.1 1971-1972

Me voici donc chercheur stagiaire au CNRS, avec C. Goulaouic comme directeur et L. Schwartz comme parrain, dans la situation un peu étrange que je n'ai encore pas commencé la moindre recherche. En Janvier 1972, je deviens aussi "nouveau papa" avec la naissance de Jérôme. Sans que ce soit une obligation statutaire pour un chercheur CNRS, il faut commencer par passer une thèse de troisième cycle. C. Goulaouic me propose de travailler sur la théorie de l'interpolation : Théorèmes de trace dans les espaces de Sobolev avec poids. On ne peut pas dire que j'ai été très gâté avec ce sujet d'autant que C. Goulaouic part à Purdue, dans l'Indiana aux USA, où M.S. Baouendi²¹ est professeur, pour cinq mois. Le sujet s'explique par deux thèses d'état sur l'interpolation soutenues, sous la direction de J.-L. Lions, par C. Goulaouic (thèse en 1967) et P. Grisvard²² (thèse en 1966), thèses qui faisaient suite au travail pionnier de Lions-Peetre (1964) sur les théorèmes de trace. Les généralisations portaient sur des extensions à des espaces de Besov à poids sans aucune motivation. Ce n'est que beaucoup plus tard que le rôle des espaces de Besov prendra de l'importance dans un cadre non-linéaire. Je ne m'attardais pas sur ce sujet et soutenais, peu après le retour

20. Ceci explique peut-être cela.

21. M.S. Baouendi (1937-2011) est un élève de B. Malgrange.

22. P. Grisvard (1940-1994) sera plus connu pour ses travaux pour les problèmes aux limites dans des domaines à coins. Il sera aussi le premier directeur du "nouvel" Institut Henri Poincaré jusqu'à sa mort.

de C. Goulaouic des États-unis ma thèse de troisième cycle en Juin 1972 sans que cela donne lieu à une quelconque publication. Cette première année de recherche aurait pu paraître très négative si en l'absence de directeur, je n'avais pas bénéficié d'autres soutiens : un groupe de travail au centre de mathématique de Polytechnique animé par André et Juliane Unterberger²³, le séminaire EDP Goulaouic-Schwartz, un séminaire EDP à Orsay, suivi de cours de troisième cycle à Jussieu ou Orsay.

Le centre de mathématique de l'École Polytechnique avait été fondé par L. Schwartz quelques années auparavant (1965). Dans sa structure permanente, nous n'étions qu'une douzaine et pour la plupart d'anciens polytechniciens. De mémoire, il y avait quand je suis arrivé un groupe géométrie des espaces de Banach (Bernard Maurey, Bernard Beauzamy), un groupe singularités et géométrie algébrique²⁴ (Bernard Teissier, Monique Lejeune-Jalabert, Lê Dung Trang, Jean Jacques Risler, Jean-Pierre Henry), un topologue Michel Herman, un géomètre Jean Pierre Bourguignon et quelques électrons libres dont je faisais partie. Il y avait aussi beaucoup de visiteurs réguliers (anciens membres du centre et invités des séminaires et groupes de travail). L. Schwartz passait au moins une journée par semaine. Mlle Pouderous assurait la direction administrative du centre avec fermeté, épaulée par Mme Andalo. Marie-José Lécuyer faisait aussi partie du secrétariat. Le laboratoire de Physique théorique, fondé par L. Michel n'était pas loin avec en particulier la présence de Jean Lascoux, qui, avec R. Sénéor, publia la traduction du livre de V. Maslov.

Nous partagions deux ou trois grandes salles et notre travail personnel était souvent interrompu par des discussions informelles entre les uns et les autres, avec à la fois des côtés positifs (pluridisciplinarité) et des côtés négatifs (difficulté de concentration).

Sans être sûr de l'année, c'est sans doute à ce moment qu'arrive une jeune secrétaire plutôt timide Michèle Bianchi (qui deviendra rapidement Michèle Lavallette), qui sera au départ en charge de la frappe du séminaire et qui servira toute sa carrière avec fidélité et efficacité le centre de mathématique, gravissant les échelons jusqu'à en devenir sa directrice administrative jusqu'à son départ à la retraite en 2015. C'est de cette période que date sa manière ironique de m'appeler "Monsieur Helffer" auquel je répond invariablement

23. André Unterberger et Juliane Bokobza-Unterberger sont élèves de L. Schwartz.

24. Voir le texte de B. Teissier écrit à l'occasion du décès de J.-J. Risler : <https://www.imj-prg.fr/IMG/pdf/texte-risler-imj-prg.bt-2.pdf>.

”Madame Lavalette”, en souvenir de la manière dont m’appelait la femme de ménage du centre de math. (dans sa période sur la montagne Ste-Geneviève) Mme Volante quand elle arrivait pour son travail.

Le séminaire EDP d’Orsay avait été créé par C. Goulaouic à son arrivée à Orsay mais le coordinateur fut pendant de très nombreuses années Claude Zuily. Dans l’idée initiale de Goulaouic, il s’agissait d’avoir un séminaire plus informel, où l’on pouvait raconter des résultats sortis récemment ou des travaux en cours. En 1971, je suppose qu’y participaient²⁵ Serge Alinhac, Jean-Michel Bony, C. Goulaouic, Makhlouf Derridj²⁶, Marc Durand, Ahmed Djebbar, Claude Zuily, Philippe Pierart... C’est dans ce cadre qu’il m’est proposé en avril 1971 de regarder un article de Yakar Kannai²⁷ sur une caractérisation de l’hypoellipticité pour des opérateurs différentiels. Le contexte était le suivant. Le cas des opérateurs à coefficients constants était complètement résolu. L’étude du cas à coefficients variables avait démarré (avec le travail de L. Hörmander 1966). L’idée de caractériser le cas de la dimension 1 était donc naturelle. Alors que j’étais déjà avancé dans la lecture, j’apprends de Bernard Malgrange²⁸ que m’avaient fait rencontrer C. Zuily et C. Goulaouic (sans doute à la suite d’un de ses exposés à l’X) qu’il y a une erreur dans une démonstration de cet article. Je travaille donc pour trouver un contre exemple au résultat puis à chercher comment le réparer. J’écris ensuite à Y. Kannai en français qui me répond très gentiment. Nous discutons d’un petit article en commun au Colloque EDP organisé par C. Goulaouic à la fin de l’été 1971. C’est dans ces conditions que je publiais mon premier article

25. Au moins cinq élèves de C. Goulaouic : C. Zuily, S. Alinhac, A. Djebbar, G. Métivier, P. Pierart, auxquels viendront se joindre dans les années qui suivirent A. Grigis, P. Lévy-bruhl sans compter à Rennes où C. Goulaouic fut enseignant de 67 à 70 avant d’arriver à Paris-Sud (en octobre 70) et à Polytechnique (en 69) : P. Bolley, J. Camus, B. Hanouzset, Jean Nourrigat, Monique Sablé -Tougeron, Jacqueline Pellé-Fleckinger. A l’exception de P. Pierart qui quitte la recherche en 76 pour passer l’ENA, tous sont devenus professeurs d’université après parfois des changements complets de sujet : A. Djebbar (1941-) fut ministre de l’éducation en Algérie (92-94) avant de revenir en France et devenir un historien des Sciences réputé. De fait, C. Goulaouic fut à l’époque le principal recruteur en France en théorie des EDP linéaires.

26. Makhlouf Derridj est un élève de M.S. Baouendi.

27. Y. Kannai est un ancien élève de S. Agmon (1922-).

28. B. Malgrange (1928-) est un élève de L. Schwartz. Il fait cette année là une série d’exposés dans le cadre du séminaire Goulaouic-Schwartz sous le titre : ”Sur les points singuliers des équations différentielles”.

qui paraît dans le numéro 2 d'Astérisque, bien loin de mon sujet de thèse de 3-ème cycle et que mon orientation vers l'étude de l'hypoellipticité se dessine.

Le séminaire EDP de l'École polytechnique appelé à l'époque Séminaire Goulaouic-Schwartz est lancé en 1970-1971 et je le découvre donc l'année suivante de sa création. Pendant les premières années (jusqu'au déménagement à Palaiseau), c'était un séminaire hebdomadaire (avec plus d'ampleur une fois par mois). Par certains côtés, il est l'héritier du séminaire Cartan-Schwartz²⁹ (63-64) sur la formule d'Atiyah-Singer (1963). Laurent Schwartz indique dans ses mémoires qu'il laissait carte blanche à C. Goulaouic pour faire le programme en EDP. Ce séminaire me servira de fil rouge dans ma description de mon environnement scientifique jusqu'à mon départ pour Nantes, pour au moins deux raisons : une première toute personnelle fut que j'ai passé beaucoup dans ces années à relire les épreuves de la version écrite des séminaires, la deuxième est que ce séminaire a été un moteur pour le développement des EDP linéaires et de l'analyse microlocale en France et un rendez-vous hebdomadaire puis mensuel important. Même s'il y avait peu d'EDP-istes au centre de math, je me suis ainsi trouvé en un point stratégique avec de grandes possibilités pour rencontrer les spécialistes.

Les programmes du séminaire en 70-71 et 71-72 sont intéressants à regarder. En 1970-71, on y voit sur le thème de l'hypoellipticité des exposés d'O. Oleinik (très peu de russes pouvaient sortir d'Union Soviétique à l'époque), de Derridj-Zuily, de Derridj, sur le thème des opérateurs pseudo-différentiels deux exposés d'A. et J. Unterberger auxquels s'ajoutent deux exposés d'A. Unterberger sur les espaces de Sobolev d'ordre variable, trois exposés de Baouendi-Goulaouic et un exposé de P. Bolley et J. Camus sur les opérateurs elliptiques dégénérés, des exposés de J.M. Bony (Problème de Cauchy), de Pierre Schapira³⁰ (sur le faisceau de M. Sato) et de Jacques Chazarain³¹ (problème mixte hyperbolique). On y trouve aussi un exposé de F. Baratin (X68) qu'on avait chargé de faire un exposé sur les travaux de Hörmander. Enfin un exposé de F. Trèves est donné sur la question de la résolubilité

29. Outre L. Schwartz, on trouve côté analyse, beaucoup des acteurs du développement des EDP : P. Kree, J. Bokobza-Unterberger, A. Unterberger, M.S. Baouendi, L. Boutet de Monvel, P. Grisvard.

30. Pierre Schapira (1943-) est un élève au départ de J.L. Lions mais qui de fait fera sa thèse avec A. Martineau, ancien élève de L. Schwartz, décédé très jeune d'un cancer en 1972.

31. J. Chazarain (1942-) est un élève de Jacques-Louis Lions.

locale. Les autres exposés relèvent de l'analyse en général et reflètent les intérêts de L. Schwartz de l'époque.

En 1971-72, on trouve dans le séminaire en ce qui concerne les EDP des exposés de L. Boutet de Monvel (utilisation des opd et des opérateurs trace pour des problèmes aux limites), B. Hanouzet (théorème d'itérés), Derridj-Zuily (régularité Gevrey des opérateurs de Hörmander), Bony-Schapira (prolongement dans l'holomorphe, problème de Cauchy), A. Unterberger (Problème de convexité), G. Grubb (Problème aux limites), B. Malgrange (Equations différentielles à points singuliers), C. Bardos, H. Duistermaat (Applications des Fourier-Intégraux), Y. Meyer (vibration des sphères), E. de Giorgi (solutions analytiques des EDP à coefficients constants), C. Zuily (travaux de Giorgi), S. Alinhac, L. Hörmander (singularités des solutions d'EDP à coefficients constants). On peut remarquer que l'étude des opérateurs à coefficients constants est encore très présente et qu'il n'y a aucun exposé en EDP non-linéaire, ce qui marque des évolutions séparées dans ces années entre ceux qui travaillent dans l'orbite de H. Brezis et ceux qui travaillent dans l'orbite de Schwartz et Goulaouic.

Je cite pour terminer en référence mon rapport CNRS rédigé fin 72 pour ma première année :

Comme indiqué l'année dernière, j'ai rédigé ma thèse de 3-ème cycle sur le sujet suivant : " Théorèmes de Sobolev dans des espaces généralisés ". Cette thèse avait pour objet de montrer par une méthode de traces successives des théorèmes de Sobolev dont certains ont été démontrés par d'autres méthodes. Depuis, l'étude d'un article de Y. Kannai sur l'hypoellipticité des opérateurs différentiels ordinaires dégénérés et des remarques de B. Malgrange ont conduit à la publication d'un article en collaboration avec Y. Kannai...à paraître aux compte-rendus du colloque international du CNRS (Orsay Octobre 1972). J'ai démontré par ailleurs quelques résultats concernant l'hypoellipticité analytique des opérateurs différentiels ordinaires qui ont été trouvés indépendamment par Y. Kannai.

