

Sur des extensions du théorème Nodal de  
Courant–  
Enquête sur une note mystérieuse du livre de  
Courant-Hilbert.

Bernard Helffer,  
Laboratoire Jean Leray,  
Université de Nantes.

8 Mars 2018

# Résumé

Le théorème nodal de Courant dit que l'ensemble nodal de la  $n$ -ième fonction propre du Laplacien dans un domaine de  $\mathbb{R}^d$  délimite au plus  $n$  domaines nodaux.

Une note de bas de page dans le volume 1 de Courant-Hilbert indique que ce théorème se généralise à toute combinaison linéaire non triviale des  $n$  premières fonctions propres. R. Courant attribue ce théorème à un de ses élèves en thèse à Göttingen (1926), qui ne semble l'avoir jamais écrit. V. Arnold a montré que ce théorème impliquait des résultats contradictoires à ceux qu'il obtenait en géométrie algébrique. Après avoir mené l'enquête sur les origines de ce "faux" théorème, nous proposerons des contre-exemples très simples relevant de l'analyse spectrale du Laplacien dans des ouverts simples.

Ce travail a été réalisé en collaboration avec Pierre Bérard (Université de Grenoble). Une motivation est un article de 2015 de Nikolay Kuznetsov publié dans EMS Newsletter sous le titre : On Delusive Nodal Sets of Free Oscillations.

# Introduction

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un domaine ouvert borné connexe ou, plus généralement, une variété compacte avec ou sans bord. Considérons le problème aux valeurs propres

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ B(u) = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

où,  $\Delta$  est le Laplacien:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}.$$

et, s'il y a un bord,  $B(u)$  est une condition sur le bord  $\partial\Omega$ , telle qu'on obtient un problème autoadjoint.

Par exemple,

- ▶  $D(u) = u|_{\partial\Omega}$  pour la condition de Dirichlet,
- ▶  $N(u) = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega}$  pour la condition de Neumann.

On désigne par  $H(\Omega, B)$  l'extension autoadjointe de  $-\Delta$ .  
 $\lambda \in \mathbb{C}$  est appelée une valeur propre si on a une solution au problème ci-dessus avec  $u$  non nul dans le domaine de cette extension:

$$D(H(\Omega, B)) = \{u \in H^2(\Omega), Bu = 0 \text{ on } \partial\Omega\}.$$

Pour nos  $B$ ,  $(H(\Omega, B) + 1)$  est inversible et, comme  $\Omega$  est borné et régulier, son inverse est compact.

On peut alors montrer que l'ensemble des valeurs propres est contenu dans  $\mathbb{R}$ , constitué d'une suite de valeurs propres tendant vers  $+\infty$ .

On peut de plus trouver une base de fonctions propres pour  $L^2(\Omega)$ .

On désigne par

$$0 \leq \lambda_1(\Omega, B) < \lambda_2(\Omega, B) \leq \lambda_3(\Omega, B) \leq \dots \quad (2)$$

la suite de ses valeurs propres comptées avec multiplicité.  
Pour tout entier  $n \geq 1$  et gérer la question des multiplicités, on introduit

$$\tau(\Omega, B, \lambda_n) = \min\{k \mid \lambda_k(\Omega, B) = \lambda_n(\Omega, B)\}. \quad (3)$$

Enfin  $\mathcal{E}(\lambda_n)$  désignera l'espace propre associé à  $\lambda_n$ .

# Le théorème nodal de Courant

Pour une fonction continue à valeurs réelles  $v$  sur  $\Omega$ , on définit son ensemble nodal par

$$\mathfrak{Z}(v) = \overline{\{x \in \Omega \mid v(x) = 0\}}, \quad (4)$$

et on note  $\beta_0(v)$  le nombre de composantes connexes ( i.e. de domaines nodaux) de  $\Omega \setminus \mathfrak{Z}(v)$ .

