DÉMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE DANI WISE (D'APRÈS IAN AGOL)

NICOLAS BERGERON

Contents

1. Introduction 1
2. Hiérarchies quasi-convexes 1
3. Travaux de Wise 2
4. Démonstration du théorème 1.1 5
5. Démonstration du théorème 4.9 10
References 11

1. Introduction

Dans ces notes on explique comment, en se basant sur des travaux de Dani Wise que nous admettrons, Ian Agol démontre le théorème suivant.

1.1. **Théorème** (Conjecture de Wise). *Soit G un groupe hyperbolique qui opère proprement sur un complexe cubique $CAT(0)$ X avec quotient compact. Il existe un sous-groupe $G' < G$ d'indice fini tel que quotient $G' \backslash X$ soit spécial.*

Lorsque la conclusion du théorème est satisfaite on dit que G est *virtuellement spécial.*[1]

1.2. **Notation.** Si H et G sont deux groupes, la notation $H \dot{<} G$, resp. $H \dot{\lhd} G$, signifie que H est un sous-groupe d'indice fini, resp. distingué et d'indice fini, dans G.

2. Hiérarchies quasi-convexes

On rappel qu'un sous-groupe H d'un groupe hyperbolique G est dit *quasi-convexe* si pour une (ou de manière équivalente pour toute) partie génératrice finie $S \subset G$, il existe un réel λ strictement positif tel que, dans le graphe de Cayley $\Gamma(G, S)$, toute géodésique entre deux points de H est contenue dans le λ-voisinage de H.

2.1. **Définition** (Hiérarchie quasi-convexe). On note QVH la plus petite collection de groupes hyperboliques qui est fermée sous les opérations suivantes :

(1) $1 \in$ QVH;
(2) si $G = A *_B C$, avec B sous-groupe, de type fini, quasi-convexe dans G et $A, C \in$ QVH, alors $G \in$ QVH;

Membre de l'Institut Universitaire de France.

[1] On prendra garde au fait que dans la terminologie de Wise G est dit virtuellement *compact* spécial.

(3) si $G = A*_B$, avec B sous-groupe, de type fini, quasi-convexe dans G et $A \in$ QVH, alors $G \in$ QVH;
(4) si G contient un sous-groupe d'indice fini H tel que $H \in$ QVH, alors $G \in$ QVH.

2.2. *Remarques.* 1. La classe QVH est une généralisation de la classe des groupes fondamentaux de 3-variétés virtuellement Haken.

2. Si G est un groupe hyperbolique qui opére proprement sur un complexe cubique CAT(0) X avec quotient compact et spécial, les stabilisateurs d'hyperplans (qui sont plongés dans $G\backslash X$) sont quasi-convexes et induisent une hiérarchie quasi-convexe. En particulier tout groupe hyperbolique virtuellement spécial appartient à la classe QVH. Le principal résultat de la prépublication [8] est la démonstration de la réciproque :[2]

2.3. Théorème. *Soit G un groupe hyperbolique. Le groupe G est virtuellement spécial si et seulement si $G \in$ QVH.*

Avant d'expliquer la démonstration du théorème 1.1 je vais commencer par donner quelques idées de la démonstration du théorème 2.3 en énonçant quelques résultats intermédiaires que seront utiles par la suite.

3. Travaux de Wise

Le théorème 2.3 est difficile. Commençons par décrire les résultats que Wise avait précédemment obtenus avec ses co-auteurs, Frédéric Haglund d'un côté et Tim Hsu d'un autre.

3.1. Hiérarchies quasi-convexes presque malnormal. Soit G un groupe hyperbolique. Rappelons qu'un sous-groupe H de G est *presque malnormal* si pour tout élément $g \in G - H$, l'intersection $H^g \cap H$ est finie. Ici $H^g = gHg^{-1}$.

3.2. Définition. On note QMVH la plus petite collection de groupes qui est fermée sous les opérations suivantes :

(1) $1 \in$ QMVH;
(2) si $G = A *_B C$, avec B sous-groupe, de type fini, quasi-convexe et presque malnormal dans G et $A, C \in$ QMVH, alors $G \in$ QMVH;
(3) si $G = A*_B$, avec B sous-groupe, de type fini, quasi-convexe et presque malnormal dans G et $A \in$ QMVH, alors $G \in$ QMVH;
(4) si G contient un sous-groupe d'indice fini H tel que $H \in$ QMVH, alors $G \in$ QMVH.

Le théorème suivant, théorème 11.2 de [8], découle de Haglund-Wise [5] et Hsu-Wise [6].

3.3. Théorème. *Un groupe G appartient à la classe* QMVH *si et seulement si G est hyperbolique et virtuellement spécial.*

Noter qu'il découle du théorème de combinaison de Bestvina et Feighn [3] qu'un groupe G dans la classe QMVH est hyperbolique.

[2] Wise ne démontre ce théorème que dans le cas où G possède un sous-groupe d'indice fini sans torsion, le cas général est démontrée par Agol, Groves et Manning [1].