Je participe à deux groupes de travail, l'un animé par A. Unterberger et l'autre par C. Goulaouic. J'ai exposé à ce dernier sur les sujets suivants : théorème de Sobolev dans les espaces avec poids, hypoellipticité des opérateurs différentiels ordinaires, opérateurs différentiels à coefficients plats.

Je compte en 1973 poursuivre l'étude des équations différentiels ordinaires, en particulier ceux à coefficients plats, et aborder les problèmes de régularité et d'hypoellipticité pour des opérateurs différentiels dégénérés.

Les actes du congrès international des mathématiciens de Nice de 1970 sont intéressants à consulter (on y trouve pour les EDP des exposés de L. Boutet de Monvel³², J.M. Bony³³, O. Olejnik³⁴, Y. Egorov³⁵, F. Trèves³⁶, M. Sato) mais c'est surtout sur le texte de L. Hörmander que je veux m'attarder. Se référant à un exposé de L. Gårding dans un précédent ICM douze ans auparavant, il fait d'abord le bilan de ce qui a été obtenu dans la théorie des opérateurs à coefficients constants et présente ensuite les résultats obtenus dans le cas des opérateurs à coefficients variables. Ses têtes de paragraphe fournissent les grands axes dans lesquels les EDP-istes linéaires vont travailler pendant les dix années qui suivront : opérateurs pseudo-différentiels, hypoellipticité, résolubilité locale, propagation des singularités, opérateurs Fourier-Intégraux, systèmes surdéterminés. La théorie analytique n'apparaît que dans un paragraphe, mais L. Hörmander renvoie ici à l'exposé de M. Sato.

Pour terminer, on peut noter que le séminaire Bourbaki ne rend compte en 70-71, via un exposé de Pierre Grisvard, que des travaux de Nirenberg et Trèves sur la résolubilité locale (caractérisation dans le cas à coefficients analytiques) et en 71-72, via un exposé de B. Malgrange, de la théorie des Fourier intégraux, sous le titre : Opérateurs de Fourier (d'après Hörmander et Maslov).

Enfin, mon fils Jérôme naît en Janvier 1972.

3.1.2 1972-1973

Le centre de math. accueille cette année là Gilles Pisier³⁷ qui renforce le groupe de géométrie des Banach, Michel Merle dans le groupe singularités et Johannes Sjöstrand, qui vient de passer son PHD à Lund avec L. Hörmander,

32. L. Boutet de Monvel (1941-2014) est un élève de L. Schwartz

33. Jean-Michel Bony (1942-) est un élève de G. Choquet.

34. Olga Olejnik (1925-2001) est une mathématicienne soviétique, élève de Petrovskii

35. Youri Egorov (1938-2018) est un mathématicien soviétique qui émigrera en France (Université Paul Sabatier (Toulouse)).

36. François Trèves (1930-) est un mathématicien franco-italo-américain né en Italie mais élevé en France, qui a fait sa thèse avec L. Schwartz sur la résolubilité locale et dont la carrière se poursuivra à Rutgers aux États-Unis.

37. Gilles Pisier (Promotion X 1967) fera une carrière remarquable en Géométrie des espaces de Banach et en analyse harmonique. Il est devenu membre de l'Académie des Sciences.

et qui arrive en France avec une bourse de très faible montant et sans doute surtout motivé par son amour pour une jeune française : Odile. Comme on peut le comprendre dans la suite, cette rencontre jouera un rôle fondamental dans mon parcours de chercheur même si ce n'était pas prévisible cette année là.

Il faut dire que je ne sais pas encore très bien dans quelle direction précise m'engager. J'essaye pendant quelques mois de généraliser les travaux de Y. Kannai dans le cas à coefficients plats mais c'est plutôt une impasse qui sera rapidement abandonnée. Je me plonge aussi dans les séminaires de Rennes et les travaux de P. Bolley, J. Camus, B. Hanouzet qui viennent de finir leur thèse. Je suis aussi les travaux sur l'hypoellipticité menés par C. Zuily qui termine également sa thèse. Je fais aussi des opérateurs pseudo-différentiels à la japonaise en généralisant un travail de Matsuzawa. Ceci m'amène à regarder les opérateurs de Hörmander³⁸ $\sum_j X_j^2$ ou $\sum_j X_j^2 + X_0$ et (c'était le thème de la dernière partie de la thèse de C. Zuily), une généralisation dans l'esprit d'un exemple qui venait de sortir dû à Y. Kannai : $\partial_t \pm t\partial_x^2$.

Pour revenir à Johannes, nous étions dans la même salle. Il terminait la rédaction de son premier article sur l'hypoellipticité des opérateurs à caractéristiques doubles. Il me demandait gentiment sur quoi je travaillais, mais je me souviens surtout de l'approche complètement différente qu'il avait pour l'analyse d'un opérateur aux dérivées partielles, telle que je l'avais acquise de C. Goulaouic, qui était beaucoup plus celle de J.L.-Lions. En caricaturant, face à un opérateur donné, on cherche dans une approche à la Lions à chercher une formulation variationnelle (le fameux triplet V, H, V') puis on se lance dans l'établissement d'inégalités. C'est l'approche prise au départ par M.S. Baouendi et Goulaouic dans leur étude des opérateurs elliptiques dégénérés. Dans l'approche "microlocale", on commence par regarder le symbole principal de l'opérateur et on analyse l'ensemble des zéros du symbole principal, et comment le symbole s'annule sur cet ensemble des zéros.

Ce nouveau point de vue joue un rôle particulièrement dans les travaux de Hörmander de l'époque : Fourier Integral Operators 1 et 2 (avec Duistermaat pour le second) sont sortis en 71 et 72. On peut lire dans l'exposé de L. Hörmander au congrès international des mathématiciens de Nice en

38. L'hypoellipticité de ces opérateurs a été obtenue par L. Hörmander en 1967 (article à Acta Mathematica). Ils sont aussi étudiés par l'Ecole russe Oleinik-Radkevich et par l'école de J.J. Kohn en liaison avec l'analyse complexe. On commence donc à se poser naturellement la question de la régularité Gevrey ou analytique.

1970 quelle était la vision de Hörmander à ce moment. C'est ainsi que sans m'en rendre compte, je rentrais timidement dans l'approche Hörmandérienne des équations aux dérivées partielles, démarche encouragée fortement par C. Goulaouic à l'époque. Je participe aussi en 72-73 à un groupe de travail sur les opérateurs intégraux de Fourier et la géométrie symplectique Paris 7. Parmi les participants, il y avait aussi P. Bérard, L. Boutet de Monvel, Y. Colin de Verdière, Dunau, et une étudiante de Boutet, qui s'appelait Berkovich.

Arrivé presque clandestinement en France, Johannes Sjöstrand est recruté à la fin de l'année 73 sur un poste à Nice au CNRS. Il revient un an plus tard à la rentrée 74 sur Orsay.

Voilà ce que j'écris dans mon rapport d'activité pour le CNRS, pour l'année 1973 :

J'ai travaillé sur les points suivants :

- *Equations différentielles ordinaires à coefficients plats. Certains résultats ont été obtenus, mais l'étude a montré qu'il semblait difficile d'obtenir des résultats généraux, j'ai donc abandonné cette direction.*
- *Hypoellipticité d'une classe d'opérateurs paraboliques dégénérés. Il s'agissait de trouver une classe générale contenant des classes étudiées par T. Matsuzawa, Y. Kannai et Y. Kato, pour laquelle on peut trouver des parametrixes approchées. Ce travail fait l'objet d'une note aux CRAS, d'un exposé aux journées EDP organisées à Rennes en 1973. Un résumé de ce travail est à paraître aux séminaires d'analyse fonctionnelle de Rennes,...*
- *Non-hypoellipticité des équations du type de Fuchs. Ce travail fait en collaboration avec C. Zuily, nous a permis de montrer que les opérateurs introduits par M.S. Baouendi n'avaient jamais la propriété d'hypoellipticité...*
- *J'aborde en ce moment les propriétés de régularité C^∞ pour certaines sous-classes des opérateurs du type de Fuchs : des résultats positifs ont déjà été trouvés en collaboration avec P. Bolley et J. Camus.*
- *Par ailleurs, j'ai exposé au séminaire Goulaouic-Schwartz des travaux de R. Beals et C. Feffermann sur la résolubilité locale.*

Je compte continuer en 1974 l'étude des problèmes de régularité C^∞ pour certaines sous-classes de la classe des opérateurs du type de Fuchs, en utilisant les techniques des opérateurs à valeurs vectorielles, les théorèmes d'indice pour les opérateurs différentiels ordinaires ou celles des inégalités a priori.

Je retrouve à la lecture de ce rapport quelques points qui me semblent

intéressants et je voudrais en profiter pour raconter une anecdote instructive.

D'abord, je n'ai jamais reçu de sujet de thèse d'état de la part de C. Goulaouic³⁹ mais j'apprends, par des collaborations avec d'autres élèves de Goulaouic, des techniques variées. C. Goulaouic m'implique dans la recherche la plus difficile du moment en me faisant exposer les travaux de Beals-Fefferman sur la résolubilité locale. C'est clairement une année où je prend confiance et où je me sens enfin "chercheur", ce qui n'était pas vraiment le cas la première année. C'est ma lecture du travail qu'écrit J. Sjöstrand et qui utilise des op \bar{d} à valeurs vectorielles qui constitue au départ ma "valeur ajoutée" dans la coopération avec P. Bolley et J. Camus.

Pour l'anecdote, qui en fait se déroule fin 73-début 74, et on voit de nouveau que les "erreurs" sont souvent sources de progrès, je repère une erreur dans un travail de R. Beals et sans complexe je lui envoie une lettre pour la lui signaler. Dans une réponse très aimable, R. Beals me remercie et ajoute qu'il a lu une version préliminaire, qu'il avait obtenu de M.S. Baouendi de mon travail avec Claude Zuily sur la non-hypoellipticité. Trompé par une erreur dans un travail de Y. Kannai (une autre!), nous utilisons un lemme d'analyse abstraite que nous attribuons à L. Hörmander. Honte à nous, il faut non seulement réparer le point délicat (ce qui finalement ne sera pas trop difficile) mais aussi envoyer une lettre d'excuses à L. Hörmander. M.S. Baouendi nous raconta plus tard que la vigilance de R. Beals était dûe au fait qu'il avait fait la même erreur dans un de ses travaux en cours.

C'est aussi l'occasion de mentionner le rôle très important que jouait M.S. Baouendi pour notre équipe EDP dans cette période. C. Goulaouic était à l'époque débordé par toutes sortes de tâches d'enseignement et d'administration et c'est seulement lors des visites chez Baouendi à Purdue ou de Baouendi à Paris qu'il trouvait le temps de travailler. Baouendi nous apportait de plus les informations fraîches sur ce qui se déroulait aux Etats-Unis et c'était une grande stimulation.

Mon rapport fait aussi allusion à une rencontre à Rennes en Juin 1973. C'était essentiellement une rencontre de tous les élèves de Goulaouic étendue à quelques chercheurs dans l'orbite du séminaire EDP de l'X. Il me semble aussi qu'on profitait de la venue de M.S. Baouendi. Ce mini-colloque de

39. Ceci correspond à la philosophie de Laurent Schwartz sur la direction de recherche comme il l'explique dans ses mémoires (p. 360-361). Il semble que cette philosophie remonte à Cartan.

Rennes se répéta chaque année entre 74 et 76, sous une forme de moins en moins mini au cours des ans. C'est l'ancêtre du célèbre séminaire EDP qui fut longtemps à Saint-Jean de Monts et qui naquit en 1977 à partir de la collaboration entre l'université de Nantes (Pham the Lai⁴⁰, Didier Robert) et l'université de Rennes (P. Bolley, J. Camus...) avec le soutien de C. Goulaouic. On trouve sur Numdam les proceedings de ces rencontres à partir de l'année 1974.

En 72-73, le programme du séminaire Goulaouic-Schwartz propose des exposés très diversifiés en analyse allant de la géométrie des Banach aux EDP. Côté microlocal je mentionnerais l'exposé de Duistermaat-Sjöstrand et un autre sujet apparaît concernant la résolubilité locale sur les groupes de Lie (exposé de Cérézo-Rouvière). Du côté du séminaire Bourbaki, J. Chazarain présente des résultats récents sur le problème mixte hyperbolique (72-73) et 73-74 propose des exposés de M. Atiyah sur l'équation de la chaleur en géométrie riemannienne, d'Yves Colin de Verdière : Propriétés asymptotiques de l'équation de la chaleur sur une variété compacte (d'après Gilkey) et de S. Alinhac sur : Caractérisation d'espaces de fonctions analytiques et non quasi-analytiques sur une variété bord (d'après Baouendi-Goulaouic).

3.1.3 73-76

En Septembre 1974, la famille Helffer s'agrandit avec l'arrivée de Claire.