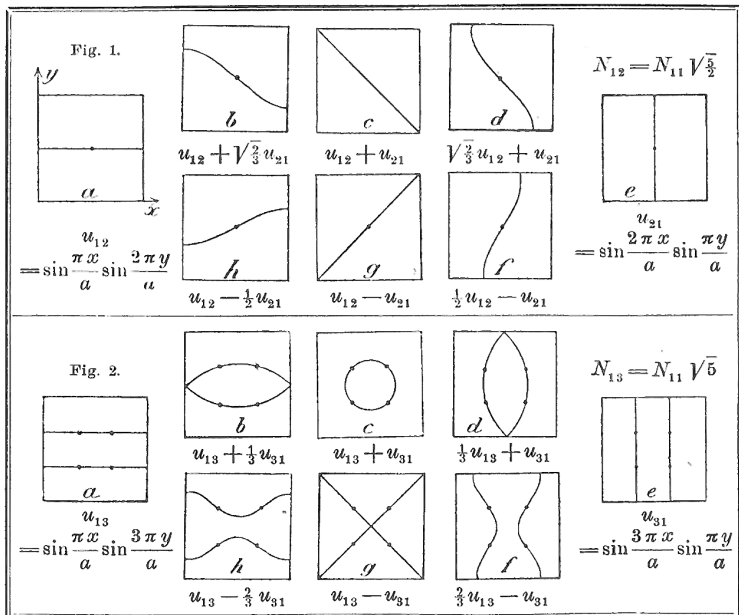
## Théorème nodal de Richard Courant (1923)

Pour tout  $u \in \mathcal{E}(\lambda_n(\Omega, B)) \setminus \{0\}$ ,

$$\beta_0(u) \leq \tau(\Omega, B, \lambda_n) \leq n. \quad (5)$$

On peut trouver ce théorème dans l'ouvrage de Courant-Hilbert [9].

# Exemple de lignes nodales



# Sur la propriété nodale de Courant généralisée (ECP)

Pour  $r > 0$ , on désigne par  $\mathfrak{L}(\Omega, B, r)$  l'espace vectoriel

$$\mathfrak{L}(\Omega, B, r) = \left\{ \sum_{\lambda_j(\Omega, B) \leq r} c_j u_j \mid c_j \in \mathbb{R}, u_j \in E_{\lambda_j(\Omega, B)} \right\}. \quad (6)$$

Propriété de Courant généralisée = (ECP)

On dira que  $v \in \mathfrak{L}(\Omega, B, \lambda_n(\Omega, B))$  vérifie (ECP) si

$$\beta_0(v) \leq \tau(\Omega, B, \lambda_n). \quad (7)$$

Une note de bas de page dans Courant-Hilbert [9] indique que (ECP) est vraie pour tout  $\Omega$  et tout  $n$ , et renvoie à la thèse de Horst Herrmann (Göttingen, 1932) [15].



## Un peu d'histoire : Sturm (1836), Pleijel (1956).

1. (ECP) est vrai en dimension 1 pour les équations de Sturm-Liouville. Ce fut d'abord annoncé par C. Sturm en 1833, [28] et démontré dans un mémoire en [29]. D'autres démonstrations sont données par J. Liouville et Lord Rayleigh qui citent chacun C. Sturm explicitement.
2. Å. Pleijel mentionne également (ECP) dans son célèbre article [25] sur le comportement asymptotique du nombre d'ensembles nodaux d'une fonction propre de Dirichlet dans un domaine du plan. A la fin de son article, il écrit de manière dubitative :  
*"In order to treat, for instance the case of the free three dimensional membrane  $]0, \pi[^3$ , it would be necessary to use, in a special case, the theorem quoted in [CH]... However, as far as I have been able to find there is no proof of this assertion in the literature."*

## Un peu plus d'histoire : V. Arnold (1973-1979)

3. Comme remarqué par V. Arnold [1], quand  $\Omega = \mathbb{S}^d$ , (ECP) est relié au sixième problème de Hilbert. Arnold [2] indique qu'il a en fait discuté de cette note de bas de page avec R. Courant, que (ECP) ne peut pas être vraie dans ce cas. Plus tard O. Viro donne en 1979 des contre-exemples pour la sphère  $\mathbb{S}^3$ .

Plus précisément, V. Arnold raconte:

*Having read all this, I wrote a letter to Courant:*

*"Where can I find this proof now, 40 years after Courant announced the theorem?"*

*Courant answered that one can never trust one's students: to any question they answer either that the problem is too easy to waste time on, or that it is beyond their weak powers.*

et V. Arnold poursuit:

*The point is that for the sphere  $\mathbb{S}^2$  (with the standard Riemannian metric) the eigenfunctions (spherical functions) are polynomials. Therefore, their linear combinations are also polynomials, and the zeros of these polynomials are algebraic curves (whose degree is bounded by the number  $n$  of the eigenvalue). Therefore, from the generalized Courant theorem one can, in particular, derive estimates for topological invariants of the complements of projective real algebraic curves (in terms of the degrees of these curves).*

*... And then it turned out that the results of the topology of algebraic curves that I had derived from the generalized Courant theorem contradict the results of quantum field theory. Nevertheless, I knew that both my results and the results of quantum field theory were true. Hence, the statement of the generalized Courant theorem is not true.*

## Seizième problème d'après Wikipedia

Le seizième problème de Hilbert est l'un des 23 problèmes de Hilbert. Il comporte deux parties.

