

THESE

présentée à
l'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 6
spécialité **Mathématiques Appliquées**

par **François DUBOIS**

Sujet de la Thèse :

**QUELQUES PROBLEMES LIES AU CALCUL
D' ECOULEMENTS DE FLUIDES PARFAITS
DANS LES TUYERES.**

Soutenue le 5 janvier 1988 devant le jury composé de

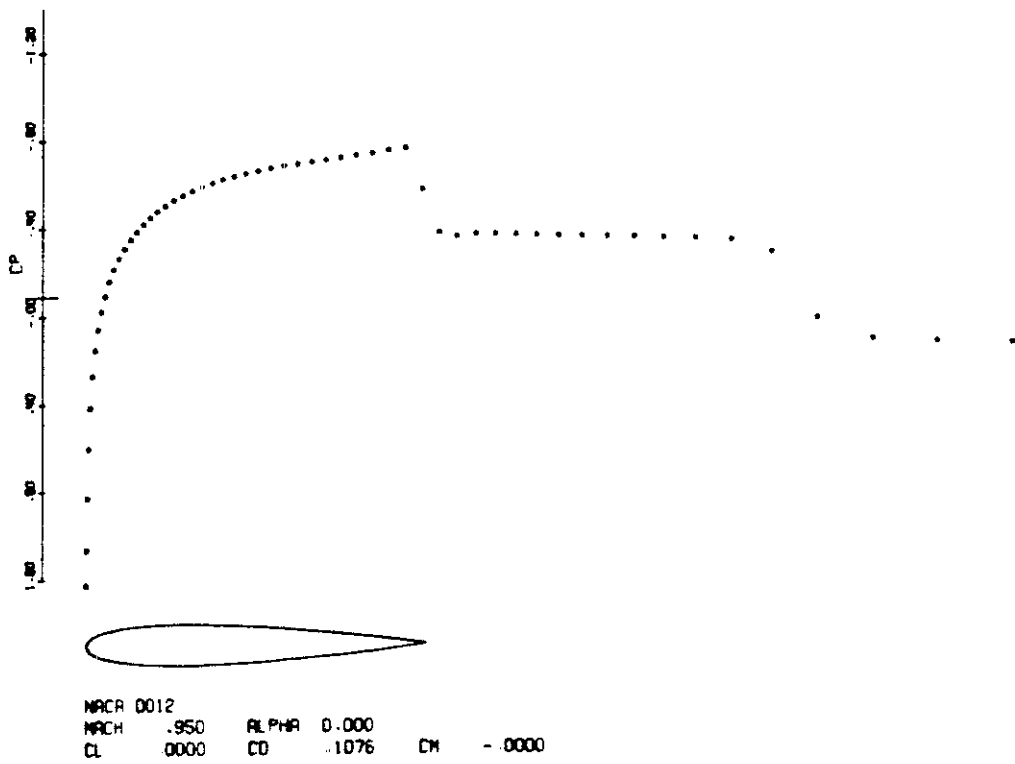
MM.	P.A. RAVIART	Président
	A.Y. LEROUX	
	O. PIRONNEAU	Rapporteurs
	B. MERCIER	
	P. MORICE	
	J.C. NEDELEC	Examineurs

Chapitre 7

Eléments finis mixtes, schéma d'Engquist-Osher
et algorithme de Newton pour la résolution numérique
de l'équation du potentiel transsonique .

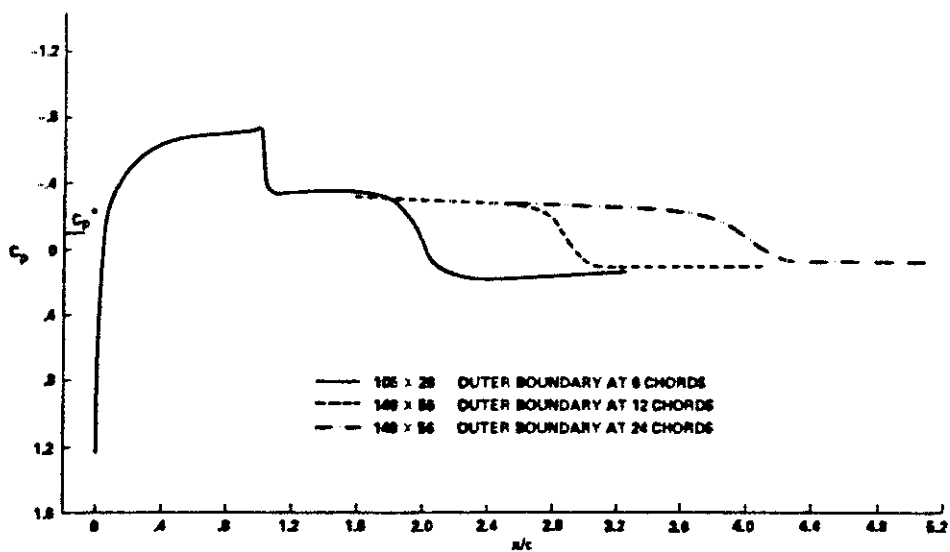
4 - TEST A $M_\infty = 0.95$

Ce cas test, déjà proposé au GAMM workshop de 1979 [28], présente un choc oblique attaché au bord de fuite, suivi d'un choc droit (on parle alors d'un "fishtail shock", voir par exemple JAMESON [15]). Cette structure avait été observée lors du workshop par JAMESON et HOLST [28] et présentée ensuite par HABASHI-HAFEZ [9]. Nous reproduisons leurs résultats sur les Figures 2.12 à 2.15. Notre calcul (Figure 2.16) montre lui aussi la structure de choc en queue de poisson ; signalons que l'obtention de cette structure n'était pas attendue a priori puisque notre schéma par élément amont est fondé sur un alignement du maillage et des lignes de courant. La différence entre les résultats des figures 2.12 à 2.16 porte essentiellement sur l'emplacement du choc droit. D'après nos calculs (Figure 2.17), il se place à 1.5 fois le profil (par rapport au bord d'attaque, situé en $x=0$), ce qui est comparable à HABASHI-HAFEZ [9] (1.7 fois le profil) alors que JAMESON et HOLST (Figures 2.12 et 2.13) trouvent ce second choc à 2 cordes du bord d'attaque, ou même plus. Comme le signale HOLST [28] (cf. Figure 2.13) la taille du domaine de calcul influe sur la position du choc droit, et la frontière aval que nous avons retenue est probablement mal adaptée à ce test. Toutefois, le changement de condition limite obtenu en remplaçant la frontière à l'infini Γ_R par une frontière de type Γ_N n'a pas modifié de façon essentielle la valeur du nombre de Mach après le profil (Figure 2.18).



C-type grid 128 x 32

Figure 2.12 Résultats de JAMESON et al [28], pour l'aile NACA 0012 à $M_\infty = 0.95$.



- Pressure coefficient distributions with x/c axis extended downstream of airfoil trailing edge (NACA 0012 airfoil, $M_\infty = 0.95$, $\alpha = 0^\circ$).

Figure 2.13 Résultats de HOLST [28], pour l'aile NACA 0012, $M_\infty = 0.95$.

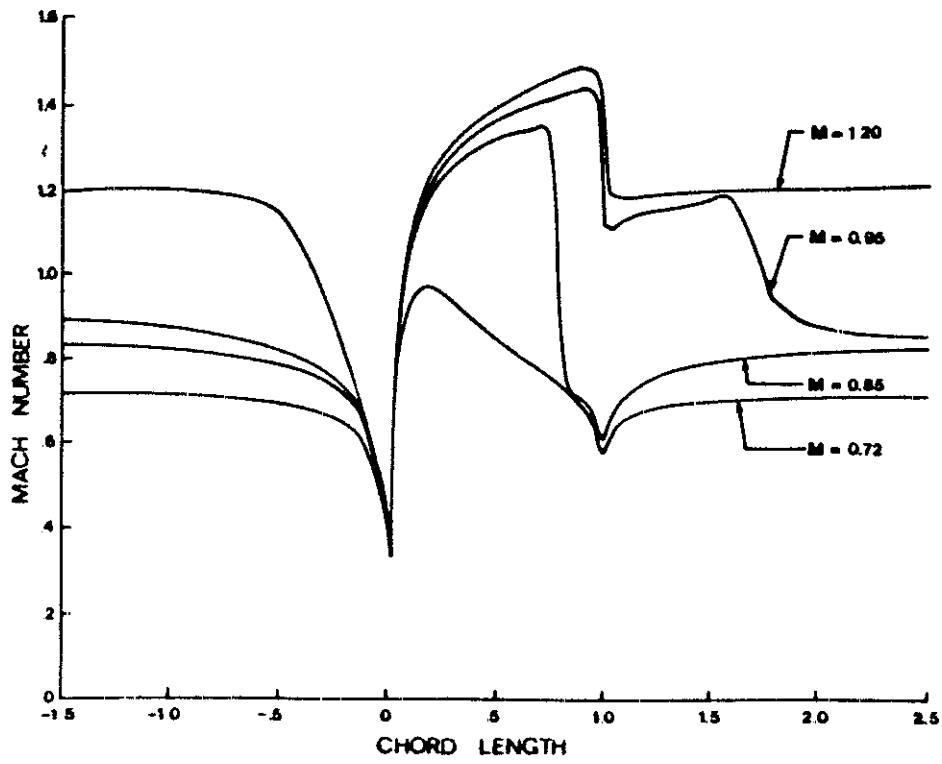
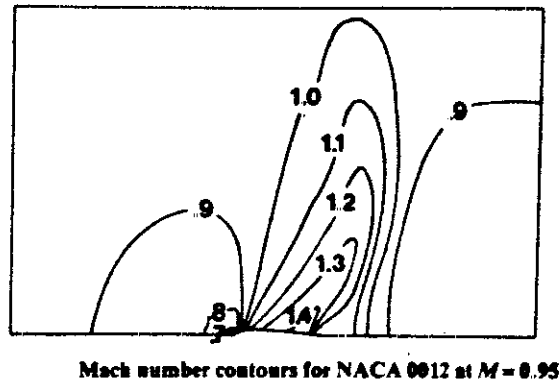


Figure 2.14 Résultats de HABASHI-HAFEZ [9] pour le NACA 0012 non portant.