Je n'ai pas retrouvé tous les documents sur cette période. Mes recherches avec Pierre Bolley et Jacques Camus se poursuivent dans la lignée de certains de leurs travaux de thèse. Nous étudions les opérateurs de Fuchs, sûrement influencés par le programme scientifique de Baouendi-Goulaouic à cette époque. J'y apporte une petite touche "opérateurs pseudo-différentiels". Je commence aussi à exploiter mes lectures à la fois du travail de J. Sjöstrand et également du bel article de Louis Boutet de Monvel sur l'hypoellipticité des opérateurs à caractéristiques doubles. J'explore donc en même temps les méthodes héritées de Grushin, celles de Sjöstrand et celles de Boutet.

Mes rapports d'activité indiquent plusieurs missions sur cette période qui méritent d'être décrites : le congrès EDP à Nice en 74, la participation à

40. Pham the Lai est élève de Jean Leray.

l'ICM de Vancouver (été 74), le trimestre à l'institut Mittag-Leffler à Djursholm (Automne 74) et l'école d'été de Grebbestad (printemps 75).

Le congrès de Nice en Mai 1974 est organisé par J. Chazarain sous le titre : Fourier Integral Operators and Partial Differential Equations. De manière anecdotique, Serge Alinhac et moi campons à l'extérieur de Nice dans un champ pour limiter les dépenses. Un proceeding au Lecture Notes 459 de Springer rend compte des principales contributions. La préface du volume, signée de J. Chazarain est éclairante. J'en transcris l'essentiel :

Pour situer le sujet avec l'espoir d'allécher le lecteur non spécialiste, rappelons brièvement quelques points.

Autour des années 65 s'est développée la théorie des opérateurs pseudo-différentiels, ce qui a permis, entre autres, d'inverser les opérateurs elliptiques et ainsi de substituer aux techniques de majorations a priori des méthodes plus explicites pour résoudre ces équations.

Mais pour l'étude des opérateurs de type principal qui sont, en un certain sens les plus simples après les elliptiques, les opérateurs pseudo-différentiels s'avèrent insuffisants et de nouvelles méthodes sont élaborées.

Parmi celles-ci, citons principalement :

- *l'utilisation des variétés lagrangiennes pour la description globale des solutions asymptotiques.*
- *l'emploi des transformations canoniques pour transmuier une équation en une autre plus simple.*
- *la description dans le fibré cotangent des singularités des distributions (ou des hyperfonctions) grâce à la notion de "wave front set" ou spectre singulier ou support essentiel....*

Puis, c'est en 70 que paraît l'article de Hörmander où sont synthétisés et généralisées ces diverses techniques pour donner l'outil des Opérateurs Intégraux de Fourier.

Comme en témoigne par exemple ce colloque, ce nouvel outil a déjà un petit coin du voile qui recouvre la théorie des équations aux dérivées partielles ; il semble que l'on est loin d'avoir épuisé le champ de ses possibilités.

Le programme rassemble en effet les meilleurs spécialistes : L. Boutet de Monvel, J.J. Duistermaat, V.W. Guillemin, L. Hörmander, J. Leray, B. Malgrange, A. Melin, L. Nirenberg, T. Shirota, J. Sjöstrand, F. Trèves et A. Weinstein. On note en particulier la présence simultanée de L. Hörman-

der et J. Leray, qui ont eu des avis divergents sur l'apport de Maslov, mais L. Hörmander ne parle pas dans ce colloque de Fourier-Intégraux mais de contre-exemples à l'unicité de Cauchy, un sujet qui intéressera beaucoup l'équipe d'Orsay autour de S. Alinhac et C. Zuily.

Deux anecdotes sur ce colloque. La première est pour l'exposé de L. Boutet de Monvel qui portait sur un théorème de propagation des singularités pour des opérateurs à caractéristiques doubles (en liaison avec la thèse de troisième cycle de Richard Lascar). Au milieu de l'exposé, LBM s'arrête soudainement pendant un temps qui semble très long (en réalité deux ou trois minutes) puis repart comme si rien n'était. On ne manque pas de lui poser la question après l'exposé ! La raison était qu'il avait détecté une faute dans la preuve : ce temps de silence avait été le temps qu'il lui avait fallu pour la réparer.

La deuxième est pendant l'exposé de J. Sjöstrand qui nous raconte ce qui deviendra la théorie des Fourier Intégraux à phase complexe (travail avec A. Melin). Je suis dans l'assistance et j'entends Jean Dieudonné⁴¹ qui demande à son voisin : "C'est un travail d'élève?".

Le congrès international des mathématiciens se déroule à Vancouver en 1974. Il suit celui de Nice de 1970 auquel je n'ai pas participé. Laurent Schwartz a l'idée généreuse et peut-être idéaliste que tous les jeunes du centre de mathématiques doivent y aller. C'est dans ces conditions que j'y participe, en profitant d'une organisation collective du voyage par avion pour tous les participants qui le souhaitent. C'était pour moi la première visite outre-atlantique. Je dois dire que je ne me souviens pas beaucoup des exposés. Un congrès international, même s'il y a des exposés de synthèse intéressants, n'est pas le lieu le plus facile pour que des jeunes prennent des contacts. Par contre, je me souviens qu'une partie de la délégation française, dont Adrien Douady, campait ou se rassemblait dans la tenue adaptée à celle de la plage naturiste qui bordait le campus, dans une atmosphère post-

41. 1906-1992. Un des cofondateurs de Bourbaki. Jean Dieudonné consacre dans un livre publié en 77 : Panorama des mathématiques Pures : le choix bourbachique, un chapitre (p. 47-71) sur le développement des EDP. Dans la liste des "initiateurs" pour les EDP linéaires (théorie générale) il indique : P. Laplace, J. Fourier, T. Carleman, L. Schwartz, L. Ehrenpreis, B. Malgrange, L. Hörmander, H. Lewy, A. Calderon, A. Zygmund, J. Kohn, L. Nirenberg, F. Trèves, J. Leray, R. Beals, C. Fefferman. Si en ajoutant la liste des "contributeurs", il n'a pas oublié trop de monde, sa description des grands courants dans le domaine reste très tournée vers le passé et aurait presque pu être écrite dix ans plus tôt.

soixantehuitarde. Woodstock n'était pas encore très loin.

Le semestre à l'institut Mittag-Leffler de l'automne 1974 fut pour moi scientifiquement le plus intéressant, même si le mois de novembre n'est sûrement pas le meilleur pour apprécier la beauté du site, le jour ne daignant se montrer que quelques heures entre 10h et 15h.

Si les invités principaux vivent dans les studios proches de l'institut, une partie des jeunes dont je fais partie logeons dans des chambres situées dans un couvent de bonnes soeurs (émigrées d'Allemagne de l'est) à 800 m environ de l'institut. Pendant mon séjour, il y a L. Rodino, P. Godin, N. Ovreid, C. Benezewitz, G. Gudmundsdottir, C. Zuily, J. Sjöstrand, J.M.-Bony, M. Ben Artzi, L. Hörmander, W. Littman et L. Boutet de Monvel. C'est pendant ce séjour que je commence à travailler avec L. Boutet de Monvel sur les opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques multiples, ce qui me donnera un réel élan. Il s'agit de généraliser au cas rang non constant la thèse en préparation d'A. Grigis (qui elle-même généralisait le beau travail de L. Boutet de Monvel sur le cas symplectique, cas traité aussi dans l'article de J. Sjöstrand dont j'avais suivi la conception au centre de math. en 71-72), thèse qui sera soutenue en 1975. Il est sorti des discussions de ce séjour, la conviction que cela devait marcher. La démonstration mettait en jeu un joli calcul pseudo-différentiel à la Weyl mais dépendant d'un paramètre. J'ai bien mis huit-neuf mois à écrire ma part. Un texte écrit existait, mais la version finale, complètement réécrite par L. Boutet de Monvel, ne sortira que six mois plus tard, peu avant que je soumette ma thèse d'état. Je me souviens aussi de quelques diners ou pots organisés, par L. Boutet de Monvel et J. Sjöstrand⁴² chacun dans son style. C'est aussi à cette occasion que je rencontre personnellement L. Hörmander pour la première fois. Il me demande d'expliquer sur quoi nous travaillons en hypoellipticité. La discussion est censée se dérouler en anglais mais avec mon anglais qui n'a pas beaucoup progressé, c'est un vrai calvaire. J'ai réalisé quelques années plus tard, lorsqu'il donna un exposé au séminaire de l'X, qu'il maîtrisait parfaitement le français. J'appris même à cette occasion, qu'un de ses rapporteurs de thèse étant J.L. Lions, il avait préparé une version en français de son travail pour faciliter le travail du rapporteur.

Sur ce semestre, voici ce que L. Hörmander se remémore⁴³ : *Agmon visited M-L in Sept.-Oct. 1974 and lectured on his Ann. Pisa 1975 paper. (This led*

42. qui nous fait découvrir le Pitte Pana

43. Merci à G. Grubb pour les extraits de ces notes

to joint work.) His student Matania Ben-Artzi talked in the weekly seminar about a paper of Alsholm and Kato on modified wave operators for scattering with long range potentials. Johannes Sjöstrand was at M-L for the whole semester, and during the second half there was a new group of visitors including Bony and Boutet de Monvel. They brought news on a paper of Ivrii and Petkov "Necessary conditions..." *Uspehi Mat. Nauk.* 29 :5 (1974), 3-70. Bony lectured on his work with Schapira on analytic solutions, Boutet de Monvel on hypoellipticity of a class of ps.d.o.s with double characteristics. I was then also working on the Molodensky problem in Geodesy.

Au retour de Suède, ma fille Claire (4 mois) ne me reconnaît pas !

L'école d'été de Grebbestad a lieu en Juin 1975. Elle est organisée par Karl Gustav Andersson, un élève de Lars Hörmander. J'ai retrouvé quelques souvenirs⁴⁴ grâce à un article d'A. Weinstein en l'honneur de J.J. Duistermaat (Hans) paru dans un volume de Progress in Mathematics (Birkhäuser) en 2016 (édité par P. Van den Ban et J.A.C. Kolk) :

As for mathematics, that was the time when contact with Hans deepened my interest in Fourier Integral Operators. Although Hans was not the coauthor of Part I of the illustrious pair of papers by Hörmander, his influence is clear (and he is the only person thanked by Hörmander in that article). We met again at a conference in Nice, and then spent a lot of time together at the 1975 Nordic Summer School in Grebbestad, Sweden. Here I was totally immersed in the world of microlocal analysis... C'est avec Jacques Camus, Pierre Bolley et Alain Grigis que je pars vers le nord-ouest de la Suède en voiture direction Amsterdam. De là nous embarquons dans un bateau pour Göteborg, puis reprenons la route vers Grebbestad. Nous y retrouvons beaucoup des spécialistes de l'analyse microlocale : L. Hörmander, J.E. Björk, A. Weinstein, J.J. Duistermaat, Richard Beals, Nils Övrelid... et des plus jeunes comme P. Bérard, Richard et Bernard Lascar.

Il y avait aussi Gerd Grubb, L. Boutet de Monvel, Anders Melin, Odile et Johannes Sjöstrand, Lars Gårding et sa femme. Parmi les scandinaves il y avait encore Björn Dahlberg, Philip Brenner de Göteborg, Gudrun Gudmundsdottir (élève de L. Hörmander) et Christer Bennewitz (ancien élève de Å. Pleijel), Thomas Claesson...

L'École d'été dure trois semaines et on ne peut oublier ce jour de la Saint-

44. Merci aussi à Pierre Bolley, Gerd Grubb, et Johannes Sjöstrand pour avoir rafraîchi les miens. J'ai aussi pu grâce à G. Grubb avoir accès à quelques notes de L. Hörmander.

Jean où beaucoup de jeunes suédois se sentent obligés de s'enivrer ou la nuit où le claxon de la voiture des frères Lascar se mit en marche.

Plus sérieusement le cours de J.E. Björk porte sur le principe fondamental d'Ehrenpreis. Il y eut aussi des séries d'exposés par Beals, Boutet de Monvel, Chazarain, Duistermaat, Sjöstrand, Alan Weinstein and Widman, un exposé de L. Hörmander. Gårding y fit un exposé sur des problèmes inverses : reconstruire la forme de la bouche à partir du son de la parole (sa femme était professeur de phonétique).

Le travail avec Louis Boutet de Monvel m'a donné pleinement confiance et boosté. Dans le cas des opérateurs à caractéristiques doubles, c'est comme souvent L. Hörmander qui met la touche finale pour la caractérisation de l'hypoellipticité avec perte d'une dérivée (voir Chapitre XXII, Tome 3 de ses quatre livres). Ma maîtrise nouvelle et plus intrinsèque conduit à de nouveaux travaux dans la même veine. Mes travaux sur l'hypoellipticité avec perte de $3/2$ -dérivées sont obtenus par une synthèse entre l'approche de J. Sjöstrand et celle de L. Boutet de Monvel. Je propose à J. Nourrigat en quête de sujets de travailler dans la même direction.