La première concerne le nombre de branches réelles (ovales) d'une courbe algébrique, et leur disposition ; de nombreux résultats modernes (Petrovskii, Thom, Arnold) apportent des informations à leur sujet.

La seconde partie du problème pose la question du nombre maximal et de la position mutuelle des cycles limites de Poincaré (orbites périodiques isolées) pour une équation différentielle polynomiale plane de degré donné ; cette question est encore ouverte.

## Nouvel épisode de l'histoire : Gladwell-Zhu (2003)

4. Dans [11], Gladwell et Zhu discutent (ECP) sous le nom de la *conjecture de Courant-Herrmann*.
- ▶ Ils indiquent que cette extension du théorème de Courant n'apparaît pas (et a fortiori n'est pas démontrée) dans la thèse d'Herrmann ou dans des publications ultérieures.
  - ▶ Ils considèrent le cas d'un rectangle et échouent dans ce cas à trouver un contre-exemple.
  - ▶ En s'appuyant sur une étude numérique assez grossière, ils proposent un contre-exemple d'un domaine non-convexe.
  - ▶ Ils suggèrent que la conjecture pourrait être vraie dans le cas convexe.

# Richard Courant

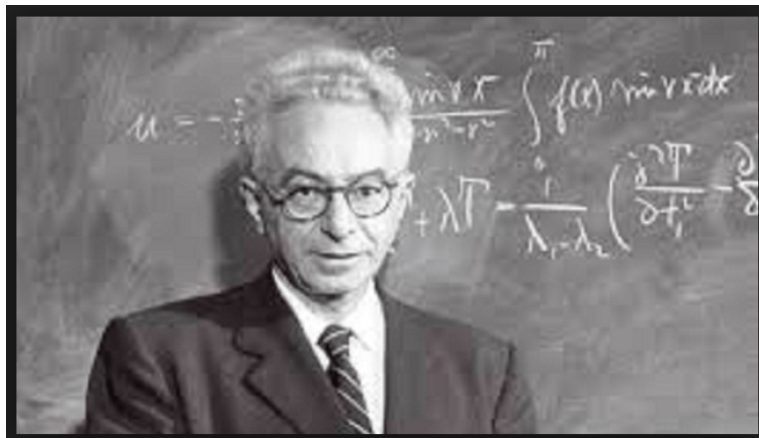


Figure: Richard Courant 1888–1972



## Richard Courant et ses livres

On renvoie au livre de la journaliste Constant Reid: Courant in Göttingen and New York, The story of an improbable Mathematician. V. Arnold y fait référence et le livre contient beaucoup d'informations sur l'écriture des deux volumes du Courant-Hilbert.

On trouvera aussi dans Images des maths 2011 un article sur l'institut Courant.

On y trouve, au sujet de l'écriture du livre :  
Écoulement Supersonique et Ondes de choc,  
co-écrit par Courant, Friedrichs et Morawetz, ce commentaire de K. Morawetz:

*"Courant était un rédacteur brillant mais le style l'emportait parfois sur l'exactitude"*

## Complément d'enquête : et si on regardait dans la thèse d' H. Herrmann

**5.** On peut trouver la thèse de H. Herrmann à la BNF.

L'introduction de la thèse mentionne trois parties, mais seule la deuxième partie semble avoir été acceptée<sup>1</sup> par le comité d'évaluation pour publication.

Comme l'indiquait Gladwell-Zhu, cette partie ne comporte aucune mention de (ECP).

La première partie fut publiée plus tard [16] in Math. Z. en 1936 sous une forme différente.

Enfin, la troisième partie ne fut jamais publiée. Le titre du chapitre indique toutefois un sujet (étude du problème de Robin) qui n'a rien à voir avec (ECP).

---

<sup>1</sup>Von der Fakultät genehmigter Teildruck,

## FIN de l'enquête

H. Herrmann est déclaré non-coupable sur ce point. Il est plus difficile de savoir qui est à l'origine de cette erreur ou de cette négligence mais R. Courant ne peut sans doute pas se dégager de toute responsabilité.

R. Courant quittera l'Allemagne Nazi en 1934 et fondera l'institut qui porte son nom à New York sur le modèle qu'il avait créé à Göttingen.

H. Herrmann entrera au parti Nazi en 1936. Poursuivi après la guerre et interdit d'enseignement à l'université pour son passé Nazi, il ne retrouvera un poste universitaire qu'en 1952.