Mach number contours for NACA 0012 at $M = 0.95$.

Figure 2.15 Résultats de HABASHI-HAFEZ [9].

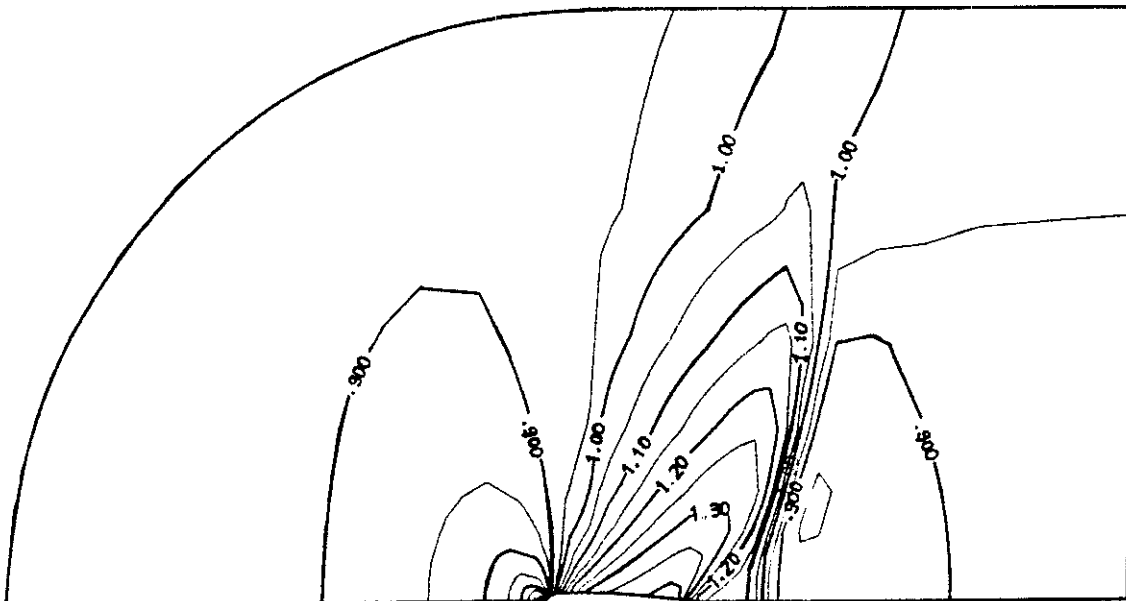


Figure 2.16 Isovaleurs du nombre de Mach. NACA 0012, $M_\infty = 0.95$.

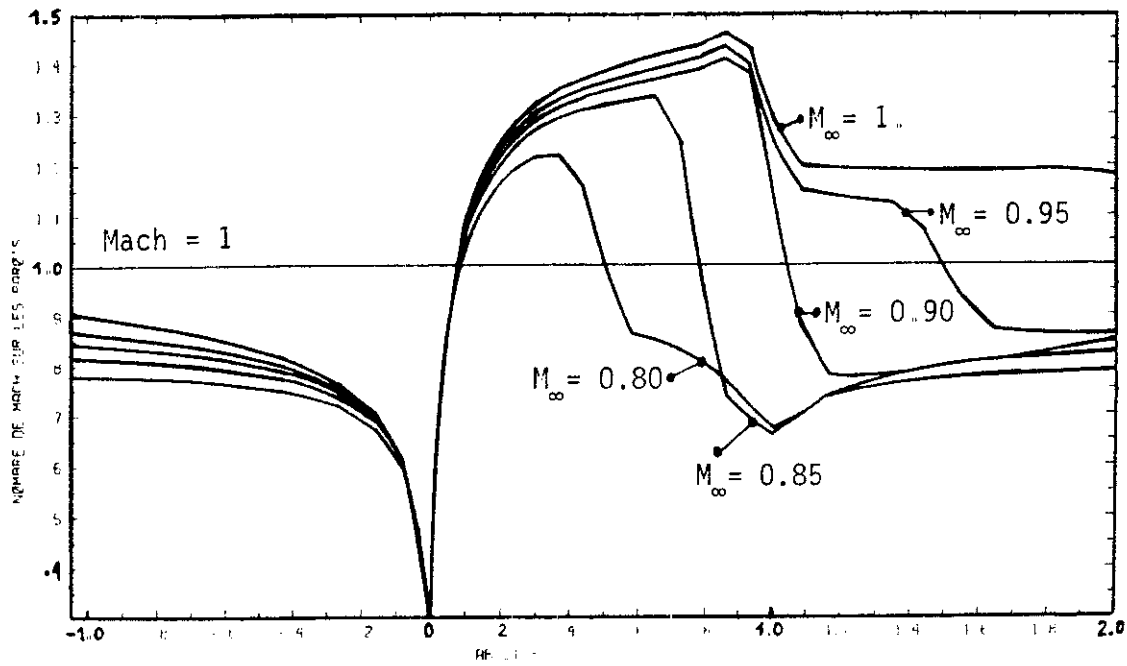


Figure 2.17 Nombre de Mach sur le bord Γ_D du domaine de calcul (NACA 0012 non portant).

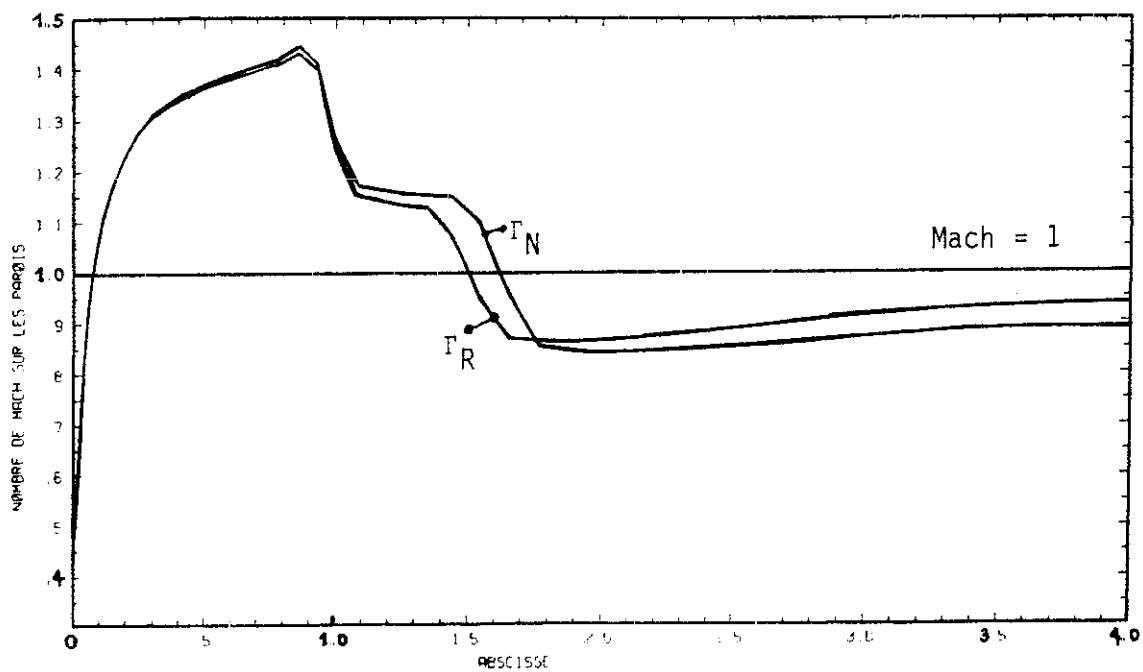


Figure 2.18 Nombre de Mach sur Γ_D , NACA 0012 à $M_\infty = 0.95$. Conditions aux limites " Γ_N " et " Γ_R " sur la frontière artificielle.

5 - NOMBRE DE MACH A L'INFINI SUPERIEUR OU EGAL A 1.

Le cas de calcul $M_\infty = 1$ pose un problème d'initialisation : si l'on choisit comme condition initiale l'écoulement uniforme associé, la matrice obtenue est non-inversible (ce qui est assez naturel puisque les contributions locales $d\vec{Q}(\vec{u})$ sont singulières dans ce cas). Nous avons donc opté pour une méthode de continuation par rapport au nombre de Mach à l'infini : nous calculons successivement les cas $M_\infty = 1., 1.05, 1.1$ en choisissant comme condition initiale le résultat du calcul à $M_\infty = 0.95, 1., 1.05$ respectivement. De plus, nous avons mis en oeuvre la condition limite à l'infini à l'aide d'une frontière de type Γ_N (condition (1.2)). Pour chaque cas, la convergence du calcul a été assez rapide (moins de 200 itérations typiquement). Pour le cas $M_\infty = 1.20$, nous avons initialisé le calcul par l'écoulement uniforme correspondant, et la convergence a été obtenue assez rapidement (200 itérations). Les champs d'isovaleurs du nombre de Mach sont représentés aux Figures 2.19 à 2.22. Au fur et à mesure que M_∞ croît, le choc en queue de poisson s'étend, le choc droit est situé de plus en plus loin du bord de fuite et disparaît du domaine de calcul pour $M_\infty = 1.2$ (Figure 2.23). Par ailleurs, un choc détaché en amont du bord d'attaque apparaît ; il est bien visible sur nos simulations malgré un maillage assez grossier dans cette zone.