3.1.4 76-78

En 1976, l'Ecole Polytechnique déménage sur le plateau de Palaiseau. Ma famille avait anticipé en ayant déménagé dans le coin d'Antony quelques années auparavant. Notre numéro 3 Hélène arrivera en Septembre 1976. Le centre de mathématiques a fait de la résistance et obtient pendant un an le droit de rester dans une pièce de l'ancienne Ecole Polytechnique.

Pour chaque chercheur, il s'agit de parfaire son entraînement sportif sur le chemin de Lozère. C'est du moins ce que suggère indirectement le directeur scientifique de l'époque Mr Vasseur. Pour les réticents ou simplement plus âgés, un système de navette rudimentaire le matin et le soir est organisé, censé préfigurer un système plus performant. Pour moi, ce sera plutôt le vélo entre Antony et Palaiseau. Les transports annoncés ne se mettront vraiment en place que trente ans plus tard !

Soutenance de la thèse d'état

C'est en Juin 1976 que je soutiens ma thèse d'état. Peut-être faut-il rappeler pour les jeunes comment cela se passait. Il y avait d'une part une commission des thèses parisiennes à laquelle la plupart des universités parisiennes se soumettaient qui devaient examiner le travail et ce n'est qu'après leur avis

positif à la fois sur le texte dit principal et sur le choix d'un deuxième sujet. La soutenance comprenait en effet la présentation des travaux de la thèse, suivie d'un exposé portant sur le deuxième sujet. L'idée du deuxième sujet est d'imposer au candidat une ouverture thématique sur un autre domaine sous la direction d'un membre du jury. Même si mon directeur officiel était C. Goulaouic et je lui dois beaucoup pour ses encouragements, j'ai toujours choisi seul mes sujets au hasard des rencontres et des lectures. C'est mon principal conseiller dans la période 74-76, L. Boutet de Monvel qui assura de fait la tâche de directeur sur cette période et donna le feu vert pour la soumission de cette thèse d'état. J. Sjöstrand est également un interlocuteur précieux. Concernant ma thèse, on peut considérer qu'avant l'heure il s'agissait d'une habilitation. En dehors des dix articles inclus, il n'y avait en effet qu'une petite introduction spécifique sur le thème de l'hypoellipticité. Mon jury était constitué de C. Goulaouic, L. Schwartz, J-M. Bony, L. Boutet de Monvel et Norbert A. Campo, ce dernier étant en charge du second sujet qui portait sur des travaux de Malgrange et Moussu relatifs au théorème de Frobenius singulier et se situant plutôt dans le domaine de la géométrie algébrique. Le choix du deuxième sujet était lié au désir plusieurs fois repoussé de comprendre le fameux SKK (Sato-Kawai-Kashiwara), désir qui ne sera au final jamais exaucé, malgré les efforts louables déployés par Jean-Michel Bony pour rendre plus accessible la théorie en s'appuyant sur une sorte de boîte noire "appelée thèse de Kashiwara" (écrite en japonais). D'autres pistes scientifiques m'attendaient. A l'exception d'un travail sur un théorème des itérés⁴⁵ avec C. Mattera, je n'ai plus jamais utilisé cette théorie. Il faut aussi dire qu'avec des techniques très différentes basées sur la transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer (FBI), J. Sjöstrand redémontrait, sans gros outils algébriques, beaucoup d'applications de SKK aux EDP et que j'ai plutôt investi de ce côté. L'Astérisque de J. Sjöstrand "Singularités Analytiques Microlocales" de 1982 peut servir de référence (voir plus tard la monogra-

45. Il s'agit d'un travail que je trouve très joli sur la caractérisation d'une fonction analytique et dont MathScinet indique qu'il ne fut cité qu'une fois dans la littérature. Il s'énonce ainsi :

Soit X_1, \dots, X_j une famille de champs de vecteurs à coefficients analytiques définis sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n et vérifiant la condition de Hörmander (les crochets d'ordre inférieur ou égal à un certain $r \in \mathbb{N}$ engendrent tout l'espace tangent en chaque point). Soit u une fonction C^∞ dans Ω telle que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante C_K telle que pour tout j , tout k on ait $\|X_j^k u\|_{L^2(K)} \leq C_K^{k+1} k!$ alors u est analytique dans Ω . C'est un énoncé très simple mais qui n'a pas eu d'application. Il me semble me souvenir que P. Schapira avait également une démonstration indépendante de ce résultat.

phie de J.M. Delort et dans le cadre semi-classique le livre d'André Martinez).

Le premier colloque de Saint-Jean de Monts

C'est en Juin 1977 qu'a lieu le premier colloque de Saint Jean de Monts. Il est organisé par l'université de Nantes et plus précisément par Pham The Lai, avec le soutien de Didier Robert. Voici quelques extraits de la préface de ses proceedings :

Grâce au concours de la SMF, du CNRS et des Universités de Rennes et de Nantes, l'institut de Mathématiques et d'Informatique de l'université de Nantes a pu organiser, du 1er au 4 juin 1977, des Journées "Equations aux dérivées partielles" à Saint-Jean de Monts. Ces journées faisaient suite aux traditionnelles Journées de Rennes (1974, 1975 et 1976).

Les conférences ont essentiellement été consacrées à exposer des résultats récents et des problèmes ouverts dans trois principaux domaines :

- *opérateurs hypoelliptiques, opérateurs pseudo-différentiels*
- *théorie spectrale d'opérateurs elliptiques singuliers*
- *Problèmes de Cauchy.*

L'intérêt des mathématiciens s'est manifesté pour ces Journées, par une participation importante : plus de 60 personnes y ont participé... ..

De la liste des orateurs (Baouendi, Goulaouic, Zagmanogoulou, Beals, Bolley, Camus, Helffer, Pham the Lai, Bony,..., Guillot, Kashiwara, Schapira, Leray, Matterna, Menikoff, Sjöstrand, Piriou, Robert, Vaillant, Wagschal,..), on voit que l'école de Baouendi-Goulaouic est très précédente mais aussi d'autres écoles comme celle de Nice et celle de J. Leray qui est nouvelle par rapport aux journées de Rennes. Il faut ici rappeler que Pham The Lai est un ancien élève de Leray (de même que J. Vaillant et C. Wagschal) et que J. Leray⁴⁶ est originaire de la région nantaise. Le microlocal (exposés de Helffer, Menikoff-Sjöstrand, Kawai-Schapira, Piriou) est finalement peu représenté par rapport aux colloques que j'ai décrits dans la période précédente. On notera, pour l'histoire du semi-classique, l'exposé de J. Leray sous le titre "Analyse lagrangienne et mécanique quantique". Celui-ci n'a que deux pages sans autres références que son séminaire au collège de France et le livre de Maslov. Je cite ici ses dernières lignes précédées du titre HISTORIQUE :

46. Jean Leray (1906-1998) est un des grands mathématiciens du 20ème siècle avec des contributions fondamentales en topologie et en EDP. Dans la période décrite ici ses cours au Collège de France portent sur le problème de Cauchy puis sur les travaux de Maslov. Si on compare avec la descendance scientifique de L. Schwartz, J. Leray n'a eu que très peu d'élèves.

I.V. Arnold m'a demandé à Moscou, en 1967, comment je comprendrais le traité de V.P. Maslov : Théorie des perturbations et méthodes semiclassiques (1965). L'exposé en question est donc une réponse, peut-être inachevée, à cette question.

La chance veut alors que j'entende parler⁴⁷ de travaux de C. Rockland sur l'hypoellipticité d'opérateurs invariants sur le groupe de Heisenberg et sur sa conjecture générale. Je réalise que le travail réalisé avec Boutet et Grigis donne, modulo l'établissement d'un dictionnaire, la démonstration de la conjecture dans le cas du rang 2. Je raconte ce travail à un CIME à Bressanone où beaucoup de spécialistes sont présents dont J.J. Kohn à l'été 1977. Malgré un "flottement thématique" comme on le devine dans mon rapport de 77 reproduit ci-dessous, je ne connaîtrai donc pas de dépression post partum. Il faut investir dans la compréhension de la méthode des orbites de Kirillov et tout recomprendre à la main. J. Nourrigat est très intéressé par le sujet et ceci donnera le départ d'une collaboration intense, parfois freinée par des tensions passagères, de presque dix ans.

Le rapport CNRS que je fais en 1977 indique :

Durant l'année 1977, j'ai poursuivi mes travaux sur les opérateurs pseudo-différentiels mais en variant les méthodes (utilisation des Fourier Intégraux à phase complexe) et les champs d'applications (étude d'opérateurs sur les groupes nilpotents). J'ai rédigé les articles suivants

- 1. quelques exemples d'opérateurs pseudo-différentiels localement résolubles (à paraître aux actes de St-Jean de Monts)*
- 2. Hypoellipticité pour des opérateurs différentiels sur des groupes nilpotents (à paraître aux actes du CIME)*
- 3. Hypoellipticité d'une équation différentielle abstraite (avec P. Bolley et J. Camus)*
- 4. Construction d'une nouvelle classe d'opérateurs pseudo-différentiels (avec J. Nourrigat)*
- 5. Hypoellipticité pour des opérateurs différentiels sur des groupes nilpotents de rang 3 (avec J. Nourrigat).*

Outre ma participation au colloque de St-Jean de Monts, je mentionnerai les exposés suivants :

- Un exposé sur les travaux de Trèves sur l'hypoellipticité analytique (à Orsay)*

47. par un exposé de R. Beals à Polytechnique en Avril 1977

- *Des exposés sur (2) à Rennes, Paris VII et au CIME*
- *Un travail antérieur avec L. Rodino (exposé à Nantes)*
- *Un exposé à Rennes et Orsay sur les travaux de Guillemin-Schaeffer*
- *Un exposé à Paris VII sur les spineurs symplectiques de Kostant.*

Le dernier article avec J. Nourrigat est effectivement en rupture avec les articles précédents en hypoellipticité. Si à partir des années 1972, le point de vue : "construction de parametrixes" après recherche de formes normales avait pris l'ascendant sur les méthodes d'inégalités a priori, nous revenons dans cet article à des méthodes d'inégalités a priori. Il y a certes des annonces plus ou moins clairement formulées par R. Beals qu'une approche pseudo-différentielle serait possible mais elle ne verra pas le jour dans une classe "à la Beals" ou "à la Hörmander" même si un travail sortira quelques années plus tard par un élève de R. Beals (Cummins dans le cas du rang 3) et si Anders Melin proposera un tel calcul dans le cas général. Il faut à ce sujet distinguer deux aspects car le calcul de Rothschild-Stein fournit (article à Acta Mathematica de 1976) des classes d'opérateurs pour les parametrixes des opérateurs de Hörmander (somme de carrés) qui assurent leur hypoellipticité maximale. Mais l'intérêt de la conjecture de Rockland et bien sûr de sa démonstration réside dans la donnée d'un critère effectif d'hypoellipticité, ce que ne donne pas du tout le calcul de Rothschild-Stein et pas complètement le calcul d'Anders Melin qui au final doit utiliser une partie de nos résultats. Notre travail est toujours cité dans les livres d'analyse harmonique, mais à l'exception d'un élève de A. Hulanicki P. Glowacki à Wrocław en Pologne et de certains élèves de J. Nourrigat, personne en dehors de nous n'a repris ou utilisé nos techniques (voir le paragraphe sur notre livre) dans le cadre de l'analyse harmonique. Le livre récent de V. Fischer et M. Ruzhansky n'échappe pas à cette règle. Par contre au long des années, nous avons pu utiliser jusqu'à récemment ces techniques dans le cadre de la théorie spectrale ou des estimations globales pour l'opérateur de Schrödinger magnétique ou plus récemment l'opérateur de Fokker-Planck. Il faut maintenant ajouter que la conjecture de Helffer-Nourrigat a finalement été démontrée en 2022 par I. Androulidakis, O. Mohsen and R. Yuncken en implémentant dans nos travaux la théorie des groupoides.

Autres activités

Sans savoir que mon activité de chercheur à temps plein va bientôt s'ache-

ver⁴⁸, je m'active tout azimuth dans cette période. Je prépare pour le séminaire Bourbaki un exposé (Novembre 1978) sur la propagation des singularités au bord, tâche très difficile car trois auteurs se disputent tout à fait pacifiquement la primeur de la découverte : M. Taylor, R. Melrose (thésard australien de D. Friedlander en Angleterre, qui fera une grande carrière à MIT) et G. Eskin qui émigrera de Russie pour UCLA. Le sujet est très chaud et sera clarifié quelques années plus tard avec des travaux de Melrose-Sjöstrand, Lebeau,... C'est aussi le moment où Richard Lascar termine sa thèse d'état sur le sujet et découvre quelques trous dans la démonstration de chacun des auteurs, heureusement réparables.