# A la recherche de contre-exemples élémentaires

Pour ceux qui pourraient être effrayés par le sixième problème de Hilbert ou la compréhension des travaux d'Arnold ou de l'exemple d'O. Viro, nous nous proposons de rechercher des contre-exemples plus simples de (ECP) pour des domaines dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $S^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , incluant des domaines convexes.

## Rectangle fissuré

Soit  $\mathfrak{R}_0$  le rectangle  $]0, 4\pi[ \times ]0, 2\pi[$ . Pour  $0 < a \leq 1$ , soit  $C_a := ]0, a] \times \{\pi\}$  et  $\mathfrak{R}_a := \mathfrak{R}_0 \setminus C_a$  et considérons la condition de Neumann. Ce cas est considéré pour une tout autre raison dans Dauge-Helffer (1993). Soient

$$\{ 0 = \nu_1(0) < \nu_2(0) < \nu_3(0) = \nu_4(0) \leq \dots \quad (8)$$

les valeurs propres de Neumann du Laplacien  $-\Delta$  dans  $\mathfrak{R}_0$ . Elles se calculent explicitement par  $\frac{m^2}{16} + \frac{n^2}{4}$  pour toute paire  $(m, n)$  d'entiers positifs (ou nuls).

Une base de fonctions propres associée est donnée par

$$(x, y) \mapsto u_{m,n}(x, y) := \cos \frac{m}{4}x \cos \frac{n}{2}y .$$

De même, les valeurs propres de Neumann pour  $-\Delta$  dans  $\mathfrak{R}_a$  sont notées

$$\{ 0 = \nu_1(a) < \nu_2(a) \leq \nu_3(a) \leq \dots \} . \quad (9)$$

Les trois premières valeurs propres de Neumann pour  $\mathfrak{R}_0$  sont donc:

$\nu_1(0)$	0	(0, 0)	$\psi_1(x, y) = 1$
$\nu_2(0)$	$\frac{1}{16}$	(1, 0)	$\psi_2(x, y) = \cos(\frac{x}{4})$
$\nu_3(0)$		(0, 1)	$\psi_3(x, y) = \cos(\frac{y}{2})$
$\nu_4(0)$	$\frac{1}{4}$	(2, 0)	$\psi_4(x, y) = \cos(\frac{x}{2})$

(10)

Dauge-Helffer (1993) ont démontré :

## Théorème

For  $i \geq 1$ ,

1.  $[0, 1] \ni a \mapsto \nu_i(a)$  est monotone décroissant.
2.  $]0, 1[ \ni a \mapsto \nu_i(a)$ , est continue.
3.  $\lim_{a \rightarrow 0^+} \nu_i(a) = \nu_i(0)$ .

On en déduit que pour  $0 < a$ , assez petit on a

$$0 = \nu_1(a) = \nu_1(0) < \nu_2(a) \leq \nu_2(0) < \nu_3(a) \leq \nu_4(a) \leq \nu_3(0) = \nu_4(0). \quad (11)$$

Observons que pour  $i = 1$  et  $2$ ,  $\frac{\partial \psi_i}{\partial y}(x, y) = 0$ . Ainsi, pour  $a$  assez petits,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont les deux premières fonctions propres pour  $\mathfrak{R}_a$  avec condition de Neumann et les valeurs propres associées sont

$$\nu_1(a) = 0$$

et

$$\nu_2(a) = \frac{1}{4} < \nu_3(a).$$

Nous avons

$$\alpha \psi_1(x, y) + \psi_2(x, y) = \alpha + \cos\left(\frac{x}{4}\right).$$

On peut choisir le coefficient  $\alpha \in ]-1, +1[$  de sorte que les combinaisons des deux premières fonctions propres ont deux ou trois domaines nodaux .



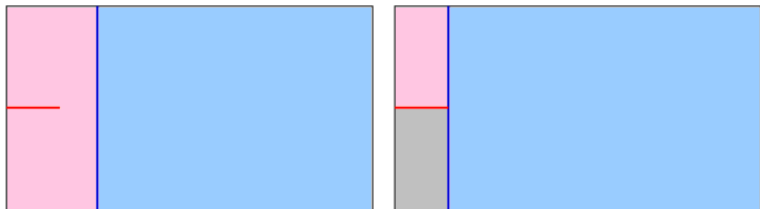


Figure: Rectangle avec une fissure (Condition de Neumann)

**Ceci montre que (ECP) est faux pour  $\mathfrak{R}_a$  avec condition de Neumann.**

Notons qu'on peut introduire plusieurs fissures

$$\{(x, b_j) \mid 0 < x < a_j\}_{j=1}^k$$

de sorte que pour tout  $d \in \{2, 3, \dots, k+2\}$  il existe une combinaison linéaire des fonctions propres 1 et  $\cos(\frac{x}{4})$  avec  $d$  domaines nodaux.