3.4. Cherchons maintenant à expliquer les grandes lignes de la démonstration du théorème 2.3. Considérons, pour simplifier, le cas où

$$G = A *_C B$$

avec A, B virtuellement spéciaux et C quasi-convexe dans G.[3] Très grossièrement, la stratégie de démonstration du théorème 2.3 consiste à se ramener au théorème 3.3 par récurrence sur la hauteur de C. Rappelons que si H est un sous-groupe d'un groupe G, les conjugués $H^{g_1}, \ldots, H^{g_n}$ de H par n éléments $g_1, \ldots, g_n$ sont *essentiellement distincts* si $Hg_i \neq Hg_j$ pour tous $i \neq j$. Si H est infini, la *hauteur* de H dans G est le nombre maximal n de conjugués $H^{g_1} = H, \ldots, H^{g_n}$ essentiellement distincts tels que pour tout j l'intersection $H \cap H^{g_j}$ est infini. Par convention, la hauteur d'un groupe fini est nulle. Notons qu'un sous-groupe est de hauteur égale à 1 si et seulement s'il est presque malnormal.

La notion de hauteur est une version algébrique de la propriété des k-plans de Scott, qui dit que parmi k relevés distincts d'une surface immergée dans une 3-variété à son revêtement universel, au moins deux sont disjoints. Le principal résultat de [4] est qu'un sous-groupe quasi-convexe d'un groupe hyperbolique est de hauteur finie. En particulier, les surfaces quasi-fuchsiennes d'une 3-variété hyperbolique ont la propriétés des k-plans pour un certain k.

3.5. Montrons comment utiliser la notion de hauteur dans le cas simple où le groupe C est supposé *séparable* dans G.

Si C est de hauteur ≤ 1 alors C est malnormal et le théorème 3.3 implique le théorème 2.3.

En général la hauteur de C est finie et il existe un ensemble fini maximal de conjugués essentiellement distincts $C, C^{g_1}, \ldots, C^{g_k}$ tels que

$$|C \cap C^{g_i}| = \infty, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Puisque C est séparable dans G, il existe un sous-groupe G' distingué et d'indice fini dans G tel que

$$g_i \notin G', \quad i = 1, \ldots, k.$$

Le groupe G' est le groupe fondamental d'un graphe de groupes dont les groupes de sommets sont isomorphes à $A \cap G'$ ou $B \cap G'$ et les groupes d'arêtes sont isomorphes à $C \cap G'$. Mais maintenant les groupes d'arêtes sont *presque malnormaux*. Le théorème 3.3 implique donc encore le théorème 2.3.

3.6. Bien sûr on ne sait pas *a priori* que le groupe C est séparable dans G. C'est même toute la difficulté du problème. On contourne cette difficulté en construisant des quotients infinis dans lesquels C se projette sur un groupe de hauteur strictement plus petite à l'aide du théorème suivant.

On suppose toujours que

$$G = A *_C B$$

avec A, B virtuellement spéciaux et C quasi-convexe dans G. Et, comme audessus, on fixe un ensemble fini maximal de conjugués essentiellement distincts $C, C^{g_1}, \ldots, C^{g_k}$ tels que

$$|C \cap C^{g_i}| = \infty, \quad i = 1, \ldots, k.$$

[3] Le cas des extensions HNN est essentiellement similaire.

3.7. Théorème (Wise)**.** *Il existe un quotient $\bar G = \bar A *_{\bar C} \bar B$ de G, avec $\bar G$ hyperbolique, $\bar A, \bar B$ virtuellement spéciaux et $\bar C$ quasi-convexe de hauteur dans $\bar G$ strictement inférieur à la hauteur de C dans G, tel que l'image de g_i $(i = 1, \dots, k)$ dans $\bar G$ n'appartiennent pas à $\bar C$.*

Par récurrence sur la hauteur on peut alors supposer que $\bar C$ est séparable dans $\bar G$ et on conclut la démonstration du théorème 3.3 comme au paragraphe précédent.

Il n'est pas question de démontrer le théorème 3.7 ici. On se contentera d'énoncer l'ingrédient fondamental (MSQT)[4] pour construire des quotients qui est aussi le résultat technique principal de la prépublication de Wise [8].

3.8. Définition. Soient $H_1, \dots, H_m$ des sous-groupes d'un groupe G. On dit que les H_i forment une *collection presque malnormale* si

$$|H_i^g \cap H_j| = \infty \Rightarrow (i = j \text{ et } g \in H_i).$$

3.9. Théorème (MSQT)**.** *Soient G un groupe hyperbolique virtuellement spécial et $\{H_1, \dots, H_m\}$ une collection presque malnormale de sous-groupes quasi-convexes. Il existe alors des sous-groupes $\dot H_i \dot\triangleleft H_i$ tels que pour tous sous-groupes $H_i' < \dot H_i$, $i = 1, \dots, n$, le groupe quotient*

$$\bar G = G/ \ll H_1', \dots, H_m' \gg$$

est hyperbolique et virtuellement spécial.