Je participe aussi au groupe de travail organisé par J.P. Bourguignon sur la conjecture de Calabi-Yau (Printemps 78) (exposés de Ezin, Helffer, Polombo, S. Gallot, J.P. Bourguignon, L. Bérard-Bergery, Calabi, Yau). C'est l'occasion de faire un peu de géométrie et d'analyse non linéaire dans une atmosphère de conflit entre T. Aubin et Yau. Au printemps 78, C. Goulaouic me propose de devenir coresponsable du séminaire Goulaouic-Schwartz, ce qui m'honore beaucoup mais mon départ pour Nantes bloquera naturellement ce projet. C'est aussi le moment de la soutenance de la thèse d'état de J. Nourrigat (sous la direction de J. Camus) et de celle de K. Taira (officiellement sous la direction de C. Goulaouic, mais pour laquelle je suis fortement intervenu pour l'aider dans sa rédaction). Notons qu'il va y avoir de beaux travaux à assimiler. Un calcul très général d'opérateurs pseudo-différentiel est proposé par André Unterberger a peu près simultanément avec celui sur le calcul de Weyl de L. Hörmander. L'inégalité de Fefferman-Phong est annoncée en 1978.

3.2 Et le sport dans tout cela

Depuis 1972, j'avais "loué" mon expérience de rugbyman qui avait considérablement progressé pendant mes deux premières années à Polytechnique, au service de l'équipe première de la SAGEM où travaillait le mari d'une bonne amie de ma femme. En échange du paiement par la SAGEM de l'assurance et de l'équipement, je jouais chaque semaine dans la banlieue parisienne comme troisième ligne, trois quart centre ou ailier. Le rugby pratiqué dans ce championnat régional inter-entreprise s'éloignait du rugby de

48. Hormis quelques semestres sabbatiques et une année à Berlin, je ne retrouverai cette situation qu'à ma retraite !

gentlemen que j'avais connu dans la période à l'X et certains joueurs venaient plutôt pour la bagarre. Il n'était donc pas rare de me présenter au centre de maths avec quelques bosses ou un oeil au beurre noir le lundi matin. Etait-ce l'âge, mais en 1975 après deux KO sévères à deux semaines d'intervalle, mes parents me convainquirent qu'avec une femme, deux enfants à élever et un cerveau à maintenir en état de fonctionnement, il était peut-être temps d'arrêter, ce que je fis avec beaucoup de regrets. Je rêve parfois encore de courses folles me menant à l'essai.

Bien sûr, je faisais par ailleurs beaucoup de sport. A partir de 1976, j'allais à vélo chaque jour d'Antony au plateau de Palaiseau mais le sport collectif me manquait et il me fut proposé de mettre mes talents rugbystiques au service de l'équipe de foot d'Orsay qui manquait de bras (enfin plutôt de jambes). Ce fut parfois douloureux pour les collègues de l'équipe (à l'entraînement) ou les adversaires car ma technique footballistique était plutôt rudimentaire. Il y avait dans l'équipe⁴⁹ beaucoup de collègues que je rencontrais ou que je rencontrerai pour tout autre chose : C. Zuily, J.J. Risler, M. Derridj, A. Grigis, H. Quéffelec, X. Guyon, B. Prum, D. Dacunha-Castelle, D. Perrin ...

3.3 Du militant syndical de base au secrétariat scientifique de la commission du CNRS

Même si les polytechniciens de la Promo 1968 n'ont pas été de grands animateurs de Mai 1968 (ils étaient en pleine période de concours d'entrée avec l'écrit derrière eux et l'oral en perspective devant eux), beaucoup n'ont bien sûr pas été indifférents à ce qui s'était passé. Il n'est d'ailleurs pas exclu que, dans le choix de carrière de chercheur, il n'y ait pas eu aussi le désir de refuser les carrières toutes tracées proposées aux polytechniciens dans le cadre du système économique de l'époque et que la recherche soit un moyen de moins se compromettre avec le système. L'idée de faire des mathématiques inutiles est très présente à cette époque⁵⁰.

Toujours est-il que je prend très rapidement ma carte syndicale⁵¹ au SNCS. J'étais plutôt intimidé au départ. Certaines discussions de l'époque étaient plutôt délicates pour moi puisqu'on y discutait (devant moi) par exemple

49. L'équipe portait le nom d'équipe des métèques pour des raisons que j'ai oubliées.

50. Je réaliserai plus tard le côté très dangereux de cette position pour défendre les mathématiques et obtenir des crédits.

51. comme ma mère!

de la syndicalisation ou non des étudiants de 3-ème cycle ! La lutte entre "tendances" était également épuisante. A l'image de la FEN, il y avait au SNCS je crois six tendances, chaque composante de la gauche et de l'extrême gauche se glissant plus ou moins nettement derrière l'une d'elles.

Je trouve toutefois des motivations en m'impliquant dans un comité de liaison dont la charge était de faire la liaison entre chercheurs et élus de la commission du CNRS (élus SNCS et SNESUP). Il y avait une grosse différence entre les positions officielles très fermes de défense des chercheurs du syndicat et les positions plus prudentes particulièrement des élus A SNESUP plus enclins à des compromis plus pragmatiques sur ces questions. Le problème de base avant chaque commission était celui des attachés CNRS en fin de contrat ⁵². La durée maximale (non compris un stage de deux ans) était de six ans, avec deux ans de prolongation maximale. Sans promotion chargé, le chercheur était en principe licencié au bout de 8 ans. Le nombre de postes de chargés était fixé chaque année par la direction du CNRS.

Toujours est-il que je me retrouve assez naturellement sur la liste SNCS "B" au moment de la réélection du comité national. Je ne me souviens plus du résultat détaillé du vote mais ce fut sans doute un succès large puisque le président de la commission fut G. Mokobodzki (un mathématicien reconnu en théorie du potentiel, ancien élève de G. Choquet, décédé en 2007) tête de liste de la liste SNCS et que je devins le secrétaire scientifique de la commission poste clé, qui me prit beaucoup de temps mais m'apprit aussi énormément sur la vie des laboratoires de mathématique dont la structuration était récente. Dans la commission, je retrouvais ma camarade M. Schatzman élue sur la liste SGEN.

La commission comprenait : F. Blanchard, J. Bretnolle, H. Brezis, C. Carrasso, C. Chabauty, P. Chemarin, P. Deligne, B. Duquenois, I. Ekeland, M.-T. Gschwendtner, B. Helffer, M. Hervé, M. Lejeune, P. Lelong, B. Lerouge, A. Litman, K. Mac-Aloon, P. Malliavin, C. Marchal, J. Martinet, P.-A. Meyer, G. Mokobodzki, J.-P. Ramis, P.-A. Raviart, M. Schatzman, C. Wrobel. Le bureau (ou comité permanent) était constitué de G. Mokobodzki (président), J. Bretnolle, B. Helffer (Secrétaire scientifique), M. Hervé, J. Martinet.

On y trouve 7 chercheurs CNRS (F. Blanchard (B), B. Helffer (B), M. Schatzman (B), M. Lejeune (B), K. Mac Aloon (A), G. Mokobodzki (A), P.-A. Meyer (A)). Il faut sans doute rappeler qu'à cette époque la structuration

⁵². A l'époque, le statut au CNRS était un statut de contractuel. Attaché correspond maintenant à CR2 et chargé correspond maintenant à CR1.

des départements de mathématiques en laboratoires ou équipes CNRS est en proportion beaucoup plus faible que maintenant.

Comme je crois c'est toujours le cas, la commission comprend aussi des représentants des personnels ATOS qui jouent un rôle important dans l'évaluation des formations. On peut noter ici qu'Anne Litman et Marie-Thérèse Gschwendtner vont toute leur carrière oeuvrer de manière décisive pour la communauté mathématique, la première autour du développement du CIRM à Luminy et la deuxième sur le site de Jussieu.

La commission (dont l'intitulé est Section I : mathématique et modèles mathématiques⁵³) se réunissait avec le directeur du secteur Mathématiques et Physique de base⁵³ Mr Winter qui venait un après-midi par session et surtout la secrétaire générale du CNRS Mme Niévat qui contrôlait avec autorité que la commission ne sortait pas de la légalité comme elle était parfois tentée de le faire, pour des raisons tout à fait honorables ! On peut imaginer qu'il y eut quelques débats mémorables, voir quelques psychodrames, d'abord entre élus syndicaux, J. Bretagnolle jouant là un rôle de modérateur remarquable, puis au sein de la commission.

Au niveau du recrutement, la situation n'avait plus rien à voir avec celle décrite par L. Schwartz pour le recrutement de jeunes polytechniciens et dont je fus le bénéficiaire. Je ne sais pas s'il passait encore des coups de téléphone mais je n'en ai en tout cas pas vu les effets. Côté ENS Ulm, M. Hervé indiquait effectivement l'opinion de l'ENS dont il était le directeur pour les maths sur les candidats (il avait sa petite liste) mais ces listes classées n'étaient pas toujours suivies. On peut par exemple citer le cas de deux normaliens de troisième année qui candidataient au CNRS et dont le recrutement fut refusé au nom d'un principe général (je laisse deviner de qui il s'agissait, en donnant cependant un indice : ils sont tous les deux devenus médaille Fields). Il avait semblé inutile à la majorité de la commission (mais il y avait aussi des oppositions fortes à cette position) de les recruter alors qu'ils bénéficiaient encore d'une année de scolarité.

Pour revenir à quelques aspects anecdotiques de ces débats, P. Malliavin, quand il était en désaccord avec la position de la commission, se levait, en remettant son chapeau, pour protester en menaçant de quitter la séance. M.

53. A noter qu'il n'y avait pas de directeur pour les mathématiques. Ce n'est que beaucoup plus tard que ce poste fut créé avec comme premier titulaire : J.P. Ferrier, puis J.M. Lemaire, C. Peskine, G. Métivier, C. Sorger, P. Auscher,.... et aussi des changements de structure avec la création de l'INSMI à partir de 2009.

Schatzman faisait circuler des petites caricatures commentées pour détendre l'atmosphère. P.A. Meyer impressionnait par sa grande rigueur morale mais on ne savait jamais jusqu'à la fin de ses interventions quelle serait sa position finale. Compte-tenu de son aura, les avis de P. Deligne avaient parfois des conséquences qui dépassaient son souhait. Il était fondamentalement bienveillant, mais aussi très franc dans ses évaluations scientifiques.

La session d'automne n'échappait jamais à une demi-journée consacrée à l'IHP, qui n'était pas en grande forme à l'époque : hormis des bureaux affectés à des enseignants de Paris 6, quelques séminaires qui avaient coutume de se dérouler dans les amphithéâtres historiques du rez-de-chaussée, il s'agissait surtout de préserver le financement de la bibliothèque, qui était gérée principalement par une figure de l'époque : Paul Belgodère puis par Mlle Darrieux. L'IHP était aussi le siège social de la SMF. Même si je n'ai pas de souvenir précis sur ce point on parla sûrement du CIRM dont la prise en charge par la SMF est décidée en 77.

Si je regarde les recrutements en EDP réalisés pendant ces années (où j'ai une petite responsabilité même si le poids d'un B n'était pas très lourd), il me semble qu'il y a eu de beaux recrutements mais il faut avouer qu'il y a aussi des recalés qui ont fait de très belles carrières sans passer par le CNRS. Il faut dire que la période n'est pas trop favorable aux recrutements, la recherche n'étant pas une priorité du septennat de Giscard d'Estaing (particulièrement sous le gouvernement de Raymond Barre).

Entre la position de membre d'un comité de liaison chargé de contrôler les élus au nom de la base et la position de membre d'une commission, il y a pas mal de différences. Comme déjà dit, c'est la gestion du passage attaché-chargé qui était le travail le plus délicat. Il fallait à la fois se battre auprès de la direction pour avoir plus de postes de chargés et d'autre part, ce qui était souvent en conflit avec un classement purement scientifique, donner une priorité absolue aux attachés à 8 ans, programmer sur plusieurs années une politique de classement ne conduisant pas à une impasse l'année suivante. De fait, de manière plus pragmatique, on devait favoriser le retour (ou l'entrée) à l'université de ceux ou celles pour qui on pouvait prévoir des problèmes. Rien que sur Paris-Sud, je connais deux cas de cette période recrutés dans ces conditions et qui au final se sont retrouvés plus heureux au sein de l'université. Il y avait bien sûr quelques cas extrêmes de collègues en impasse scientifique complète (cherchant à démontrer sans aucun autre résultat palpable de grandes conjectures) ou utilisant le CNRS comme supplément de salaire par rapport à une activité semi-professionnelle de joueur de Go mais

ces cas restent très exceptionnels. Ce problème du passage attaché-chargé n'existe d'ailleurs plus à l'heure actuelle, et même si encore insuffisantes les passerelles directes entre CNRS et Université sont maintenant facilitées par des statuts plus compatibles.

Peut-être faut-il ajouter que la commission a parfois aussi été proche de grandes erreurs. Quand j'écris en effet plus haut "collègue cherchant à démontrer sans aucun autre résultat palpable de grandes conjectures", on peut aussi penser aussi à M. Herman⁵⁴ qui fut pendant quelques temps sur la sellette avant de démontrer la conjecture d'Arnold et de mener la carrière que l'on sait.