# Sphère $\mathbb{S}^2$ fissurée

Sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ , nous considérons les géodésiques  $(x, y, z) \mapsto (\sqrt{1-z^2} \cos \theta_i, \sqrt{1-z^2} \sin \theta_i, z)$  passant par le pôle nord  $(0, 0, 1)$ , avec des  $\theta_i \in [0, \pi[$  distincts.

Si on enlève les segments géodésiques  $\theta_0 = 0$  et  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$  with  $1 - z \leq a \leq 1$ , on obtient une sphère fissurée  $\mathbb{S}_a^2$  par une fissure en forme de croix.

Si on prend la condition de Neumann sur la croix on va construire une fonction dans l'espace engendré par les deux premiers espaces propres de la sphère pour produire cinq ensembles nodaux.

On remarque en effet que la fonction  $z$  est une deuxième fonction propre du Laplacien sur la sphère fissurée  $\mathbb{S}_a^2$  de valeur propre  $2$ .  
Pour  $a$  assez petit,  $\lambda_4(a) = 2$ , avec cette fonction comme fonction propre.  
Pour  $0 < b < a$ ,  $(x, y, z) \mapsto z - b$  a cinq composantes dans  $\mathbb{S}_a^2$ , voir figure en coordonnées sphériques.

**Par conséquent (ECP) n'est pas vérifiée pour la sphère fissurée.**

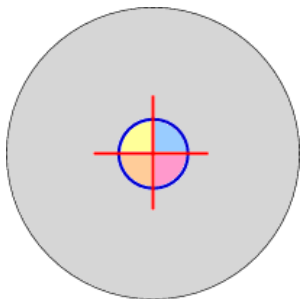


Figure: Sphère fissurée avec domaines nodaux.

# Le cas de l'hypercube avec condition de Dirichlet ou Neumann

On va suivre l'approche de Gladwell-Zhu qui avait échoué pour le carré et qui va marcher en dimension supérieure.

Soit  $\mathcal{C}_n(\pi) := ]0, \pi[^n$  l'hypercube of dimension  $n$ , avec condition de Dirichlet or Neumann ou de Neumann  $\partial\mathcal{C}_n(\pi)$ .

Une base de fonctions propres pour la réalisation de Dirichlet  $(\mathcal{C}_n(\pi), \partial)$  est donnée par les fonctions

$$\mathcal{C}_n(\pi) \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{j=1}^n \sin(k_j x_j) \quad (12)$$

correspondant aux valeurs propres

$$\sum_{j=1}^n k_j^2, \quad \text{pour } k_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Une base de fonctions propres pour la réalisation de Neumann  $(\mathcal{C}_n(\pi), \mathbf{n})$  est donnée par les fonctions

$$\mathcal{C}_n(\pi) \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{j=1}^n \cos(k_j x_j) \quad (13)$$

correspondant aux valeurs propres

$$\sum_{j=1}^n k_j^2, \text{ pour } k_j \in \mathbb{N}.$$

Pour Dirichlet, on peut utiliser les polynômes classiques de Chebyshev  $U_k(t)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , définis par,

$$\sin((k+1)t) = \sin(t) U_k(\cos(t)) ,$$

avec en particulier

$$U_0(t) = 1, \quad U_1(t) = 2t, \quad U_2(t) = 4t^2 - 1 .$$

Table: Premières valeurs propres de  $C_n(\pi)$

Val. propres	Mult.	Fcts propres
$n$	1	$\phi_1(x) := \prod_{j=1}^n \sin(x_j)$
$n+3$	$n$	$\phi_1(x) U_1(\cos(x_i))$ pour $1 \leq i \leq n$
$n+6$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\phi_1(x) U_1(\cos(x_i)) U_1(\cos(x_j))$ , $1 \leq i < j \leq n$
$n+8$	$n$	$\phi_1(x) U_2(\cos(x_i))$ pour $1 \leq i \leq n$

Pour les valeurs propres ci-dessus on a

$$\tau(n+3) = 2, \quad \tau(n+6) = n+2, \quad \tau(n+8) = \frac{n(n+1)}{2} + 2. \quad (14)$$



Pour étudier l'ensemble nodal, on utilise le difféomorphisme

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\xi_1 = \cos(x_1), \dots, \xi_n = \cos(x_n)) , \quad (15)$$

de  $]0, \pi[^n$  sur  $] - 1, 1[^n$ , et on divise par la fonction  $\phi_1$  qui ne s'annule pas dans l'hypercube ouvert. La fonction

$$\Psi_a(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 - a$$

correspond à une combinaison linéaire  $\Phi$  dans  $\mathcal{E}(n) \oplus \mathcal{E}(n+8)$ . Pour  $a$ ,  $(n-1) < a < n$ , la fonction  $2^n + 1$  nodal domains, see Figure 5 in dimension 3. For  $n \geq 3$ , nous avons  $2^n + 1 > \tau(n+8)$ .