Exemples. 1. Comme cas particulier de ce théorème on notera que si

$$\langle a_1, \dots, a_s \big| w_1, \dots, w_r \rangle$$

est un groupe de présentation finie, il existe des entiers $n_1, \dots, n_r$ tels que pour tout entier $k \geq 1$, le groupe

$$\langle a_1, \dots, a_s \big| w_1^{kn_1}, \dots, w_r^{kn_r} \rangle$$

est hyperbolique et virtuellement spécial (en particulier résiduellement fini).

2. Dans le même esprit on montre dans [2] qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que si M est une 3-variété compacte orientable qui est un revêtement ramifié de $\mathbb{S}^3$, ramifié au-dessus du nœud de huit et dont tous les indices de ramification sont égaux à un même entier pair $n \geq n_0$, alors le groupe fondamental de M est virtuellement spécial. On peut penser au MSQT[5] comme à une (très) vaste généralisation de ce résultat sur les remplissages de Dehn.

Comme conséquence du théorème 3.9 , Agol, Groves et Manning [1] démontrent le théorème suivant qui est le point de départ de la démonstration du théorème 1.1.

3.10. Théorème (Agol-Groves-Manning)**.** *Soient G un groupe hyperbolique et H un sous-groupe quasi-convexe virtuellement spécial. Pour tout élément $g \in G - H$, il existe un quotient $\varphi : G \to \bar G$ tel que $\varphi(g) \notin \varphi(H)$ et $\varphi(H)$ est fini.*

Remarque. Le groupe H est séparable si et seulement si on peut prendre $\bar G$ fini.

Dans la suite, on admet le théorème 3.10 et on explique comment en déduire le théorème 1.1.

---

[4] L'acronyme fait référence à *Malnormal Special Quotient Theorem.*

[5] Après extension au cas relativement hyperbolique, cf. [8].

4. Démonstration du théorème 1.1

Soit G un groupe hyperbolique qui opère proprement sur un complexe cubique CAT(0) X avec quotient compact.

4.1. Un complexe cubique à hyperplans compacts. Soit $\{W_1, \dots, W_m\}$ un ensemble de représentants des G-classes d'hyperplans dans X. Par récurrence (sur la dimension maximale d'un cube) on peut supposer que chaque

$$G_{W_i} = \mathrm{Stab}_G(W_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

est virtuellement spécial.

Par quasi-convexité des stabilisateurs d'hyperplans, il existe en outre un réel R strictement positif tel que : *si W et W' sont deux hyperplans de X tels que si W et W' sont à distance $d(W, W') > R$ dans X alors $|G_W \cap G_{W'}| < +\infty$.* Dans la suite on fixe un tel R.

Le théorème 3.10 implique facilement la proposition suivante.

4.2. Proposition. *Il existe un quotient $\phi : G \to \mathcal{G}$ tel que, en notant $K = \mathrm{Ker}\phi$, on a :*

(1) *le groupe K est sans torsion et le quotient $\mathcal{X} = X/K$ est un complexe cubique à courbure négative dont le 1-squelette $\mathcal{X}^{(1)}$ ne contient aucun lacet fermé;*
(2) *pour tout $i = 1, \dots, m$, le groupe $G_{W_i} \cap K$ opère avec quotient compact sur W_i et préserve la co-orientation de W_i dans X;*
(3) *pour tout $i = 1, \dots, m$, la projection de revêtement $X \to X/K$ induit un* plongement
$$V_R(W_i)/(G_{W_i} \cap K) \to \mathcal{X},$$
où $V_R(W_i)$ est le R-voisinage de W_i dans X.

Proof. C'est une application classique de la séparabilité (ici étendu au cas de quotient infini) : pour tout $i = 1, \dots, m$, on considère l'ensemble *fini*

$$\mathcal{A}_i = \{G_{W_i} g G_{W_i} \mid d(gW_i, W_i) \leq 2R\}.$$

Si $m = 1$ et g est un élément de G tel que $G_{W_1} g G_{W_1} \in \mathcal{A}_1$ alors il découle du théorème 3.10 qu'il existe un quotient $\phi_g : G \to \mathcal{G}_g$ tel que

$$\phi_g(g) \notin \phi(G_{W_1}) \text{ et } \phi_g(G_{W_1}) \text{ est fini.}$$

En général, l'idée est la même sauf que, pour chaque $i = 1, \dots, m$, si g est un élément de G tel que $G_{W_i} g G_{W_i} \in \mathcal{A}_i$ on introduit un groupe

$$H_i = \langle G_{W_1}^{g_1}, \dots, G_{W_i}, \dots, G_{W_m}^{g_m} \rangle$$

où les g_j $(j \neq i)$ sont choisis de sorte que H_i soit quasi-convexe, isomorphe au groupe *virtuellement spécial*

$$G_{W_1}^{g_1} * \dots * G_{W_i} * \dots * G_{W_m}^{g_m}$$

et tel que $g \notin H_i$. On peut alors appliquer le théorème 3.10 pour obtenir un quotient $\phi_g : G \to \mathcal{G}_g$ tel que

$$\phi_g(g) \notin \phi(H_i) \text{ et } \phi_g(H_i) \text{ est fini.}$$

L'intersection (finie) des noyaux de tels morphismes associées à un choix de représentants des doubles classes dans les ensembles $\mathcal{A}_i$ fournit un sous-groupe K comme dans le 3. Les deux autres point se vérifient facilement de la même manière. $\square$