Au final, il me semble que, malgré le feu de certains débats, les membres de la commission se respectaient. Je donnerai comme exemple celui de mes relations avec P. Malliavin avec qui, hors cette commission, j'ai toujours eu de bonnes relations scientifiques, particulièrement plus tard quand je me suis mis à travailler sur les opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique.

3.4 Conclusion partielle : vive le CNRS

Si l'on compare les conditions que j'ai eues pour démarrer en recherche à celles proposées aux jeunes maintenant, même les plus brillants, il est incontestable que j'ai été très privilégié. Mais n'était-ce pas seulement de la bonne politique scientifique ? Je continue de penser que le CNRS est le cadre idéal pour commencer en recherche. Il offre cette sécurité qui permet au jeune chercheur de se lancer dans des recherches difficiles. Si le système des post-Doc peut assurer une certaine ouverture (qu'il faut aussi encourager dans le cadre du CNRS), il conduit trop à la recherche de publications rapides sur des sujets parfois à la mode pour des temps éphémères. Je tirerai bénéfice toute ma vie d'enseignant-chercheur des investissements effectués dans ma période CNRS sans toujours de résultats immédiats.

54. Michel Herman est nommé attaché de recherche au CNRS en 1974. Il poursuit des travaux de Vladimir Arnold initiés par Henri Poincaré et soutient en 1976 sa thèse de doctorat d'état dirigée par Harold Rosenberg "Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations" à l'Université Paris-Sud. Il est ensuite nommé chargé de recherche en 1976 puis maître de recherche en 1979 et enfin directeur de recherche de 1981 à 2000, date de son décès à 58 ans.

4 1979-1989 : Professeur à Nantes

4.1 De Palaiseau à Nantes

Je suis nommé Maître de conférences⁵⁵ à Nantes au 1-er Janvier 1979. J'avais déjà candidaté sur des postes en 77 et c'est donc dans la deuxième vague de candidatures en 78 que je suis recruté avec un décalage de quatre mois pour une raison que j'ai oubliée. J'ai suivi donc sans attendre très longtemps la règle qui prévalait à l'époque qu'un chercheur parisien devait commencer par un poste en province. Je n'ai jamais regretté cette règle et je pense que dans mon cas, elle a eu un effet très positif : sortir du cocon et créer avec d'autres quelque chose de nouveau. J'ai plusieurs problèmes au départ :

- Je n'ai jamais enseigné ni fait passer de colles pour garder un contact avec les étudiants disons du 1er cycle.
- Je suis un peu un parachuté, même si Rennes et Nantes avaient déjà des contacts scientifiques, si j'avais un collaborateur sur place (Pierre Bolley) récemment recruté, et si j'avais exposé à Nantes : une partie de la commission de spécialistes (ainsi que l'équipe sur place) aurait préféré un recrutement local.
- J'avais toute ma petite famille à déménager.

Je quitte donc mon cocon de départ à un moment d'intense activité scientifique. En réponse à ma lettre de départ, Laurent Schwartz m'envoie à cette occasion le bref message suivant : *Mon cher Helffer, Merci de ta lettre. Nous serons toujours heureux de te revoir au Centre (dont tu as certainement été, toutes ces dernières années, le membre le plus présent!), le plus souvent possible. Bonne chance à Rennes⁵⁶, et mes meilleures amitiés.*

Côté enseignement, j'ai du faire quelques gaffes (on ne s'improvise pas enseignant) et côté recherche j'ai essayé de m'intégrer le plus rapidement possible en investissant en théorie spectrale, participant aux groupes de travail et au séminaire, et en commençant l'encadrement d'Abderemane Morame⁵⁷ pour une thèse d'état. C'est sans doute lui dont le sujet marque le mieux la transition entre l'étude de l'hypoellipticité et la théorie spectrale, puisqu'il travailla sur la théorie spectrale pour les opérateurs hypoelliptiques dont le

55. C'est la dénomination de l'époque de Professeur de seconde classe.

56. Petite erreur sur ma destination !

57. Son nom à l'époque était Mohamed mais il a souhaité le franciser à la fin des années 90.

symbole est à caractéristiques multiples. Le groupe de travail de 79-80 auquel participaient outre Didier Robert et moi, Anne-Marie Charbonnel, Abdere-mane Morame, Monique Dauge... se concentra sur l'étude de deux articles semi-classiques de Jacques Chazarain. Il y avait eu en prélude une étude de travaux de Tulovskii-Shubin mais le travail principal fut cette étude du premier article de Chazarain et d'une note sur la fonction de comptage qui lui était associée. De nouveau, c'est la découverte d'une erreur dans la note qui va nous motiver. Il y avait dans les hypothèses du théorème principal, une hypothèse qui n'était jamais vérifiée. L'erreur n'est au final pas dramatique mais rien de plus instructif pour Didier Robert et moi que de commencer par essayer de réparer cette erreur et de nous mettre sur la piste du calcul fonctionnel.

4.2 Hypoellipticité et le livre avec Jean Nourrigat

Cela fait bien sûr longtemps dans ce texte que je parle d'hypoellipticité. Je m'aperçois que je n'en ai donné ni la définition ni l'auteur de la définition. C'est Laurent Schwartz qui introduit le concept mais le mot n'intervient que dans un deuxième temps. Voici ce que L. Schwartz en dit dans ses mémoires : *J'ai apporté un changement malheureux à la définition du mot "elliptique" pour les équations aux dérivées partielles. J'ai dit qu'un opérateur P était elliptique si, pour tout ouvert où Pf est C^∞ , f l'est aussi. C'est là une des propriétés des opérateurs elliptiques au sens usuel, j'ai considéré que c'était une des plus importantes et qu'il fallait la prendre comme définition. C'était manifestement une erreur. La grande classification entre les elliptiques, les paraboliques, les hyperboliques, doit rester telle qu'elle est. A un colloque d'analyse harmonique, à Nancy, en 1954 (...), j'exposai les travaux de Mizohata, un mathématicien japonais qui avait passé sa thèse avec moi, sous le titre "ellipticité des opérateurs paraboliques". ... Mais cela fit scandale et provoqua des remous dans l'assistance, qui décida d'un commun accord qu'il fallait laisser à elliptique le sens classique, et appeler hypo-elliptique un opérateur qui possédait la propriété que j'ai indiquée plus haut. Ce fut ensuite universellement admis.*

Comme mentionné plus haut le livre avec Jean Nourrigat trouve ses racines dans notre démonstration de la conjecture de Rockland au delà du rang 2. Elle se fit en deux étapes, d'abord le cas du rang 3 puis dans le cas général. La suite a été favorisée par Y. Guivarc'h qui donna comme deuxième sujet pour la thèse d'état de Jean Nourrigat un travail de I.D. Brown : Dual to-

pology of a nilpotent Lie group (76) portant sur les représentations induites. La démonstration du cas général passe par une recompréhension profonde de la méthode des orbites de Kirillov dans le cas (le plus facile) des groupes nilpotents. Une fois établie la conjecture générale pour les opérateurs invariants homogènes sur les groupes nilpotents stratifiés, nous voulons aller plus loin. Peut-on recomprendre les résultats de Grushin sur l'opérateur $D_t^2 + t^2 D_x^2 + \alpha D_x$ dans le cadre des groupes nilpotents. Cet opérateur peut-être vu comme l'image par une représentation induite d'un opérateur sur un groupe nilpotent $D_t^2 + (tD_x + D_y)^2 + \alpha D_x$ correspondant à l'élément dans l'algèbre enveloppante : $X_1^2 + X_2^2 + i\alpha X_3$ avec $X_3 = [X_1, X_2]$. Dans le cas général, il est faux que le critère d'hypoellipticité en bas impose une hypothèse d'hypoellipticité pour l'opérateur en haut. D'où l'idée que dans ce cas, on doit proposer un critère à la Rockland ne faisant intervenir qu'un fermé dans l'ensemble des représentations irréductibles. Le candidat est assez vite trouvé par J. Nourrigat, à partir de la notion de spectre d'une représentation induite, la démonstration prit plus de temps, d'autant que plusieurs pistes furent explorées parfois en concurrence. C'est celle explorée par J. Nourrigat qui fut la plus féconde (l'approche algébrique explorée avec un chercheur de l'école Dixmier R. Rentschler, conduit à des résultats esthétiques mais partiels). Les deux méthodes sont finalement présentées dans le livre et ne paraîtront pas ailleurs. Toute cette étude du cas des représentations induites d'un opérateur sur un groupe nilpotent est liée à la question du relèvement d'une famille de champs de vecteurs vérifiant la condition d'Hörmander : le "lifting theorem", permettant d'envoyer le problème initial sur un groupe nilpotent. Cette stratégie est un des points clef de l'approche de Rothschild-Stein dans leur article à Acta Mathematica. L'idée intéresse beaucoup de chercheurs à l'époque : Folland, Melin-Hörmander et bien sûr J. Nourrigat et moi. L'idée est alors de proposer un critère d'hypoellipticité maximale pour des polynômes homogènes de champ de vecteurs vérifiant la condition d'Hörmander. De nouveau, un critère est trouvé dont la nécessité n'est pas trop difficile mais dont la suffisance ne sera au final démontrée que dans toute une palette d'exemples n'épuisant pas le cas général. Le livre qui contient aussi de belles applications à l'analyse complexe pour couvrir des résultats de Derridj, Grigis-Rothschild,...s'achève donc pas loin du but en 1985. Il faut dire qu'à la fin de ce voyage dans les groupes nilpotents, je naviguais aussi intensément sur le fleuve semi-classique et que J. Nourrigat se retrouva un peu seul pour continuer, ce qu'il fit cependant avec succès dans deux beaux articles en définissant et résolvant la conjecture

dans le cas de systèmes de degré 1. Il fallait dans ce cas y insérer toute la technologie de Fefferman-Phong qui n'était parfois qu'esquissée dans leurs courtes notes.

La conjecture dans le cas des polynômes de champ de vecteurs pouvait aussi être formulée pour des polynômes (à coefficients C^∞ , voir pseudo-différentiels) d'opérateurs pseudodifférentiels de degré 1 vérifiant la condition des crochets d'Hörmander. Dans ce cadre encore plus général, la nouvelle conjecture recouvrait tous les résultats obtenus par ou avec L. Boutet de Monvel, A. Grigis et J. Sjöstrand. On avait mis ainsi dans la même boîte des résultats de Grushin, tous les résultats "assez génériques" existant sur les opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques multiples et ceux de L. Hörmander.

A partir des années 90, l'étude de l'hypoellipticité C^∞ s'endort progressivement, faute de problèmes importants et pas trop particuliers à résoudre, à l'exception de cette conjecture qui restait ouverte (jusqu'en 2022). Ceci n'exclut pas l'étude encore inachevée des propriétés des opérateurs hypoelliptiques (par exemple leur théorie spectrale). Elle rebondira en se posant d'autres questions en théorie spectrale, par exemple autour de l'opérateur de Fokker-Planck.

Il en va tout autrement pour l'étude de l'hypoellipticité analytique qui reste beaucoup plus délicate avec beaucoup de problèmes à résoudre mais ce sera l'objet d'une autre sous-section.

S'il faut une conclusion sur le thème de l'hypoellipticité, je dirai ceci. Son étude a joué un rôle très important dans le cas des opérateurs à coefficients constants, jusqu'à sa caractérisation par Hörmander (1955). Cela a aussi joué un rôle important, au delà de la question dans le développement des classes d'opérateurs pseudo-différentiels (les classes $S_{\rho,\delta}^m$). La question fut aussi fondamentale pour les opérateurs de type principal. Par contre, l'étude que ce soit pour les opérateurs du type de Hörmander ou pour de larges classes d'opérateurs à caractéristiques multiples conduit à penser, que, sauf question motivée par des applications externes, on doit s'intéresser en priorité aux questions d'hypoellipticité maximale ou avec perte minimale, l'idée d'une caractérisation générale de l'hypoellipticité étant bien entendu sans espoir. Mais...il suffit parfois de changer un peu la question pour retrouver pleins de problèmes intéressants.

Bien sûr tout ce que je dis plus haut est à réévaluer depuis la démonstration de notre conjecture en 2022.

4.3 Sur d'autres aspects du "programme de Hörmander de 1970"

Je ne parle que d'aspects où j'ai directement ou indirectement un peu contribué. Je ne parle donc pas de l'aspect hyperfonctions, microfonctions,... de l'école SKK représentée en France par P. Schapira (J.M. Bony va quitter cette direction de recherche pour le calcul "paradifférentiel"), Y. Laurent ... Cette branche continuera de se développer mais en s'éloignant des EDP sous le vocable "Analyse Algébrique".