On obtient donc

## Proposition

Pour  $n \geq 3$ , l'hypercube de dimension  $n$ , avec condition de Dirichlet fournit un contre-exemple à ECP.

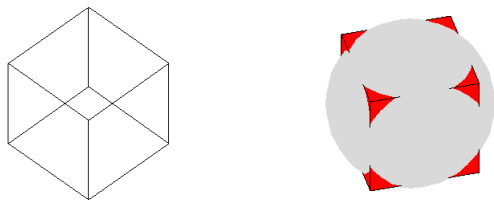


Figure: Le cube

**Remark** . On a des résultats similaires pour l'hypercube avec condition de Neumann.

## Le triangle équilatéral (Dirichlet ou Neumann)

Soit  $\mathcal{T}_e$  le triangle équilatéral de côté 1. Les valeurs et fonctions propres de  $\mathcal{T}_e$ , sont explicitement connues pour Dirichlet et Neumann.

On va montrer que le triangle équilatéral fournit de nouveau un contre-exemple pour ECP dans les deux cas Dirichlet ou Neumann.

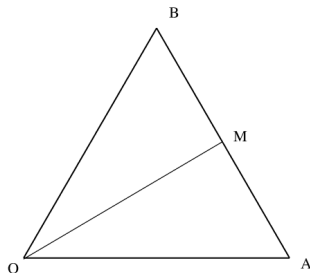


Figure: Le triangle équilatéral  $\mathcal{T}_e = [OAB]$

## Le cas de Neumann

La suite des valeurs propres de Neuman du triangle équilatéral equilateral triangle  $\mathcal{T}_e$  commence par,

$$0 = \lambda_1(\mathcal{T}_e, N) < \frac{16\pi^2}{9} = \lambda_2(\mathcal{T}_e, N) = \lambda_3(\mathcal{T}_e, N) < \lambda_4(\mathcal{T}_e, N). \quad (16)$$

Le second espace propre est de dimension **2**, contient une fonction propre symétrique par rapport à  $OM$ , et une autre antisymétrique  $\varphi_3^N$ .

La fonction propre  $\varphi_2^N$  est définie par

$$\varphi_2^N(x, y) = 2 \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) \left( \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi y}{\sqrt{3}}\right) \right) - 1. \quad (17)$$

L'ensemble  $\{\varphi_2^N + 1 = 0\}$  est formé de deux segments  $\{x = \frac{3}{4}\} \cap \mathcal{T}_e$  et  $\{x + \sqrt{3}y = \frac{3}{2}\} \cap \mathcal{T}_e$ , qui se rencontrent au point  $(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$  sur  $\partial\mathcal{T}_e$ . Les ensembles  $\{\varphi_2 + a = 0\}$ , avec  $a \in \{0, 1 - \varepsilon, 1, 1 + \varepsilon\}$ , et  $\varepsilon > 0$  assez petit  $\varepsilon$ , sont représentés en Figure 7. Quand  $a$  varie entre  $1 - \varepsilon$  et  $1 + \varepsilon$ , le nombre de domaines nodaux de  $\varphi_2 + a$  dans  $\mathcal{T}_e$  passe de 2 à 3, avec un saut pour  $a = 1$ .

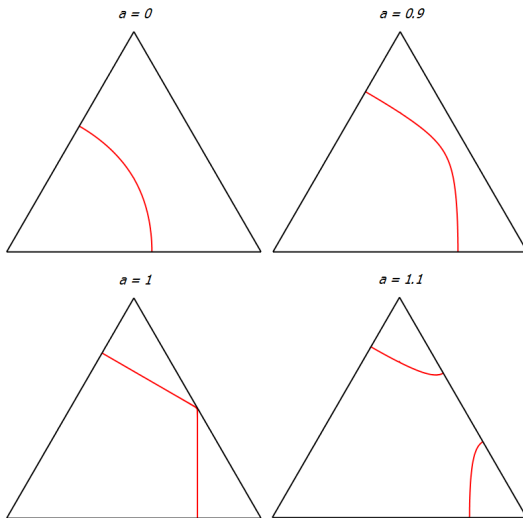


Figure: Lignes de niveau de  $\{\varphi_2^N + a = 0\}$  pour  $a \in \{0; 0.9; 1; 1.1\}$

Ainsi  $\varphi_2^N + a = 0$ , r  $1 \leq a \leq 1.2$ , donne un contre-exemple à ECP pour le triangle équilatéral dans le cas Neumann.