4.3. On fixe $\mathcal{X}$ dans toute la suite de la démonstration; le groupe $\mathcal{G}$ opère cocompactement sur $\mathcal{X}$ et

$$\mathcal{X}/\mathcal{G} = X/G.$$

Tous les hyperplans de $\mathcal{X}$ sont compacts et localement séparants. Ils découpent la première subdivision barycentrique $\dot{\mathcal{X}}$ en *polyèdres cubiques*, c'est-à-dire un complexe cubique CAT(0) P avec un sommet $v \in P^{(0)}$ qui est contenu dans tout cube maximal de P. Soient $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ l'ensemble des polyèdres cubiques ainsi obtenus et $\{P_1, \dots, P_p\}$ un choix de représentants des $\mathcal{G}$-classes déquivalences de ces polyèdres cubiques. On appelle *face* F d'un polyèdre $P \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ toute intersection (maximale) non-vide de P avec un hyperplan W de $\mathcal{X}$; on note $W(F) = W$ l'hyperplan qui supporte une face.

Nous allons construire un revêtement de $G\backslash X$ en recollant un nombre fini de polyèdres de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ le long de leurs faces. Pour cela nous allons voir la réunion des polyèdres de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ comme le résultat d'un découpage selon une hiérarchie.

4.4. Hiérarchies cubiques. Soit $\Gamma(\mathcal{X})$ le graphe dont les sommets sont les hyperplans de $\mathcal{X}$ et dont deux sommets W, W' sont liés par une arête si et seulement si $d(W, W') \leq R$. On a une action naturelle de $\mathcal{G}$ sur $\Gamma(\mathcal{X})$.

Le graphe $\Gamma(\mathcal{X})$ est de valence borné; fixons un entier k strictement supérieur à la valence de $\Gamma(\mathcal{X})$. Un *k-coloriage* de $\Gamma(\mathcal{X})$ est une application

$$c : \mathrm{Sommet}(\Gamma(\mathcal{X})) \to \{1, \dots, k\}$$

telle que pour toute arête (W, W') de $\Gamma(\mathcal{X})$, on a : $c(W) \neq c(W')$. On note $C_k(\mathcal{X})$ l'ensemble des k-coloriages que l'on munit de la restriction de la topologie produit sur $\{1, \dots, k\}^{\mathrm{Sommet}(\Gamma(\mathcal{X}))}$.

À tout k-coloriage $c \in C_k(\mathcal{X})$, il correspond une *hiérarchie* : on coupe d'abord $\dot{\mathcal{X}}$ selon les hyperplans coloriés par 1, puis par selon ceux coloriés par 2, *etc.*.. Étant donné un coloriage c et un hyperplan W de $\mathcal{X}$ on raffine la couleur $c(W)$ de W en une *supercouleur* définie inductivement : si $c(W) = j$ on veut aussi de "souvenir" des découpages de W induits par les hyperplans coloriés par une couleur $< j$ ainsi que de leurs supercouleurs.

4.5. Définition. Soit W un hyperplan de $\mathcal{X}$. Une *supercouleur* sur W est une classe d'équivalence $[c] \in C_k(\mathcal{X})/\simeq_W$ où $\simeq_W$ est telle que

$$c_1 \simeq_W c_2 \Rightarrow c_1(W) = c_2(W)$$

et définie par le procédé récursif suivant.

- **1:** On a $c_1 \simeq_W c_2$ si $c_1(W) = c_2(W) = 1$.
- **2:** On a $c_1 \simeq_W c_2$ si $c_1(W) = c_2(W) = 2$ et si pour tout hyperplan W' tel que $(W, W') \in \mathrm{Arete}(\Gamma(\mathcal{X}))$ on a $c_1(W') = 1 \Leftrightarrow c_2(W') = 1$.

  $\vdots$
- **j:** On a $c_1 \simeq_W c_2$ si $c_1(W) = c_2(W) = j$, avec $2 \leq j \leq k$, et si pour tout hyperplan W' tel que $(W, W') \in \mathrm{Arete}(\Gamma(\mathcal{X}))$, on a $c_1 \simeq_{W'} c_2$ si $c_1(W') < j$ ou $c_2(W') < j$.

4.6. Définition. Soit P un polyèdre cubique dans $\mathcal{P}(\mathcal{X})$. Un *supercoloriage* de P est une classe d'équivalence $[c] \in C_k(\mathcal{X})/\simeq_P$ où $c_1 \simeq_P c_2$ si pour toute face F de P, on a $c_1 \simeq_{W(F)} c_2$.

4.7. Recollement (virtuel) de la hiérarchie. Un *poids* est une application

$$\omega : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \times C_k(\mathcal{X}) \to \mathbb{N}$$

qui vérifie :

(1) Pour tout $g \in \mathcal{G}$, on a $\omega(g \cdot (P, c)) = \omega(P, c)$.
(2) L'entier $\omega(P, c)$ ne dépend que du supercoloriage de P induit par c, c'est-à-dire de la classe d'équivalence $[c] \in C_k(\mathcal{X})/\simeq_P$.