Les cas tests du profil NACA 0012 non portant avec un nombre de Mach à l'infini égal à 1., 1.05, 1.1 n'ont pas encore, à notre connaissance, donné lieu à publication. Par contre, HABASHI-HAFEZ [9] et OSHER-HAFEZ-WHITLOW [25] ont proposé des résultats pour le cas $M_\infty = 1.2$ (Figures 2.14 et 2.24 respectivement). Nos résultats (Figure 2.23) sont très comparables à ceux proposés par ces auteurs, et valident complètement notre démarche.

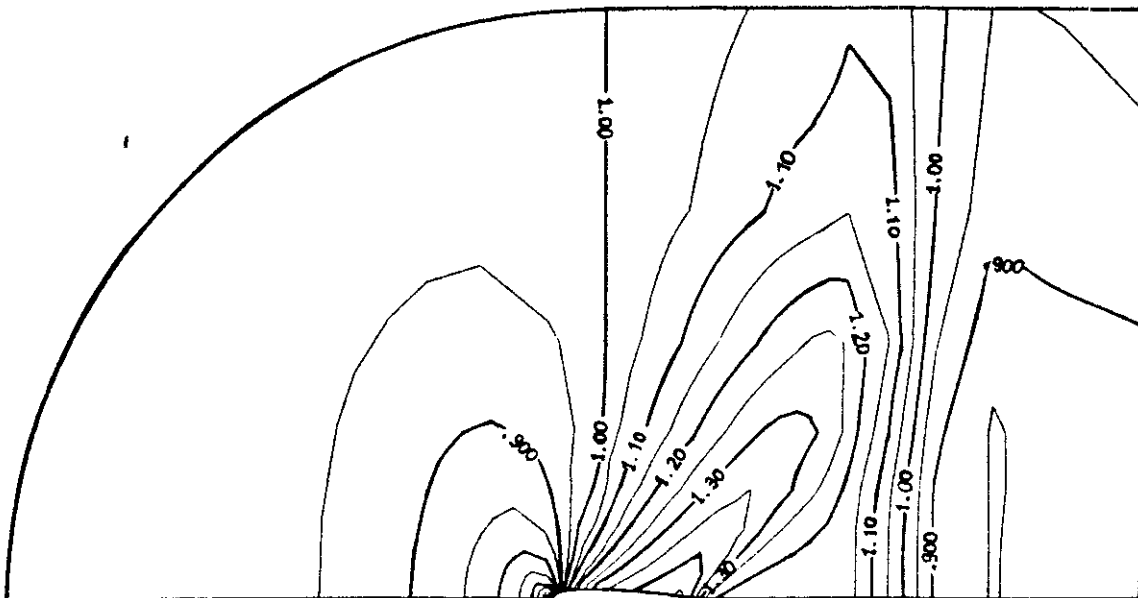


Figure 2.19 Courbes d'isomach. NACA 0012, $M_\infty = 1$, $\alpha = 0^\circ$.

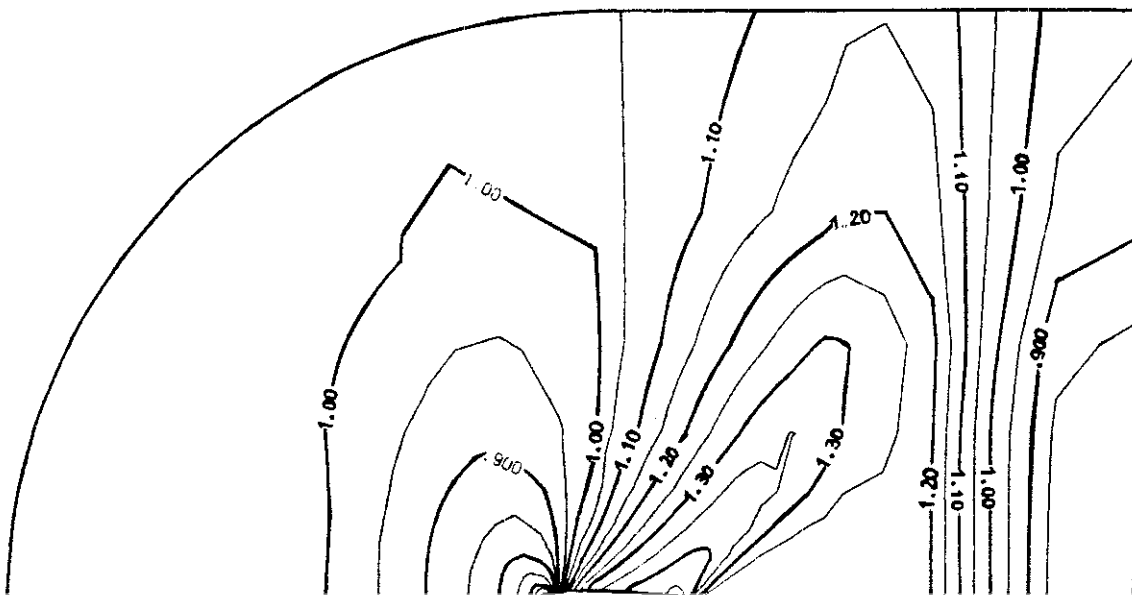


Figure 2.20 Courbes d'isomach. NACA 0012, $M_\infty = 1.05$, $\alpha = 0^\circ$.

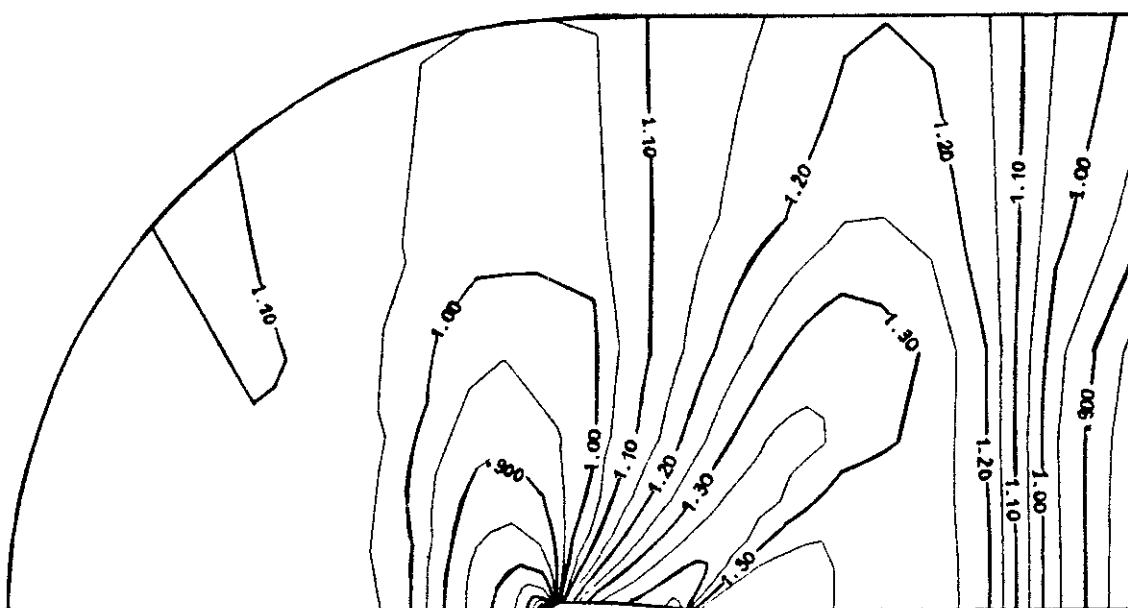


Figure 2.21 Courbes d'isomach. NACA 0012, $M_\infty = 1.1$, $\alpha = 0^\circ$.



Figure 2.22 Courbes d'isomach, NACA 0012, $M_\infty = 1.2$, $\alpha = 0^\circ$.

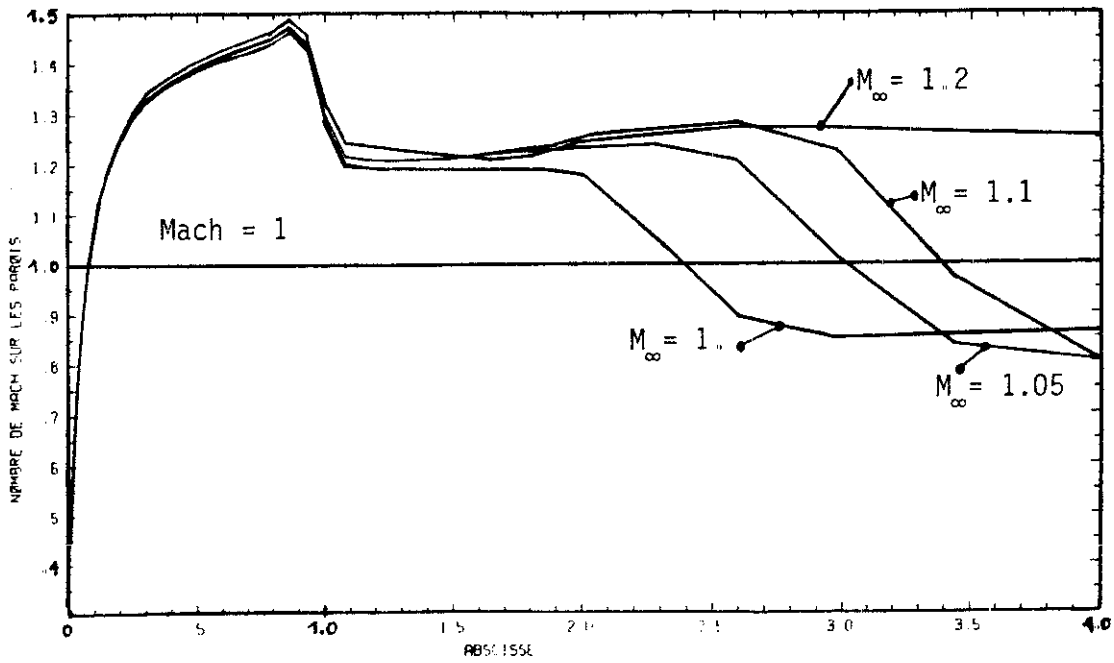


Figure 2.23 Courbes d'isomach sur le profil et au delà, aile NACA 0012 non portante.