# Triangle équilatéral avec condition de Dirichlet

La suite des valeurs propres de Dirichlet du triangle équilatéral  $\mathcal{T}_e$  commence par,

$$\delta_1(\mathcal{T}_e) = \frac{16\pi^2}{3} < \delta_2(\mathcal{T}_e) = \delta_3(\mathcal{T}_e) = \frac{112\pi^2}{9} < \delta_4(\mathcal{T}_e). \quad (18)$$

Une première fonction propre  $\varphi_1^D$  est donnée par

$$\varphi_1^D(x, y) = -8 \sin \frac{2\pi y}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi(\sqrt{3}x + y)}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi(\sqrt{3}x - y)}{\sqrt{3}}. \quad (19)$$



La deuxième valeur propre a multiplicité 2, avec une fonction propre symétrique par rapport à la médiane  $OM$   $\varphi_2^D$  et une autre antisymétrique  $\varphi_3^D$ .  $\varphi_2^D$  est donnée par

$$\begin{aligned}\varphi_2^D(x, y) = & \sin\left(\frac{2\pi}{3}(5x + \sqrt{3}y)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}(5x - \sqrt{3}y)\right) \\ & + \sin\left(\frac{2\pi}{3}(x - 3\sqrt{3}y)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}(x + 3\sqrt{3}y)\right) \\ & + \sin\left(\frac{4\pi}{3}(2x + \sqrt{3}y)\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{3}(2x - \sqrt{3}y)\right).\end{aligned}\tag{20}$$

# Une formule surprenante.

Suggérée par des calculs numériques nous avons été conduits à subodorer que :

## Lemma

$$\varphi_2^D = -\varphi_1^D \varphi_2^N .$$

**Preuve** Il suffit d'exprimer toutes les fonctions concernées avec  $X = \cos \frac{2\pi}{3}x$  et  $Y = \cos \frac{2\pi}{\sqrt{3}}y$ . On se ramène alors à vérifier l'égalité de deux polynômes des variables  $X$  et  $Y$ .

On déduit du lemme que le contre-exemple pour Neumann donne la même figure que le contre-exemple pour Dirichlet ! Les lignes de niveaux de  $\varphi_2^N$  et  $\varphi_2^D / \varphi_1^D$  sont les mêmes.

# Simulations numériques pour les polygones réguliers (avec l'aide de Virginie Bonnaillie-Noël).

On rappelle qu'en dimension 2, Gladwell-Zhu échouèrent pour le carré. On réussit par contre numériquement pour Neumann et Dirichlet.

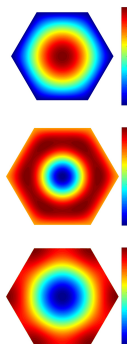


Figure: Lignes de niveau  $u_{1,D}$ ,  $u_{6,D}$  et  $\frac{u_{6,D}}{u_{1,D}}$  pour le problème de Dirichlet dans l'hexagone régulier

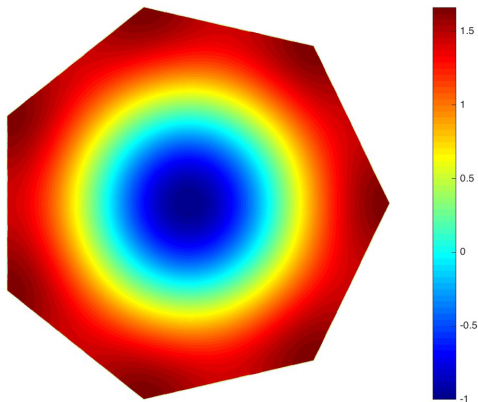


Figure: Lignes de niveau de  $\frac{w_{6,D}}{w_{1,D}}$  pour le problème de Dirichlet dans le cas d'un heptagone régulier

## Bibliography.



V. Arnold.

The topology of real algebraic curves (the works of Petrovskii and their development).

Uspekhi Math. Nauk. 28:5 (1973), 260–262.



V. Arnold.

Topological properties of eigenoscillations in mathematical physics.