En particulier : un poids est déterminé par l'ensemble *fini* de ses valeurs en les points $(P_j, [c])$, avec $j = 1, \ldots, p$ et $[c] \in C_k(\mathcal{X})/\simeq_{P_j}$.

4.8. Définition. Un poids ω vérifie les *équations de recollement* si pour toute paire de polyèdres cubiques $(P, P') \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ s'intersectant selon un face F et pour toute supercouleur $[c] \in C_k(\mathcal{X})/\simeq_{W(F)}$ sur l'hyperplan $W(F)$, on a :

$$\sum_{\substack{[d]\in C_k(\mathcal{X})/\simeq_P \\ d \simeq_{W(F)} c}} \omega(P, d) = \sum_{\substack{[d']\in C_k(\mathcal{X})/\simeq_{P'} \\ d' \simeq_{W(F)} c}} \omega(P', d').$$

On repousse à section 5 la démonstration du théorème suivant.

4.9. Théorème. *Il existe un poids Ω non nul qui vérifie les équations de recollement.*

On explique maintenant comment reconstruire un complexe cubique compact à partir de la solution Ω.

Pour tout $j = 1, \ldots, p$ et pour tout supercoloriage $[c] \in C_k(\mathcal{X})/\simeq_{P_j}$, on se donne $\Omega(P_j, c)$ copies du polyèdre cubique P_j avec son supercoloriage $[c]$. On note $\mathcal{V}_k$ le complexe cubique obtenu comme réunion disjointe de tous ces polyèdres.

On commence par former un complexe cubique $\mathcal{V}_{k-1}$ en recollant les polyèdres de $\mathcal{V}_k$ le long de faces F de même supercouleur $[c]$ telle que $c(W(F)) = k$. C'est possible puisque Ω vérifie les équations de recollement. À l'issue de cette première étape on obtient un complexe cubique à bord (et à coins) réunion de faces des polyèdres de $\mathcal{V}_{k-1}$. Chacune de ces faces à une couleur (strictement inférieure à k) on note $\partial_{k-1}\mathcal{V}_{k-1}$ la réunion des faces de couleur $k-1$. Comme pour la première étape on voudrait maintenant recoller $\mathcal{V}_{k-1}$ le long de $\partial_{k-1}\mathcal{V}_{k-1}$ mais il n'y a cette fois plus aucune raison que l'on puisse le faire, voir figure 1. Noter que tout cube maximal de $\partial_{k-1}\mathcal{V}_{k-1}$ est naturellement équipé d'une *co-orientation*, qui pointe vers le cube adjacent dans $\mathcal{V}_{k-1}$.

4.10. Pour contourner cette difficulté on introduit le complexe

$$\mathcal{Y}_{k-1} = \bigsqcup_{W} \bigsqcup_{\substack{[c]\in C_k(\mathcal{X})/\simeq_W \\ c(W)=k-1}} W^c/\mathrm{Stab}_{\mathcal{G}}(W, [c]),$$

où la première union porte sur un ensemble de représentants des $\mathcal{G}$-orbites d'hyperplans de $\mathcal{X}$, W^c est le complexe cubique obtenu à partir de $\dot{W}$ en le séparant selon les hyperplans de W de couleurs $1, \ldots, k-2$, et

$$\mathrm{Stab}_{\mathcal{G}}(W, [c]) = \left\{ g \in \mathcal{G}_W \mid [c \circ g^{-1}] = [c] \right\}.$$

4.11. Proposition. *Le complexe cubique $\partial_{k-1}\mathcal{V}_{k-1}$ revêt naturellement $\mathcal{Y}_{k-1}$ avec un degré total égal à 0, c'est-à-dire que pour tout cube maximal C de $\mathcal{Y}_{k-1}$, le nombre de cubes maximaux de $\partial_{k-1}\mathcal{V}_{k-1}$ qui revêtent C et ont une co-orientation*

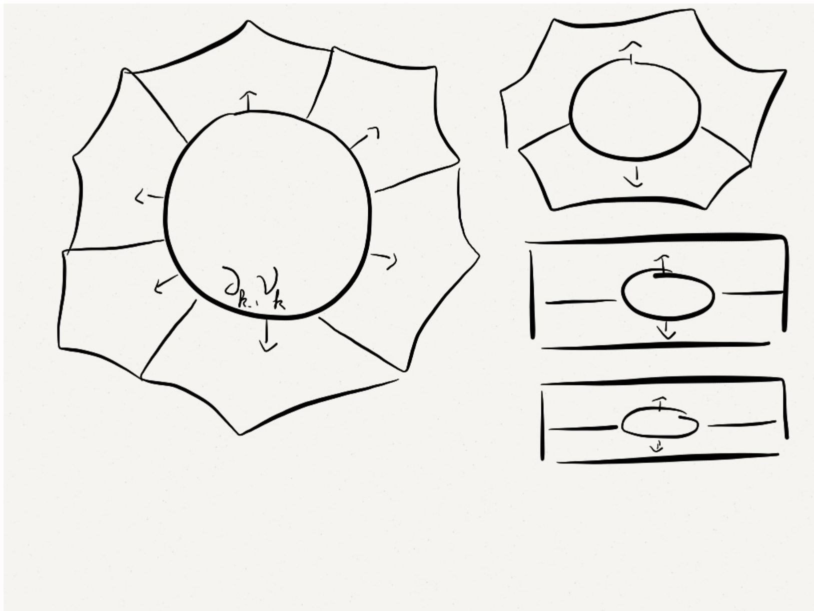

FIGURE 1

fixée est égal au nombre de cubes maximaux de $\partial_{k-1}\mathcal{V}_{k-1}$ qui revêtent C et ont la co-orientation opposée.