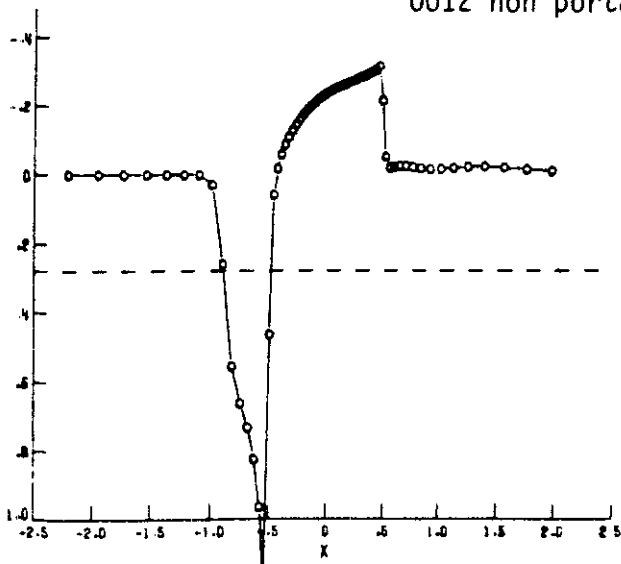


Figure 2.24 Résultats de OHER-HAFEZ-WHITLOW [25].

III - ETUDE DU CANAL DU GAMM

Nous présentons trois cas tests représentatifs de régimes d'écoulements transsoniques et supersoniques dans un canal. Ils nous ont permis de valider chacune des conditions aux limites présentées au paragraphe I.4. Nous comparons nos résultats avec ceux obtenus au Chapitre 4. Tous nos calculs ont été menés sur le maillage G21 du canal du GAMM (35x11 points, 21 points sur le profil, voir Figure 3.1 et Chapitre 4, § III.2) avec l'algorithme de quasi-Newton précisé aux relations (2.1)-(2.3).

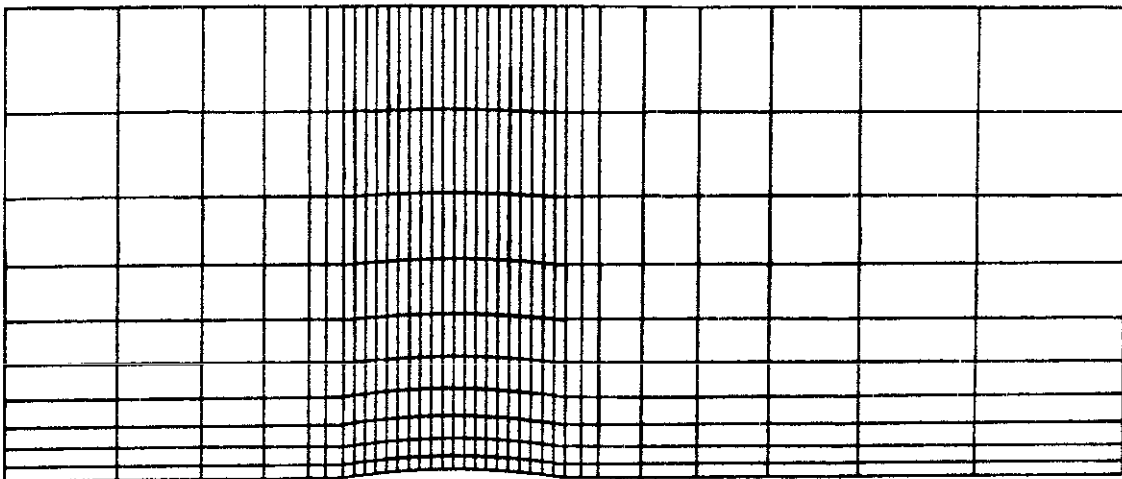


Figure 3.1 Maillage G21 du canal du GAMM.

1 - ECOULEMENT SUPERSONIQUE, $M_{\infty} = 1.5$

Ce cas test est relativement simple, puisqu'on est loin du blocage du canal (cf. Chapitres 1 et 4). Toutefois ce type d'écoulement totalement supersonique est mal adapté à la plupart des algorithmes de résolution de l'équation du potentiel transsonique.

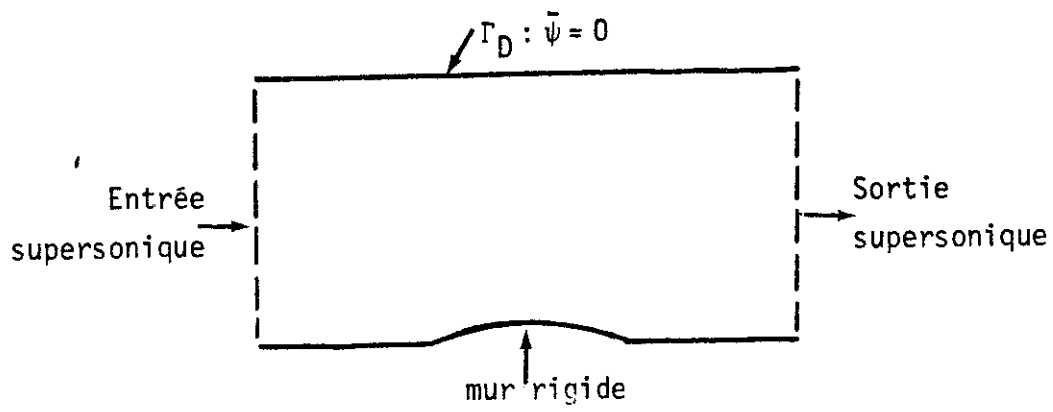


Figure 3.2 Conditions aux limites pour le Gamm channel lorsque $M_\infty = 1.50$.

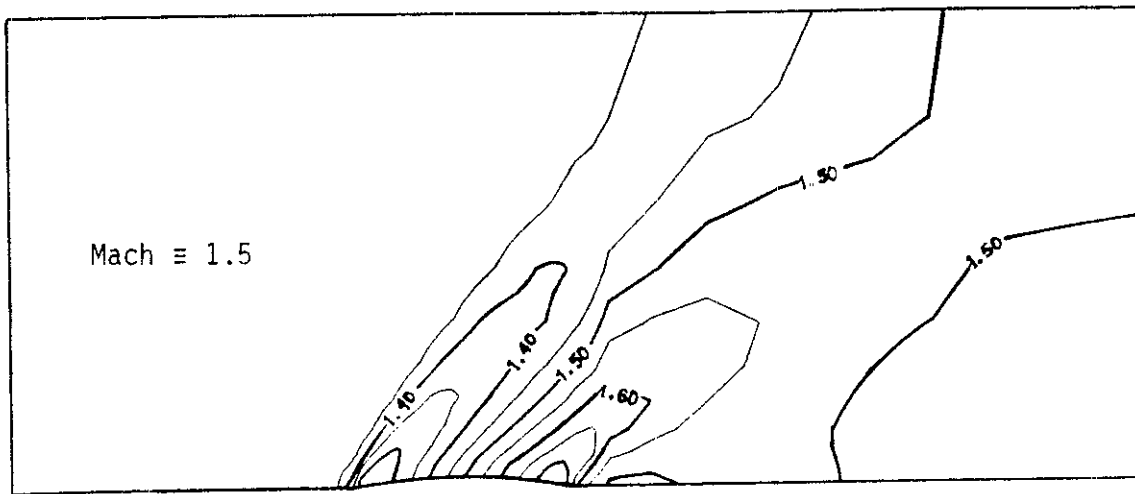


Figure 3.3 Isovaleurs du nombre de Mach. Canal du Gamm, $M_\infty = 1.5$.