4.3.1 Hypoellipticité analytique

Bien sûr on savait quand j'ai commencé ma carrière qu'un opérateur elliptique à coefficients analytiques était hypoelliptique analytique et L. Boutet de Monvel avait déjà construit avec P. Kree une parametrix pour ces opérateurs. Ce qui venait de sortir par deux approches (Hörmander et Sato) était la notion de front d'onde analytique, sa propagation et la question de l'hypoanalyticité pour les opérateurs de type principal. La version FBI (Fourier-Bros-Iagolnitzer) arrive juste un peu plus tard en 1975.

L'hypoellipticité analytique pour les opérateurs de type principal est comprise grâce au travail de F. Trèves (CPAM 1971). Ce qui questionne donc le monde des EDP-istes au milieu des années 70 est la question de l'hypoellipticité analytique dans le cas des opérateurs à caractéristiques doubles dans le cas où la variété caractéristique est symplectique. Comme cas particulier, on a la même question pour le \square_b en analyse complexe. Ce problème est résolu par F. Trèves (CPDE 1978) (étendu par G. Métivier au cas des opérateurs à caractéristiques multiples 1980) et dans le cas du \square_b par une méthode à la Kohn par D. Tartakoff (Acta Math. 1980). La question qui se pose alors est de savoir si c'est le seul cas d'hypoellipticité analytique. On a à l'époque des résultats positifs, obtenus par exemple par V. Grushin et également le très simple mais basique contre-exemple dû à Baouendi-Goulaouic (1972) : $D_t^2 + t^2 D_x^2 + D_y^2$ n'est pas hypoelliptique analytique.

Je pense être à l'origine de l'étude d'un nouvel exemple instructif $(D_t^2 + (tD_x - D_y)^2)$ dont la non hypoellipticité analytique se déduit des propriétés spectrales de l'opérateur différentiel $D_t^2 + (t^2 - \alpha)^2$ pour α complexe. Le problème spectral non linéaire sous-jacent est résolu par Pham the Lai et Didier Robert. Il est instructif de constater que cet opérateur plutôt simple va réapparaître en géométrie sous-riemannienne, dans l'étude de Schrödinger magnétique, en

supraconductivité.... L'aspect groupes nilpotents du problème sera étudié par G. Métivier (1978) pour le rang 2 et dans la perspective de la "non hypoellipticité analytique" dans mon travail de 1979. Comme je l'indiquais plus haut, la question de caractériser l'hypoellipticité analytique pour des opérateurs à caractéristiques doubles (ou somme de carrés de champs de vecteurs) reste une question ouverte qui a tourné autour d'une conjecture de Trèves dont la formulation a du être précisée au long des années. A ma connaissance (en 2020) les travaux les plus récents sont dus à l'équipe de Bologne autour de A. Bove.

4.3.2 Résolubilité locale

Je n'ai pas été impliqué directement dans les grandes questions de résolubilité locale autour de la condition (Ψ) et (P) . Comme toujours, la question a commencé par être étudiée pour les opérateurs à coefficients constants, où la construction de solutions fondamentales ou des inégalités L^2 ont donné la réponse. Après le contre exemple de H. Lewy, la thèse de Hörmander a fait faire un pas énorme dans la compréhension. J'arrive dans la recherche à un moment où cela bataille ferme entre différentes équipes : Hörmander, Nirenberg, Trèves... et Egorov. Je suis d'abord impliqué quand C. Goulaouic me demande de raconter le travail de Beals-Fefferman.

Dans un deuxième temps, je propose à P. Lévy-Bruhl de travailler dans le cadre de sa thèse d'état sur la résolubilité local pour des opérateurs invariants sur un groupe nilpotent. On peut penser que dans les années 90, le sujet est mort et que plus personne n'y travaille. C'est sans compter la persévérance et le talent de N. Dencker à Lund (sous la direction de L. Hörmander) et N. Lerner à Rennes qui apportent la réponse définitive à la question de la condition (Ψ) . Le beau livre récent de N. Lerner sur le sujet donne un éclairage sur ce sujet.

4.4 Développement de l'analyse semi-classique

Au départ, l'analyse semi-classique (ou quasiclassique) tend à explorer le principe de correspondance : *On doit retrouver la mécanique classique à partir de la mécanique quantique dans la limite où la constante de Planck h tend vers 0*. On pourrait donc en conclure qu'elle ne naît qu'après la mécanique quantique, mais les objets qu'elle considère sont en fait bien antérieurs à la formulation définitive de la mécanique quantique. Nous nous intéresserons

ici à la naissance de l'analyse semi-classique⁵⁸ en tant que composante de la physique mathématique. On verra qu'elle a une forte composante EDP (équation de Schrödinger, de Dirac, de Klein-Gordon, de Brown-Rawenhall ...) mais qu'elle a aussi des composantes non edp (intégrales de Laplace).

4.4.1 Evolution sous-marine : 1971-1977

On ne parlait pas beaucoup d'analyse semi-classique pendant cette période au sein du séminaire Goulaouic-Schwartz. Dans mes débuts de chercheur, la mécanique classique s'appelait géométrie symplectique et l'équation de Schrödinger était une équation aux dérivées partielles. Bien sûr, le nom du livre de Maslov (dont la traduction française date de 1972 mais dont la version initiale est bien antérieure) n'était pas totalement inconnu mais il est sans doute utile de citer ce que dit Hörmander dans son article fondateur sur les Fourier-Intégraux pour comprendre que nous n'étions pas poussés dans cette direction :

“The work of Egorov is actually an application of ideas of Maslov who started at the International Congress that his book actually contains the ideas attributed here to Egorov and Arnold⁵⁹ as well as a more general and more precise operator calculus than ours. Since the book is highly inaccessible and does not appear to be quite rigorous we can only pass the information on to the reader, adding a reference to the explanations of Maslov's work given by Buslaev. The purpose of the present is not to extend the more or less formal methods used in geometrical optics but to extract from them a precise operator theory which can be applied to the theory of Partial Differential Equations
“

D'une certaine manière, il nous était suggéré d'oublier les racines “physiques” et de partir directement à l'attaque des problèmes mathématiques avec les nouveaux outils, ce qui a d'ailleurs eu un grand succès au niveau du développement de l'analyse microlocale au sein des Equations aux Dérivées partielles mais n'a pas forcément favorisé, au moins dans un premier temps, le développement des méthodes semi-classiques.

Il y a eu certes les cours de Leray au Collège de France à partir de 1972, mais tant le cadre du séminaire que le style d'exposition de J. Leray et sa

58. J'ai décrit en 2003 dans le texte non publié “30 ans d'analyse semi-classique” la manière dont l'analyse semi-classique s'est développée à Nantes. Dans l'immédiat, je renvoie à ce texte qui est resté inachevé.

59. qui signe un appendice dans le livre de Maslov

présentation plutôt formelle n'encourageaient pas tellement les jeunes à se lancer dans cette direction (voir cependant les remerciements d'A. Voros cités plus loin).

Le semi-classique n'est pas totalement absent dans le séminaire Goulaouic-Schwartz de cette période mais il est plutôt en gestation et les outils qui vont se développer à partir des années 78 sont plutôt mis au point pour d'autres questions (propagation des singularités, hypoellipticité, résolubilité locale et théorie spectrale pour un Laplacien sur une variété compacte) (d'où le titre de cette sous section : évolution sous-marine). Mentionnons toutefois qu'un article de Duistermaat mentionne une utilisation semi-classique des Opérateurs Intégraux de Fourier et que la thèse d'état de Y. Colin de Verdière (1974) est potentiellement "semi-classique" et reliée aux travaux de Balian-Bloch qui datent de la période 1967-1974. Les liens entre l'analyse microlocale et la théorie spectrale dont l'origine est le travail d'Hörmander (1968) se développent : Colin de Verdière, Chazarain, Duistermaat, Boutet de Monvel, Guillemin, Chazarain, Melrose, Sjöstrand... et sous des formes plus classiques Baouendi, Goulaouic, Métivier, Pham The Lai, Robert ... L'obtention des meilleurs restes suscite beaucoup d'activité.

Par ailleurs dans le prolongement de l'optique géométrique (travaux de Ludwig) une intense activité se développe autour de la propagation des singularités et du scattering (travaux de Taylor, Melrose, Friedlander, Eskin, Sjöstrand, ..., Lebeau) à partir de 1975. Même si les techniques qui sont utilisées sont parfois communes, nous choisissons de ne pas les considérer en tant que telles comme semi-classiques, si elles ne se présentent pas explicitement comme dépendant d'un paramètre jouant le rôle de la constante de Planck.

4.4.2 (Re)naissance du semi-classique chez les edpistes 1977-1982

Sans que nous le sachions au départ dans le milieu EDP, c'est sans doute, dans la région parisienne, autour du CEA à la suite de Balian-Bloch que se développe le semi-classique dans la période précédente. Au centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique, des physiciens comme Lascoux et Sénior qui ont réalisé la traduction de Maslov ont aussi joué un rôle de catalyseur (...F. Pham..). La thèse de Voros de 1977 (développements semi-classiques) s'inscrit clairement dans une nouvelle démarche (on y voit apparaître le calcul de Weyl déjà popularisé par Shubin et qui verra sa consécration mathématique dans un article de Hörmander, la notion d'opérateur h -admissible qui sera reprise dans les travaux de Robert puis Helffer-Robert,

les problèmes d'ergodicité, de systèmes intégrables...). Les remerciements d'A. Voros au début de sa thèse donnent un bon éclairage sur le développement des idées :

Les professeurs R. Balian, C. Itzykson et J. Lascoux m'ont initié au sujet de ce travail... Un grand nombre des idées développées dans ce travail leur sont dues, avec mention particulière des travaux de R. Balian et C. Bloch sur les méthodes semi-classiques.... Les travaux de géométrie riemannienne de Y. Colin de Verdière ont été pour cette thèse une source importante d'inspiration mathématique. J'ai aussi été profondément influencé par les travaux et les cours du professeur J. Leray sur l'analyse lagrangienne et les solutions asymptotiques d'équations aux dérivées partielles. Par ailleurs, j'ai emprunté l'idée de support essentiel aux travaux de J. Bros et D. Iagolnitzer en analyse complexe et en théorie de la matrice S . Ce travail incorpore également de nombreuses idées de A. Grossmann, de B. Kostant et J.M. Souriau. Je dois en outre une reconnaissance spéciale pour la stimulation scientifique et morale qu'ils m'ont apportée à V. Guillemin, R. Seiler, S. Sternberg et A. Wightman.

A. Voros est aussi en contact avec d'autres écoles semi-classiques, certes peu rigoureuses mais extrêmement dynamiques dont le leader est sans doute M. Berry mais qui s'appuient sur une grosse expérimentation numérique⁶⁰. Pour préciser l'apport de Voros, je dirai que, curieusement, les travaux de J. Leray consacrés à la compréhension du travail de Maslov s'intéressent essentiellement à la partie formelle des constructions des solutions approchées. J. Leray ne semble pas regarder la question de savoir si le problème spectral est bien posé, si les quasimodes correspondent à des vraies fonctions propres...Voros pose plus les bases d'une version mathématique de l'analyse semi-classique.

Comme nous l'avons déjà dit, ce n'est ni au séminaire Goulaouic-Schwartz ou aux journées EDP que l'on parle beaucoup de semi-classique dans cette période. Il est toutefois mentionné dans un exposé de Y. Colin de Verdière (77-78) sur le spectre conjoint, comme corollaire de cette étude⁶¹ On peut

60. On retrouve cette dextérité dans l'école semi-classique du département de Physique d'Orsay : Bohigas, Leboeuf,...

61. L'idée principale est ici que pour comprendre le spectre de $-h^2\Delta + V$ sur une variété compacte M , on peut regarder plutôt le spectre conjoint de $-\Delta - V\partial_\theta^2$ et de ∂_θ , sur $M \times S^1$. Le semi-classique apparaît ici comme un simple sous-produit de l'analyse spectrale. Un théorème de comptage semi-classique (Yves Colin de Verdière renvoie à Voros, Babich,

aussi mentionner un groupe de travail de théorie spectrale et méthodes microlocales à Paris 7 (avec P. Bérard et Y. Colin de Verdière) dans les années 75 et 76.

L'analyse des dates de publications montre donc que c'est autour des années 77-78 que un peu partout les méthodes semi-classiques commencent à se développer en tant que telles et plus seulement en tant que corollaires d'autres théories. En Russie, il faut sans doute mentionner les travaux de Lazutkin qui datent de 1973 (grandes fréquences), de Shubin où des calculs pseudo-différentiels dépendant d'un petit paramètre apparaissent, les travaux de Rozenbljum et Vainberg. Au Japon, il faut mentionner Asada-Fujiwara (qui inspirera J. Chazarain) et K. Yajima. Aux Etats-Unis, il faut mentionner dans l'Ecole de Lieb ou de Simon, Aizenman-Lieb, ... Harrell. Par exemple Lieb-Simon démontrent la validité de l'approximation de Thomas-Fermi (réduction au problème à une particule et obtention du terme de Weyl pour l'asymptotique par des techniques d'encadrement avec des problèmes de Dirichlet et de Neuman), Harrell étudie l'effet tunnel.