Proof. Chaque face F contenue dans $\partial_{k-1}\mathcal{V}_{k-1}$ est naturellement munie d'une supercouleur $[c]$ et donc d'une projection naturelle dans $W^c/\mathrm{Stab}_{\mathcal{G}}(W,[c])$, où $W = W(F)$. Il s'agit, dans un premier temps, de vérifier que l'on peut étendre cette application en une projection de revêtement $\pi : \partial_{k-1}\mathcal{V}_{k-1} \to \mathcal{Y}_{k-1}$.

Considérons pour cela deux faces F_1 et F_2 de couleur $k-1$ et adjacentes dans $\partial_{k-1}\mathcal{V}_{k-1}$. Il correspond à chacune d'entre elles un polyèdre cubique de $\mathcal{V}_k$; polyèdres que l'on peut relever dans $\dot{\mathcal{X}}$ en deux polyèdres cubiques supercoloriés $(P_1,[d_1])$ et $(P_2,[d_2])$. Quitte à translater l'un de ces polyèdres par un élément de $\mathcal{G}$, on peut en outre s'arranger pour être dans la situation suivante :

(1) Les polyèdres P_1 et P_2 sont adjacents selon une face Φ telle que les supercouleurs induites $[d_1]$ et $[d_2] \in C_k(\mathcal{X})/\simeq_{W(\Phi)}$ coïncident et vérifient $d_1(W(\Phi)) = d_2(W(\Phi)) = k$.
(2) Les hyperplans $W(F_1)$ et $W(F_2)$ s'intersectent selon $W(F_1) \cap W(\Phi) = W(F_2) \cap W(\Phi)$.

(Voir figure 2.)

Puisque $[d_1] = [d_2]$ dans $C_k(\mathcal{X})/\simeq_{W(\Phi)}$ et que

$$d_1(W(\Phi)) = d_2(W(\Phi)) = k > k-1 = d_1(W(F_1)),$$

on a $[d_1] = [d_2]$ dans $C_k(\mathcal{X})/\simeq_{W(F_1)}$. En particulier d_1 attribue la même couleur aux hyperplans $W(F_1)$ et $W(F_2)$ qui, puisqu'ils s'intersectent, doivent donc coïncider : $W(F_1) = W(F_2) = W$. On a donc $[d_1] = [d_2]$ dans $C_k(\mathcal{X})/\simeq_W$ et l'application π définie sur chacune des faces F_1 et F_2 s'étend à $F_1 \cup F_2$.

Montrons maintenant que π est de degré total égal à 0.

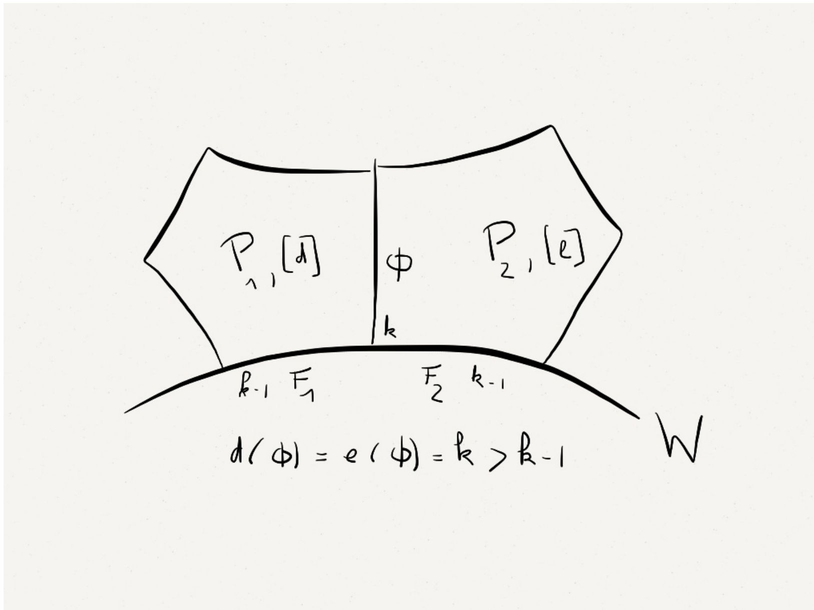

FIGURE 2

4.12. Fait. *Soient F une face de l'un des polyèdres cubiques de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, $W = W(F)$ l'hyperplan qui la contient et $[c] \in C_k(\mathcal{X})/\simeq_W$ une supercouleur sur W. Alors, la $\mathcal{G}$-orbite de $(F,[c])$ n'apparaît qu'une fois dans $W^c/\mathrm{Stab}_{\mathcal{G}}(W,[c])$.*