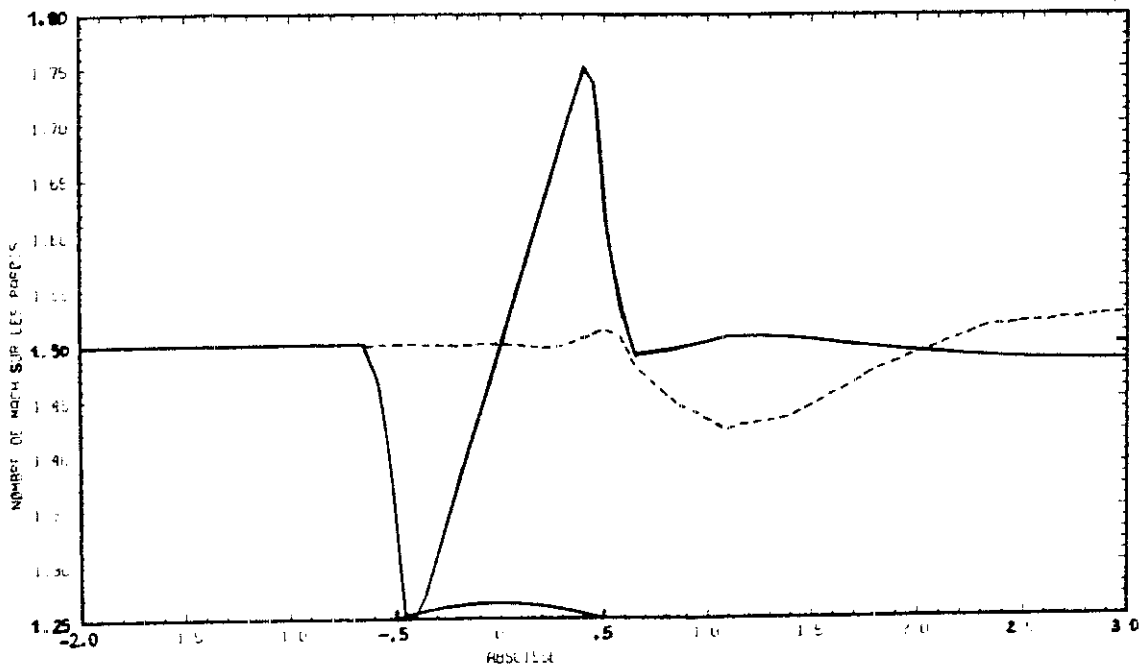


Figure 3.4 Nombre de Mach sur la paroi inférieure (trait fort) et supérieure (pointillés). Canal du Gamm, $M_\infty = 1.5$.

Les conditions aux limites sont rappelées sur la Figure 3.2 : condition de Dirichlet homogène sur Γ_D et conditions couplées sur le reste de la frontière (Γ_R) : entrée supersonique (I.4.b), mur rigide (I.4.f) et sortie supersonique (I.4.d). L'écoulement initial choisi est l'écoulement uniforme associé à $M_\infty = 1.5$. La convergence est très rapide (25 itérations non-linéaires). Les résultats obtenus sont proposés aux Figures 3.3 et 3.4. La variation du nombre de Mach sur la paroi inférieure est légèrement plus faible que celle proposée par STOUFFLET dans [2], mais avec un maillage plus fin, et un code de résolution des équations d'Euler complètes.

2 - TRANSITION REGULIERE SUB-SUPERSONIQUE

C'est le régime intéressant pour les motoristes (la tuyère fournit alors le maximum de poussée, voir par exemple SEDOV [29]). Les conditions aux limites sont presque les mêmes que pour le cas précédent (Figure 3.2) ; l'entrée est simplement subsonique au lieu d'être supersonique. Les conditions initiales ont été adaptées au résultat à obtenir : nous avons choisi un écoulement uniforme dont le nombre de Mach croît linéairement de 0.85 (à l'entrée) à 1.16 (en sortie ; voir par exemple le paragraphe III.1.a du Chapitre 4), ceci afin de réduire le nombre d'itérations dans la méthode de Newton et surtout de s'assurer les meilleures chances de convergence ! Celle-ci a été obtenue en 45 itérations. Les figures 3.5 et 3.6 présentent le champ de nombre de Mach et sa variation sur les parois du canal. Le débit traversant le canal est maintenant un *résultat* du calcul (contrairement à la méthode utilisée au Chapitre 4) et nous avons obtenu :

$$(3.1) \quad D_{\text{sub-super}} = 2.02714 \quad .$$

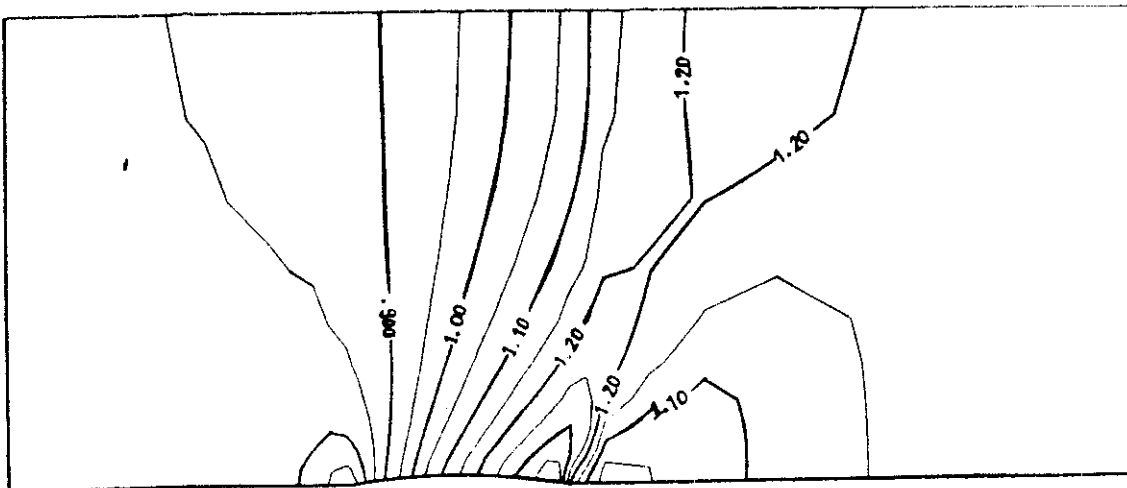


Figure 3.5 Transition sub-supersonique, canal du GAMM.

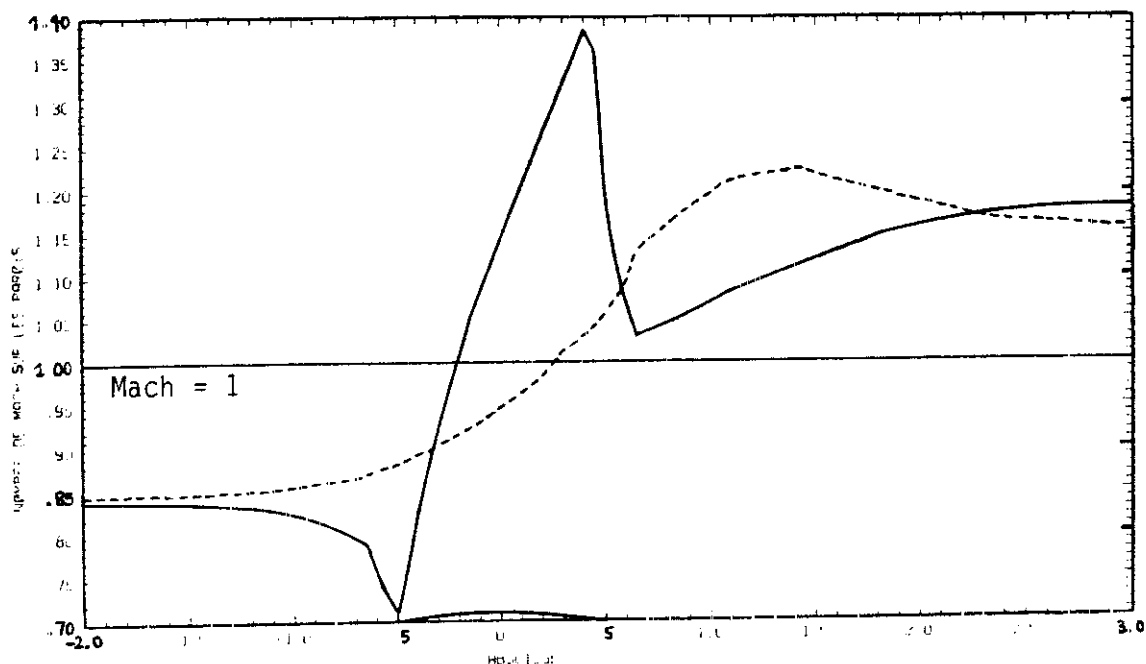


Figure 3.6 Nombre de Mach sur les parois inférieure (trait fort) et supérieure (pointillés) du canal du GAMM.

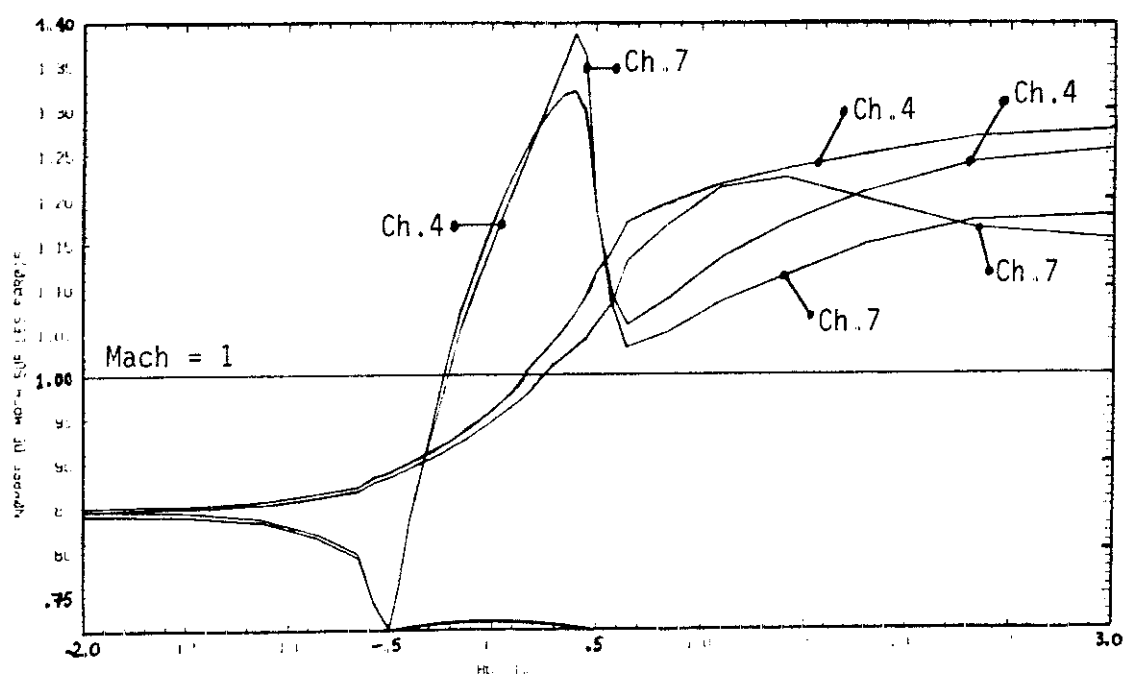


Figure 3.7 Comparaison avec les résultats du Chapitre 4 ($D = 2.0295$).