Proc. Steklov Inst. Math. 273 (2011), 25–34.



L. Bauer and E.L. Reiss.

Cutoff Wavenumbers and Modes of Hexagonal Waveguides.

SIAM Journal on Applied Mathematics, 35:3 (1978), 508–514.



P. Bérard.

Spectres et groupes cristallographiques.

Inventiones Math. 58 (1980), 179–199.

BH-sturm P. Bérard and B. Helffer.

Sturm-Liouville eigenvalue problem, Sturm's theorems.

[ArXiv 2017.](#)



[P. Bérard and B. Helffer.](#)

Courant-sharp eigenvalues for the equilateral torus, and for the equilateral triangle.

[Letters in Math. Physics 106 \(2016\).](#)



[P. Bérard and B. Helffer.](#)

On Courant's nodal domain property for linear combinations of eigenfunctions.

[ArXiv and submitted.](#)



[P. Bérard and B. Helffer.](#)

More counterexamples to the Extended Courant Property.

[ArXiv.](#)



[R. Courant and D. Hilbert.](#)

Methoden der mathematischen Physik, Vol. I.

[Springer 1931.](#)



[R. Courant and D. Hilbert.](#)

Methods of mathematical physics. Vol. 1.

First english edition. Interscience, New York 1953.



M. Dauge and B. Helffer.

Eigenvalues variation II. Multidimensional problems.

J. Diff. Eq. 104 (1993), 263–297.



G. Gladwell and H. Zhu.

The Courant-Herrmann conjecture.

ZAMM - Z. Angew. Math. Mech. 83:4 (2003), 275–281.



B. Helffer and T. Hoffmann-Ostenhof and S. Terracini.

Nodal domains and spectral minimal partitions.

Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 26 (2009), 101–138.



B. Helffer and T. Hoffmann-Ostenhof and S. Terracini

On spectral minimal partitions: the case of the sphere.

In *Around the Research of Vladimir Maz'ya III*.

International Math. Series, Springer, Vol. 13, p. 153–178  
(2010).



B. Helffer and M. Persson-Sundqvist.

On nodal domains in Euclidean balls.

ArXiv:1506.04033v2. Proc. Amer. Math. Soc. 144 (2016), no. 11, 4777–4791.



H. Herrmann.

Beiträge zur Theorie der Eigenwerte und Eigenfunktionen.  
Göttingen Dissertation 1932.  
Published by Teubner.



H. Herrmann.

Beziehungen zwischen den Eigenwerten und Eigenfunktionen  
verschiedener Eigenwertprobleme.  
Math. Z. 40:1 (1936), 221–241.



T. Kato.

Perturbation Theory for Linear Operators.  
Second edition. Springer 1977.



N. Kuznetsov.

On delusive nodal sets of free oscillations.  
*Newsletter of the European Mathematical Society*, **96** (2015).





R. Laugesen and B. Siudeja.

Sharp spectral bounds on starlike domains.

*J. Spectral Theory* 4:2 (2014), 309–347.



J. Leydold.

On the number of nodal domains of spherical harmonics.

PHD, Vienna University (1992).



J. Leydold.

On the number of nodal domains of spherical harmonics.

*Topology* 35 (1996), 301–321.



J.B. McCartin.

Eigenstructure of the Equilateral Triangle, Part I: The Dirichlet Problem.

*SIAM Review*, 45:2 (2003), 267–287.



J.B. McCartin.

Eigenstructure of the Equilateral Triangle, Part II: The Neumann Problem.



J.B. McCartin.

On Polygonal Domains with Trigonometric Eigenfunctions of the Laplacian under Dirichlet or Neumann Boundary Conditions.

Applied Mathematical Sciences, Vol. 2, 2008, no. 58, 2891 - 2901.



Å. Pleijel.

Remarks on Courant's nodal theorem.

*Comm. Pure. Appl. Math.* **9** (1956), 543–550.



B. Siudeja.

On mixed Dirichlet-Neumann eigenvalues of triangles.

*Proc. Amer. Math. Soc.* **144** (2016) 2479–2493.



B. Siudeja.

Nearly radial Neumann eigenfunctions on symmetric domains.

To appear in *JST* (2017).



C. Sturm.

[No title].

L'institut. Journal général des sociétés et travaux scientifiques de la France et de l'étranger. 1 (1833), 247–248.



C. Sturm.

Mémoire sur une classe d'équations à différences partielles.  
Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **1** (1836),  
373–444.



O. Viro.

Construction of multi-component real algebraic surfaces.  
Soviet Math. dokl. 20:5 (1979), 991–995.