Proof. Si g est un élément de $\mathcal{G}$ tel que $g(F,[c])$ apparaît dans W^c, alors en particulier $W(g(F)) = W$ et $[c \circ g^{-1}] = [c] \in C_k(\mathcal{X})/\simeq_W$. On en conclut que $g \in \mathrm{Stab}_{\mathcal{G}}(W,[c])$. □

Les équations de recollement impliquent alors qu'étant donnée une face supercoloriée $(F,[c])$ dans $\mathcal{Y}_{k-1}$, on trouve dans $\mathcal{V}_k$ autant de polyèdres cubiques d'un côté de $\pi^{-1}(F)$ que de l'autre. □

4.13. Conclusion de la démonstration du théorème 1.1. Le complexe cubique (compact) $\mathcal{V}_{k-1}$ a une hiérarchie quasi-convexe naturelle; son groupe fondamental F est donc (virtuellement) spécial. Puis, par définition du graphe $\Gamma(\mathcal{X})$, à une collection d'hyperplans de même couleur correspond la collection *presque malnormale* des stabilisateurs de ces hyperplans. On peut donc appliquer le MSQT au groupe F et la collection $S_1, \dots, S_m$ des stabilisateurs des hyperplans de couleur $k-1$. On peut ainsi trouver des sous-groupes $S_i' \triangleleft S_i$, correspondant à un *même* revêtement régulier $\Upsilon_{k-1} \to \mathcal{Y}_{k-1}$, tels que le quotient

$$\bar{H} = H/ \ll S_1', \dots, S_m' \gg$$

soit virtuellement spécial. Le groupe $\bar{H}$ est en particulier résiduellement fini et un quotient fini permet de séparer les représentants non triviaux des classes S_i/S_i'. On obtient ainsi un revêtement $\widehat{\mathcal{V}}_{k-1}$ de $\mathcal{V}_{k-1}$ tel que toutes les composantes connexes de $\partial_{k-1}\widehat{\mathcal{V}}_{k-1}$ induisent un même revêtement régulier de $\mathcal{Y}_{k-1}$.

On peut alors coller les composantes de $\partial_{k-1}\widehat{\mathcal{V}}_{k-1}$ par paires (avec co-orientations opposées) pour obtenir un nouveau complexe $\mathcal{V}_{k-2}$ dont tous les hyperplans portent une couleur $< k-1$. On continue par récurrence jusqu'à obtenir un complexe compact $\mathcal{V}_0$, avec une hiérarchie quasi-convexe, qui revêt finiment X/G. Le théorème 2.3 permet alors de conclure.

5. Démonstration du théorème 4.9

Nous allons déduire le théorème 4.9 du résultat général suivant.

5.1. Proposition. *Soient Γ un graphe de valence bornée strictement inférieure à k et G un groupe qui opère sur Γ avec quotient compact. Alors, il existe une mesure de probabilité G-invariante sur l'espace $C_k(\Gamma)$ des k-coloriages de Γ.*

Proof. [6] On appelle *coloriage faible* à n couleurs un élément de

$$[n]^{\Gamma^{(0)}} = \{1, \dots, n\}^{\mathrm{Sommet}(\Gamma)}.$$

Soient $e_1, \dots, e_m$ un choix de représentants des G-orbites d'arêtes du graphes Γ. On définit alors le *poids* d'un coloriage faible comme étant le nombre d'arêtes e_i dont les points terminaux ont la même couleur. Le poids s'étend linéairement en une fonction sur l'espace des mesures de probabilité sur l'espace des coloriages faibles; une mesure de probabilité G-invariante sur l'espace des k-coloriages faibles qui est de poids nul induit une mesure de probabilité G-invariante sur $C_k(\Gamma)$.

Soit μ_n la mesure uniforme sur $[n]^{\Gamma^{(0)}}$ (produit des mesures uniformes sur $[n]$). Le mesure μ_n est G-invariante et, si e est un arête de Γ d'extrémités u et v, on a :

$$\mu_n \left\{ c \in [n]^{\Gamma^{(0)}} \mid c(u) = c(v) \right\} = \frac{1}{n}$$

de sorte que le poids de μ_n est m/n.

Pour $n > k$, il existe une application $p_n : [n]^{\Gamma^{(0)}} \to [n-1]^{\Gamma^{(0)}}$ qui à un n-coloriage faible associe le $(n-1)$-coloriage faible qui change la couleur d'un sommet de couleur n en l'entier le plus petit qui ne soit pas déjà la couleur d'un sommet adjacent : $p_n(c)(v) = c(v)$, si $c(v) < n$, et

$$p_n(c)(v) = \min(\{1, \dots, n-1\} - \{c(u) \mid (u, v) \in \mathrm{Arete}(\Gamma)\}), \text{ si } c(v) = n.$$

(Voir figure 3.)