Au Chapitre 4, des écoulements à sortie supersonique ont aussi été observés (cf. Figure 3.7 de ce chapitre). Ils correspondent pour le maillage G21 à des débits supérieurs ou égaux à 2.0295. Sur la Figure 3.7, nous comparons les courbes de variation du nombre de Mach de la Figure 3.6 à celles obtenues au Chapitre 4 pour un débit D imposé à 2.0295. La différence la plus importante est la valeur du nombre de Mach en sortie du canal : avec la méthode de décentrage de la densité, nous obtenions environ 1.37, alors que notre nouveau calcul donne 1.17, valeur très proche de la prédiction quasi-monodimensionnelle. Nous pensons que la présente méthode, fondée sur un décentrement de l'impulsion (1.24) (et non de la densité) permet une plus grande précision sur le calcul du champ de vitesse, donc de toutes les autres grandeurs physiques.

3 - CANAL TRANSSONIQUE

Nous envisageons a priori toute une famille d'écoulements, paramétrée par la valeur de la contre-pression Π (exprimée comme rapport de la pression statique à la pression génératrice d'entrée). Les conditions aux limites physiques considérées au Chapitre 4 (relation (3.11)) sont maintenant directement transcrites dans le programme de calcul (Figure 3.8) : angle nul à l'entrée subsonique (cf. I.4.e) et pression imposée en sortie subsonique (I.4.c). Nous avons toujours choisi une condition initiale d'écoulement uniforme, associée à un nombre de Mach de 0.85.

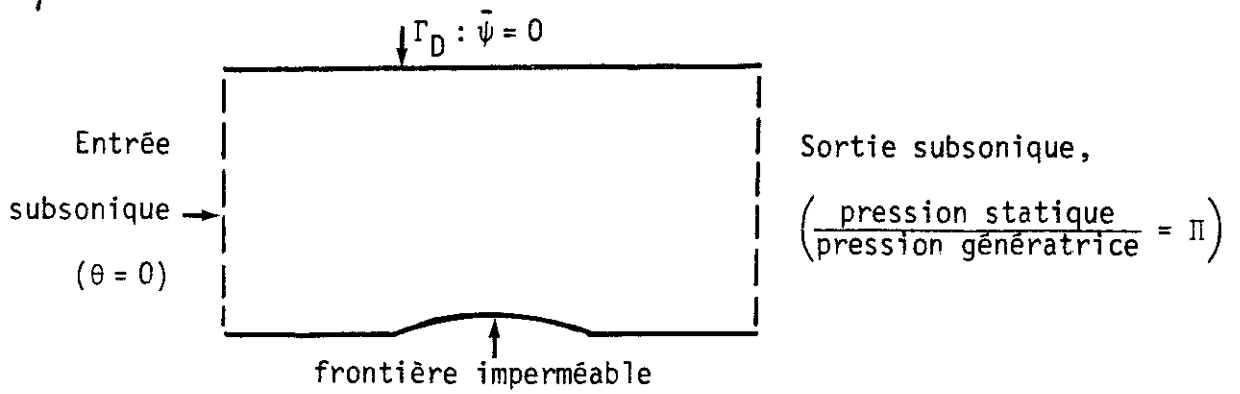


Figure 3.8 Conditions aux limites pour l'étude du GAMM channel en régime transsonique.

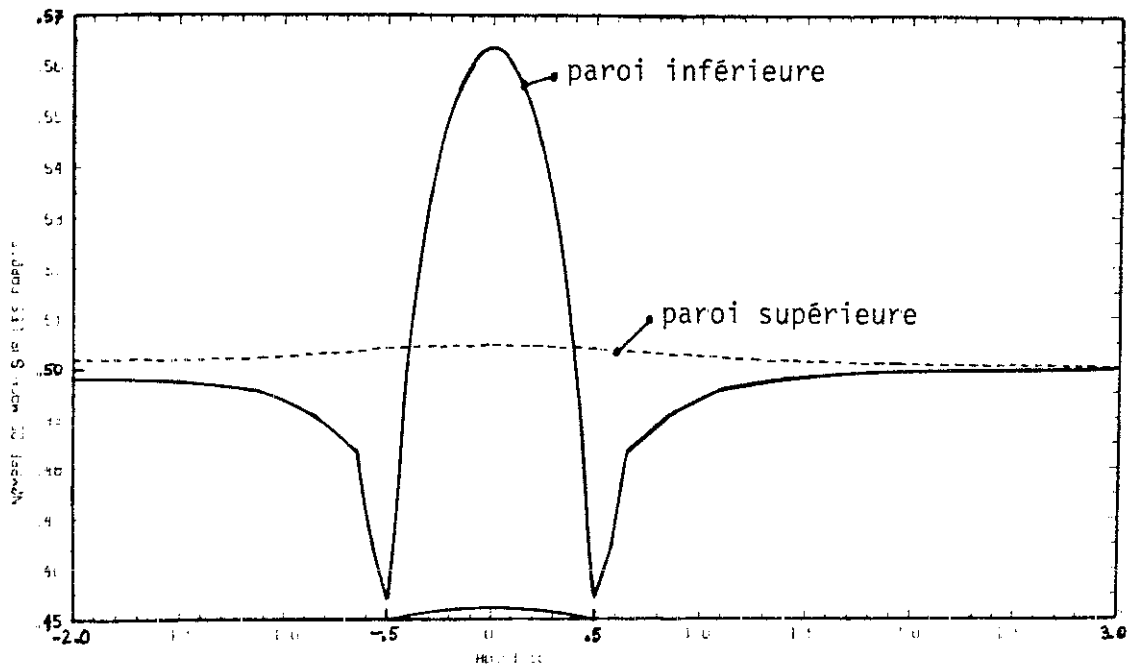


Figure 3.9 Nombre de Mach sur les parois, $\Pi = 0.843$ ($M_\infty = 0.50$).

Lorsque $\Pi = 1.$, la pression de sortie est génératrice, donc aucune énergie cinétique n'est disponible et le fluide est au repos. Lorsque Π diminue, un écoulement apparaît dans le canal, d'abord subsonique (pour $\Pi = 0.843$ par exemple, un écoulement de nombre de Mach d'entrée et de sortie égal à 0.5 a été observé, cf. Figure 3.9),

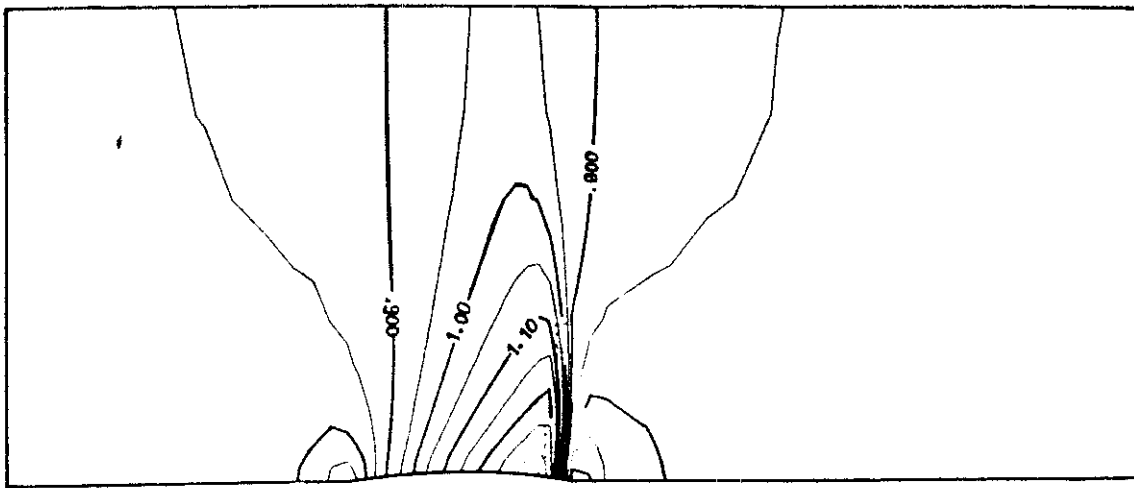


Figure 3.10 Isovaleurs du nombre de Mach. Sortie subsonique, $\Pi = 0.628$.