On notera aussi la sortie du livre de Guillemin-Sternberg en 1977. En France, mais dans une école qui n'a que peu de contact avec l'Ecole microlocale, je mentionnerai J.M. Combes, qui travaille au CPT avec R. Seiler et R. Schrader (à Berlin).

4.4.3 Expansion

Tout s'accélère à partir des années 1980. A Nantes par exemple où la théorie spectrale était bien implantée (Pham The Lai, D. Robert), les recherches se développent simultanément sur les opérateurs globaux (dans la foulée de la thèse de Robert et en comparaison avec des travaux de Boutet de Monvel, Guillemin et Hörmander) dont les modèles les plus simples sont l'oscillateur harmonique et l'oscillateur quartique et un groupe de travail est formé autour des travaux semi-classiques de J. Chazarain. Vers 1982, en réponse à un appel d'offres du CNRS (ATP), un projet intitulé " Méthodes semi-classiques en Mécanique quantique" est présenté par J. Chazarain, B. Helffer, F. Pham, D. Robert, J. Sjöstrand et A. Voros. Il est soutenu par B. Malgrange. Il est sans doute utile d'en rappeler les objectifs :

Trouver un langage commun entre Physiciens Théoriciens et Mathématiciens permettant de confronter des visions différentes des problèmes de mécanique

Lazutkin ...) est obtenu.

quantique. Les premiers cherchent plutôt à comprendre et à expliquer les phénomènes physiques en élaborant des théories, avec certes l'aide d'outils mathématiques, mais dont la véracité est déterminée avant tout par l'expérience ou plus fréquemment par des simulations numériques. Les second essayent de démontrer rigoureusement les résultats annoncés, souvent considérés comme "justes" avec beaucoup d'avance sur les possibilités mathématiques du moment. Ces études peuvent d'ailleurs mettre en évidence des phénomènes nouveaux intéressants du point de vue physique (A noter que les présentateurs du projet étaient en train de redéfinir naïvement le concept de Physique Mathématique, qui existait déjà ailleurs!) ... Au moment où les crédits sont attribués, J. Chazarain annonce son départ définitif de la recherche en mathématiques. L'énergie apportée par J. Sjöstrand dans la réalisation du programme rend le programme initial très rapidement dépassé. La transformation de FBI telle qu'elle est développée dans le mémoire de J. Sjöstrand à Astérisque jouera par exemple un rôle important dans le traitement de l'analyse semi-classique du fond de puits dans le cadre analytique. Peut-être faut-il mentionner que l'opérateur :

$$-\Delta - V\partial_{\theta}^2 ,$$

a, en supposant que $\min V = 0$, comme variété caractéristique :

$$V = 0, \xi = 0 ,$$

et a été l'objet de nombreuses études dans la période 72-76 (en hypoellipticité tant C^{∞} qu'analytique). Nous renvoyons au livre plus accessible d'A. Martinez pour une présentation des techniques FBI en analyse semi-classique. Je ne rendrai pas compte ici de la vingtaine de travaux coécrits avec J. Sjöstrand pendant cette période.

L'organisation des premières journées semi-classiques date de 1984. Les organisateurs ont essayé de (et réussi à) rassembler des écoles différentes. Ceci a d'une certaine manière conduit à un repositionnement scientifique de la physique mathématique en France, qui fera une entrée dans la commission de mathématiques au CNRS, alors qu'elle était surtout localisée dans la commission de Physique Théorique⁶². La communauté formée aux techniques microlocales a ainsi retrouvé une communauté de physique mathématique

62. Malheureusement, cela conduira à terme à la disparition des physiciens mathématiciens à sensibilité mathématique dans cette commission.

plus formée aux techniques d'analyse fonctionnelle et plus liée à la physique (J.M. Combes, J. Bellissard,...) et à l'école de B. Simon⁶³ et qui apportait une multitude de problèmes motivés par la physique. Les tentatives de contact avec des écoles WKB (Fröman) ou même l'école de Berry ont été moins fructueuses même si la phase de Berry jouera un rôle et si des écoles WKB renaîtront autour de A. Grigis à Paris 13 et de F. Pham à Nice.

Peut-être que l'idée qui s'est progressivement mise en évidence est que, si les outils microlocaux trouvaient leur origine dans des techniques développées pour comprendre la mécanique ondulatoire ou des questions asymptotiques de la mécanique quantique, ils pouvaient naturellement s'appliquer efficacement à cette théorie et que le maximum d'efficacité serait obtenu en rédéveloppant les outils microlocaux dans le contexte semi-classique. D'une manière qui peut sembler absurde à la génération qui a suivi, il a fallu "désEDépiser" les Fourier-Intégraux et les opérateurs pseudo-différentiels, en particulier il a fallu leur enlever certaines caractéristiques que L. Hörmander leur avait ajouté (par rapport aux théories masloviennes) pour la détermination de formes normales et l'étude des singularités en Equations aux dérivées partielles : structure homogène des phases, comportement particulier de la section nulle du fibré cotangent... La question des formes normales en analyse semi-classique est d'une certaine manière plus simple (car il n'y a pas d'homogénéité en ξ à considérer). Il a fallu revenir à une notion d'ensemble de fréquence à la place du front d'onde... Mais beaucoup de travaux autour de la transformation de FBI de J. Sjöstrand avaient pour des raisons techniques déjà opéré cette mutation. On peut aussi citer quelques phrases de Victor Ivrii sur sa conversion vers les années 85 vers le semi-classique⁶⁴ :

"I started to study semi-classical spectral asymptotics at the time when I foolishly assumed that the first story was completely finished and I had nothing to do. So I decided to extend the results to semi-classical analysis before leaving the area. When I told my first results to M.Z. Solomyak, he asked if those results could be deduced from the results of the classical theory by the Birman-Schwinger principle. A quick check gave a very surprising answer : using classical asymptotics one can prove semi-classical asymptotics only under very unnatural restrictions. But using semi-classical asymptotics one can extend classical asymptotics to more general operators and problems."

Ce retournement dans le point de vue est d'ailleurs assez général et beau-

63. Mes contacts avec l'école d'Eliott Lieb ne s'établiront qu'à partir de 1990

64. Ses premiers travaux semi-classiques datent de 1982.

coup de spécialistes en EDP préfèrent maintenant se placer dans le cadre semi-classique pour résoudre leurs problèmes a priori non semi-classiques.

Ce colloque “Journées Semi-classiques” sera repris quelques années plus tard pour devenir une rencontre annuelle regroupant la plupart des courants de l’analyse semi-classique en un sens de plus en plus étendu. En 1990-91 a lieu une année spéciale dédiée aux méthodes semi-classiques et financées par le ministère de la Recherche et le CNRS. D. Robert en est le principal organisateur. Cette année spéciale a marqué la reconnaissance internationale de tout ce qui avait été fait en France pendant 10 années.

Il est maintenant impossible de décrire depuis cette date de manière exhaustive l’utilisation de l’analyse semi-classique dans de nombreux secteurs de la physique mathématique et des équations aux dérivées partielles. Je renvoie un texte écrit en 2003 [Hel2003] sur trente ans d’analyse semi-classique.

4.5 Président du CSU

J’avais déjà été membre élu du CSCU de 80 à 82 (sous la présidence de Jean-Pierre Ferrier). Un CSPU sous la présidence de J.M. Lemaire est alors constitué sur une procédure étrange mélangeant un tirage au sort et des nominations dont je ne suis pas membre. Comme son nom l’indique c’est un organisme provisoire dans l’attente d’une réforme annoncée par les conseillers de F. Mitterand.

C’est de 1984 à 1986 que je travaillerai comme président du CSU (maintenant CNU) dans un contexte qu’on peut qualifier de difficile pour au moins trois raisons : la réunification, contre l’avis de beaucoup de mathématiciens appliqués⁶⁵, des deux sections 17 et 18 de mathématiques en une seule opérée par J.J. Payan, la création de l’habilitation et le changement dans les règles de recrutement, avec la constitution des jurys.

65. Il faut ici se souvenir que 1983 est l’année de création de la SMAI. Je cite ici ce qu’indique sa page Web : “La Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI) est une association régie par la loi de 1901, sans but lucratif. Elle a été fondée en 1983 à l’initiative de mathématiciens appliqués français ayant pris conscience de la spécificité de leur discipline et désirant assurer son expansion et son développement. ”

L’objectif de la Société est de contribuer au développement des mathématiques appliquées à travers la recherche, les applications dans les entreprises, les publications, l’enseignement et la formation des chercheurs et ingénieurs.”

Il faut dire que je fus le premier surpris de me retrouver président de cette commission à 35 ans. J'avais été élu sur une liste SNESUP qui au niveau des A avait plutôt fait pâle figure face à une liste présentée par la nouvelle association QSF⁶⁶ (Qualité de la Science Française). La situation au niveau des B était certes différente, mais dans la réunion des élus SNESUP qui s'était déroulée la veille au soir, il semblait tout à fait acquis que le président du CNU serait la tête de liste de (ou le candidat présenté par) QSF. Les discussions du soir arrivèrent à la conclusion qu'il fallait présenter pour la forme un candidat et les membres expérimentés de cette réunion ayant tous préparé une bonne raison pour ne pas candidater le "sort" tomba sur le plus jeune. Pas de quoi s'inquiéter sauf que lors du vote du CSU où j'affronte mon futur collègue à l'ENS Jean Pierre Labesse, je me retrouve élu président du CSU sans avoir anticipé. Le vote étant secret, je n'ai que des conjectures sur ce qui a conduit à cette élection : les mathématiciens appliqués (même QSF) ont-ils été effrayés (ou réticents à) par élire un spécialiste des fonctions automorphes. Il est assez clair que le vote des B a joué un rôle prédominant.

Cette période comme président du CSU fut une période épuisante où je pense avoir représenté toute la communauté mathématique et avoir eu la confiance de tous mes collègues après cette prise de fonctions inattendue. Je voudrais juste rappeler comment nous avons géré la transition vers cette nouvelle habilitation pour les titulaires d'une thèse d'état. Le problème qui s'est posé était la possibilité pour les docteurs d'état de diriger des recherches, ce qui était exclus dans le texte initial sauf dérogation au coup par coup. Une position syndicale fut d'accorder "automatiquement" l'habilitation aux docteurs d'état mais cette position rencontrait bien sûr un refus très ferme du ministère et était loin de recueillir l'agrément des collègues. Après des discussions avec la section Math. du CNRS (présidée par Daniel Barsky), un consensus se dégagait sur une procédure très allégée pour les docteurs d'état

66. Je cite aussi ici, ce qu'indique la page WEB de l'association :

" L'association pour la Qualité de la science française (QSF), créée en 1982 à l'initiative de Laurent Schwartz, a pour mission de défendre et de promouvoir la qualité et la créativité de l'enseignement supérieur et de la recherche en France, conditions indispensables de la compétitivité de la science, du développement de l'économie, et de la diffusion de la culture. S'il revient aux organisations syndicales d'assurer la défense collective et individuelle des universitaires, l'association QSF entend que les choix scientifiques soient faits sur la base de critères exclusivement scientifiques, indépendamment de toute autre considération."

en mathématiques qui avaient ou bien été inscrits sur la liste dite "restreinte" ou bien été considérés dans le cas des chercheurs CNRS "maîtrisables", c'est à dire jugés scientifiquement promouvables au grade de Maître de recherche (ce qui ne voulait pas dire promu!). C'est cette procédure "allégée" qu'il fallut établir, le ministère imposant que nous respections la lettre du texte. L'université Paris 7 accepta donc d'inscrire en habilitation environ 95 docteurs d'état dans la catégorie mentionnée plus haut sous la responsabilité d'un jury unique constitué du président du CSU, du vice-président Ivar Ekeland et du président de la section math. du CNRS Daniel Barsky.

Les soutenances se déroulèrent sur deux jours de manière individuelle en appliquant le texte de l'habilitation de manière très minimaliste. J'eus en particulier à établir 95 reports de soutenance, certes stéréotypés, mais individualisés. Je n'avais pas d'ordinateur, juste une machine à écrire et une photocopieuse. Aucune secrétaire n'était mise à ma disposition pour cette tâche comme d'ailleurs pour toute mon activité de président.

Quelques mois plus tard, un décret attribua finalement aux docteurs d'état le droit à diriger les recherches, de sorte que tout ce travail fut au final bien inutile, même s'il montrait que la communauté mathématique était capable dans des situations complexes d'avoir une position commune.

Références

- [Hel1988] B.Helffer : *Introduction to the semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications*, Springer Lecture Notes in Mathematics, n^o1336 (1988).
- [Hel2003] B. Helffer, 30 ans d'analyse semi-classique bibliographie commentée. <http://www.math.u-psud.fr/~helffer/histoire2003.ps>, 2003.