L'application p_n est G-équivariante et si ν est une mesure sur $[n]^{\Gamma^{(0)}}$, la mesure $(p_n)_*(\nu)$ a un poids inférieur au poids de ν. Considérons donc la mesure

$$\nu_n := (p_{k+1})_* \dots (p_n)_*(\mu_n).$$

C'est une mesure de probabilité G-invariante sur $[k]^{\Gamma^{(0)}}$ qui est de poids $\leq m/n$. En prenant une limite faible de la suite (ν_n) on obtient une mesure de probabilité G-invariante sur l'espace des k-coloriages faibles qui est de poids nul et induit donc une mesure de probabilité G-invariante sur $C_k(\Gamma)$. $\square$

[6] Après qu'Agol ait donné la démonstration suivante de la proposition, Lewis Bowen lui a indiqué que la proposition est aussi conséquence des travaux de Kechris, Solecki et Todorocevic [7] sur les coloriages de graphes de Borel.

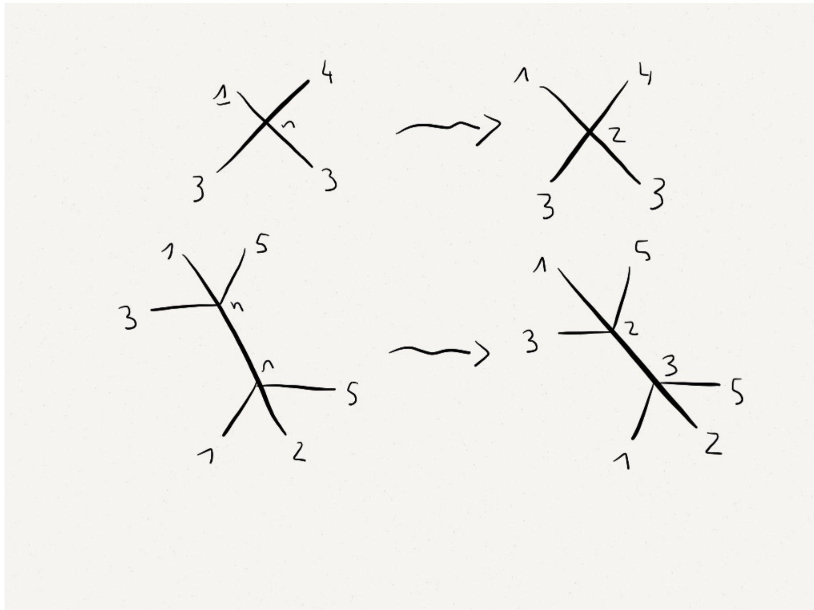

FIGURE 3. L'application p_n

5.2. On peut maintenant conclure la démonstration du théorème 4.9 : la proposition 5.1 fournit une mesure $\mathcal{G}$-invariante μ sur l'espace $C_k(\Gamma(\mathcal{X}))$. Or une telle mesure définit une solution *réelle* non triviale aux équations de recollement en prenant comme poids $\omega(P, c)$ pour un polyèdre supercolorié $(P, [c])$ la mesure

$$\mu(\{d \in C_k(\Gamma(\mathcal{X})) \mid d \simeq_P c\})$$

de l'ensemble des k-coloriages de $\Gamma(\mathcal{X})$ qui induisent le supercoloriage $[c]$ de P. Par additivité de μ on vérifie que l'on obtient ainsi une solution non triviale, et dans $\mathbb{R}_+$, des équations de recollement. Mais, par $\mathcal{G}$-invariance, une solution aux équations de recollement est déterminée par un nombre fini d'équations à coefficients entiers, il existe donc un poids non nul Ω (à valeurs entières) qui vérifie les équations de recollement.

References

[1] I. Agol, D. Groves et J. Manning – "The virtual Haken conjecture", *ArXiv e-prints* (2012), math.GT 1204.2810.

[2] N. Bergeron – "Virtual fibering of certain cover of $\mathbb{S}^3$, branched over the figure eight knot", *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **346** (2008), no. 19-20, p. 1073–1078.

[3] M. Bestvina et M. Feighn – "A combination theorem for negatively curved groups", *J. Differential Geom.* **35** (1992), no. 1, p. 85–101.

[4] R. Gitik, M. Mitra, E. Rips et M. Sageev – "Widths of subgroups", *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), no. 1, p. 321–329.

[5] F. Haglund et D. T. Wise – "A combination theorem for special cube complexes", To appear in Annals of Maths.

[6] T. Hsu et D. T. Wise – "Cubulating malnormal amalgams", Preprint.

[7] A. S. Kechris, S. Solecki et S. Todorcevic – "Borel chromatic numbers", *Adv. Math.* **141** (1999), no. 1, p. 1–44.

[8] D. T. Wise – "The structure of groups with a quasiconvex hierarchy", p. 1–200, Preprint 2009.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Unité Mixte de Recherche 7586 du CNRS, Université Pierre et Marie Curie, 4, place Jussieu 75252 Paris Cedex 05, France,

E-mail address: `bergeron@math.jussieu.fr`

URL: `http://people.math.jussieu.fr/~bergeron`