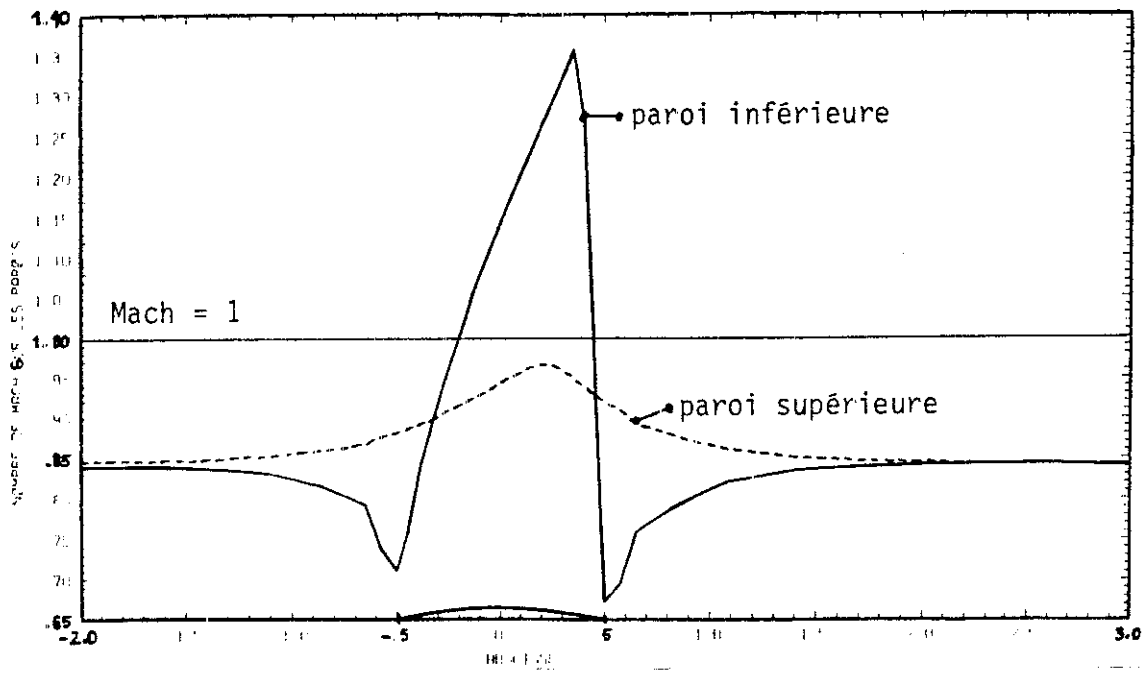


Figure 3.11 Nombre de Mach sur les parois. Canal du GAMM, $\Pi = 0.628$.

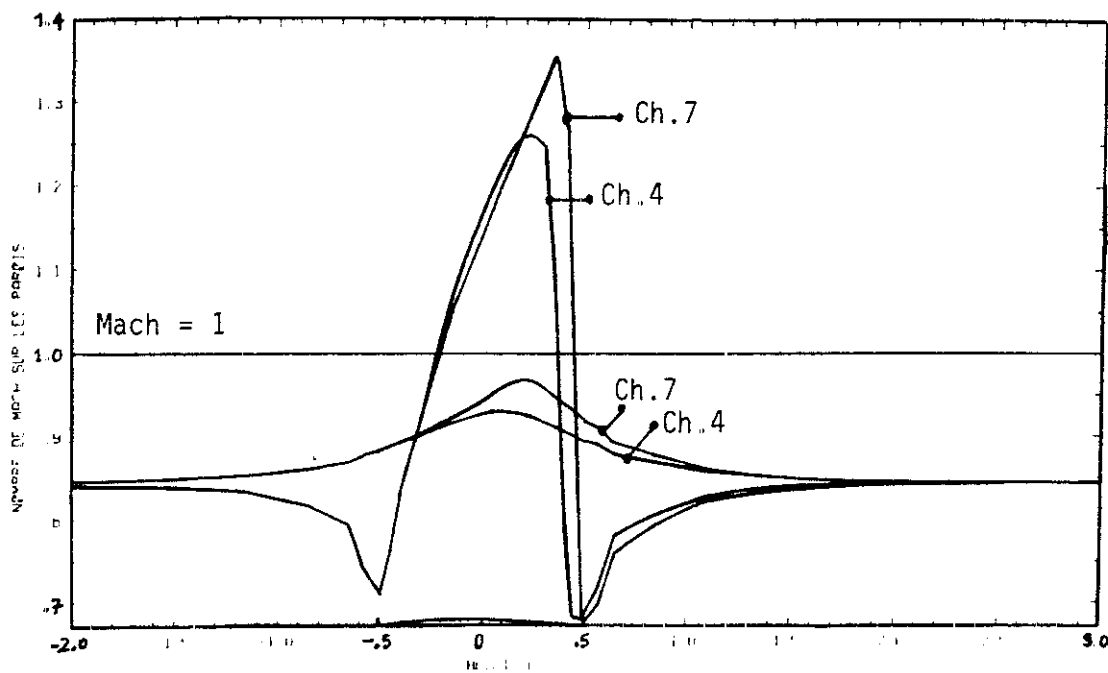


Figure 3.12 Comparaison avec les résultats du Chapitre 4 ($D = 2.027$).

puis transsonique ; nous n'avons pas cherché à identifier la valeur de Π pour laquelle le bulbe supersonique apparaît. Pour $\Pi = 0.628$ (ce qui correspond à $M_\infty = 0.843$) la zone supersonique est très développée, mais la ligne sonique et le choc ne traversent pas le canal (Figures 3.10 et 3.11). Le débit calculé lors de ce nouveau test vaut également

$$(3.2) \quad D_{\Pi = 0.628} = 2.02714 \quad .$$

Nous pouvons comparer ce dernier écoulement au résultat calculé au Chapitre 4 avec un débit imposé à $D = 2.027$. Dans ce dernier cas, la pression de sortie, calculée, vaut $\Pi = 0.6278 \pm 0.001$, valeur très proche de celle imposée a priori avec notre nouvelle méthode. La comparaison des courbes de variation du nombre de Mach (Figure 3.12) confirme ces données numériques, ainsi que la différence de comportement entre les deux méthodes dans la zone supersonique, comme nous l'avions déjà vu pour l'aile NACA 0012 : la zone supersonique prédite par le Chapitre 4 est plus réduite.

Par contre, il nous a été impossible de diminuer de façon significative la pression Π de sortie au delà de $\Pi = 0.628$. Lors d'un essai à $\Pi = 0.626$, 450 itérations non-linéaires ont été effectuées, sans pour autant obtenir de convergence, alors que le cas $\Pi = 0.628$ avait convergé en 190 itérations. Aucun écoulement où le choc barre complètement le canal (cf. Figure 3.6 du Chapitre 4) n'a donc été mené à bien ; en particulier, le test proposé au GAMM workshop [28], $\Pi = 0.623512$, n'a pas été traité.

4 - DISCUSSION

Le problème posé lors du GAMM workshop de 1979 était, rappelons-le, le suivant [28]: "Calculer l'écoulement interne dans un canal à faces parallèles présentant une bosse circulaire de 4.2 % d'épaisseur sur le mur inférieur. Le rapport de la pression statique de sortie à la pression d'entrée totale est de 0.623512 (ce qui correspond à un écoulement isentropique à $M=0.85$), et la distance entre les murs est égale à 2.073 fois la corde de la bosse circulaire". Lors du workshop, les auteurs ayant traité ce problème grâce à l'équation "Transonic Full Potential" ont été peu nombreux, et leurs résultats très peu concordants. Rappelons ici les contributions de JAMESON et al, DECONINCK-HIRSCH et VEUILLOT-VIVIAND. JAMESON ([28], page 19) considère que le problème est *mal posé* et présente une courbe de C_p sur les faces du canal (Figure 3.10) qui correspond à un nombre de Mach amont de 0.8435 (soit une contre-pression $\Pi=0.627723$). Les résultats numériques de JAMESON et al correspondent donc à une valeur de Π très voisine de la nôtre (.628), et sont effectivement très semblables aux nôtres comme on le constate en comparant les Figures 3.13 et 3.14 (où les courbes de la Figure 3.11 ont été retranscrites en termes de coefficient de pression). Ce même calcul ne semble pas avoir posé de problème à DECONINCK-HIRSCH. Mais leur résultat (Figure 3.15) comporte une poche supersonique moins étendue que la nôtre (Figure 3.10), et les valeurs ponctuelles du nombre de Mach en entrée du canal sont plutôt de l'ordre de 0.83-0.84 que 0.85. Notons que JAMESON et DECONINCK-HIRSCH utilisent un décentrage de l'impulsion pour l'un et de la densité pour l'autre, qu'on peut comparer à notre traitement du présent Chapitre et du Chapitre 4 respectivement.

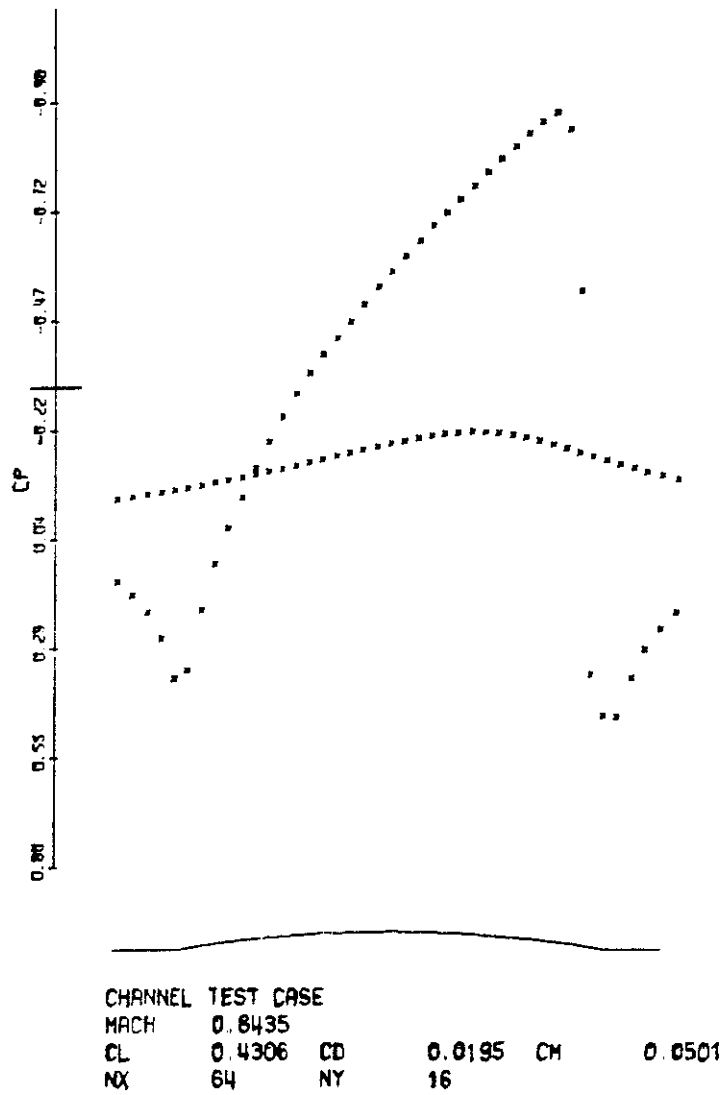


Figure 3.13 Coefficient de pression sur la paroi inférieure du canal du GAMM. Résultat de JAMESON [28].

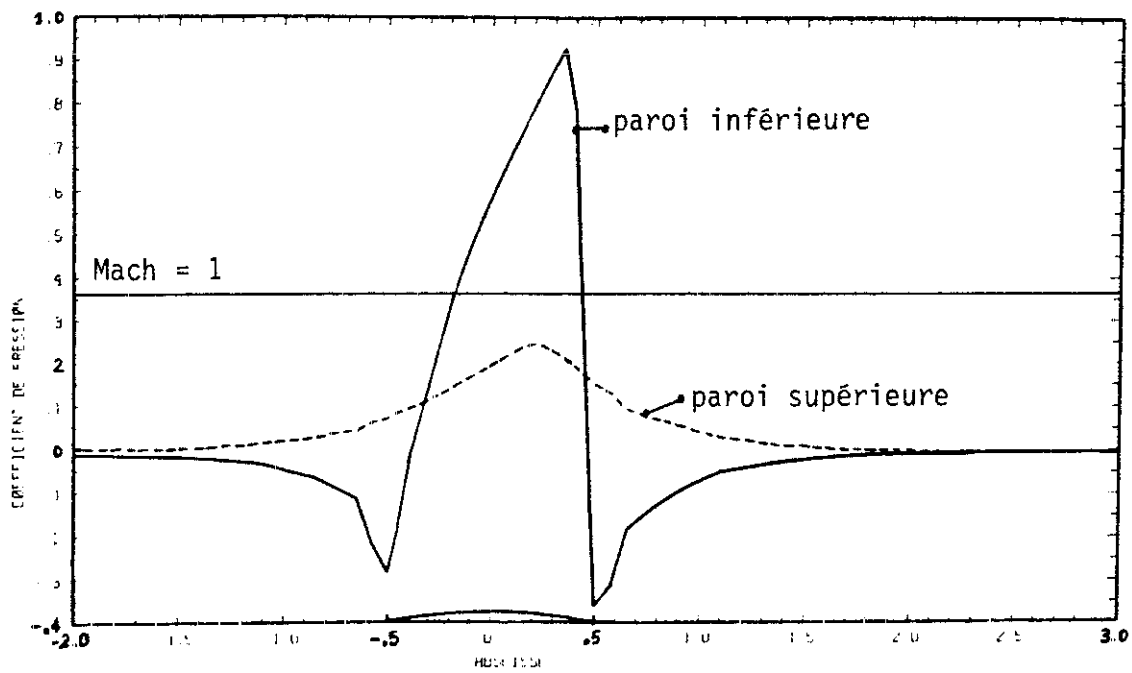
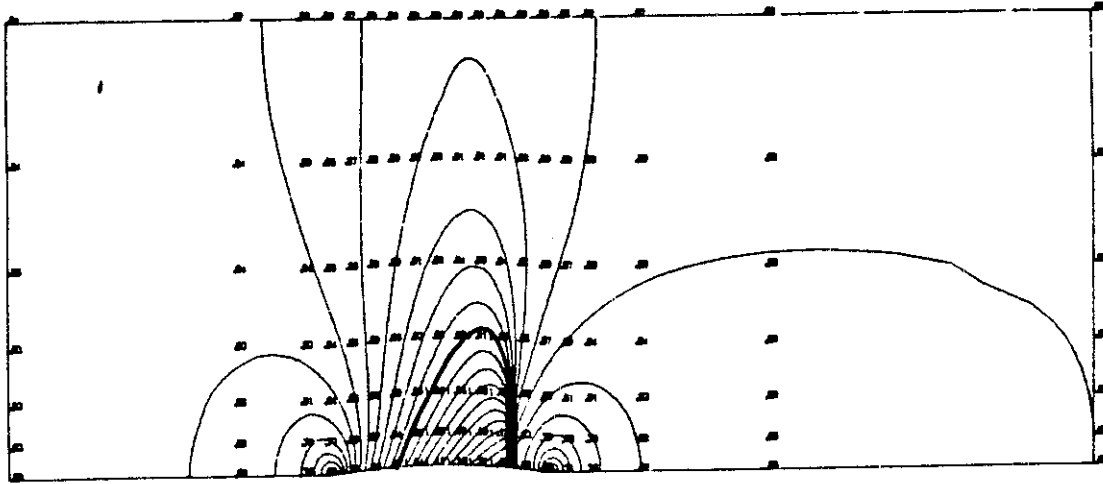


Figure 3.14 Coefficient de pression sur les parois du canal du GAMM. Sortie subsonique, $\Pi = 0.628$ ($M_\infty = 0.843$).



CHANNEL FLOW PR. B

INLET ANGLE = 0.00 DEG OUTLET ANGLE = 0.00 DEG BILIN.ELEM. MSLOR METH.
 INLET MACH NUMBER = .8500 OUTLET MACH NUMBER = .8500

Figure 3.15 Champ d'isomach pour le GAMM channel.
 Résultats de DECONINCK-HIRSCH [28].

Pour le même cas test, VEUILLOT-VIVIAND utilisent une formulation pseudo-instationnaire du modèle potentiel (nous y reviendrons) et obtiennent un écoulement où le choc traverse tout le canal (cf. Figure 3.17 du Chapitre 4).

Au Chapitre 4, nous avons réussi à calculer ce type d'écoulement bloqué, mais sur le maillage le plus grossier seulement, alors qu'avec la méthode développée dans ce Chapitre, et bien qu'utilisant le même maillage, rien d'analogue n'a été observé. Comme notre traitement actuel de la non-linéarité est performant (méthode de Newton), nous pensons que le système discret associé aux conditions aux limites prévues par le workshop ($\Pi = 0.623512$) n'a effectivement pas de solution. Par contre nous ne pouvons rien conclure concernant le problème continu, puisque la discrétisation de VEUILLOT-VIVIAND et la méthode de décentrage en densité penchent pour l'existence d'un tel écoulement. Si le problème continu est effectivement bien posé, nous devons remettre en cause le schéma développé dans ce chapitre, afin de discrétiser de façon encore plus précise le problème transsonique potentiel.

IV - VERS UNE NOUVELLE METHODE

La méthode numérique exposée dans la partie I de ce chapitre est fondée sur une formulation mixte du problème transsonique (ce qui permet d'affaiblir l'équation sur le tourbillon) et surtout une analyse de la non-linéarité en termes d'une équation hyperbolique non-linéaire *scalaire*. Cette dernière approche est naturelle, et tous les schémas de résolution de l'équation des petites perturbations (TSD) comme des grandes perturbations (TFP) transsoniques proposent un décentrage simultané de tous les champs, éventuellement le long d'une ligne de courant pour la TFP (cf. MURMAN [21], JAMESON [15], HAFEZ-SOUTH-MURMAN [13], AMARA [1], OSHER-HAFEZ-WHITLOW [25] par exemple). Pourtant, une compréhension en profondeur de l'équation du potentiel transsonique, conduit de façon naturelle à de nouveaux schémas numériques. Dans le premier paragraphe, nous rappelons la contribution de VIVIAND-VEUILLOT [32], MORICE-VIVIAND [20] et OSHER-HAFEZ-WHITLOW [25] pour l'équation du potentiel dans le cas bidimensionnel. Cette analyse nous permet de proposer au second paragraphe une nouvelle formulation primale de l'équation du potentiel transsonique. Enfin, une modification du code de calcul existant est envisagée.

1 - SYSTEME INSTATIONNAIRE ASSOCIE A L'EQUATION DU POTENTIEL TRANSSONIQUE

Dans leur mémoire [32], VIVIAND-VEUILLOT proposent d'utiliser les variables (ρ, θ) de densité-angle pour décrire le champ de vitesse \vec{u} solution de l'équation transsonique. Le module $V(\rho)$ du champ de

vitesse est imposé par le théorème de Bernoulli :

$$(4.1) \quad V(\rho) = \sqrt{1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_0^2} (1 - \rho^{\gamma-1})}$$

et sa direction $\vec{s}(\theta)$ est associée à l'angle θ :

$$(4.2) \quad \vec{u} = V(\rho) \vec{s}(\theta) \quad , \quad \vec{s}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta) \quad .$$

La conservation de la masse et la nullité du tourbillon sont obtenus comme états stationnaires du système hyperbolique

$$(4.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{u} = 0 \end{cases}$$

qu'on peut réécrire sous forme classique

$$(4.4) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} + \frac{\partial g(U)}{\partial y} = 0$$

avec

$$(4.5) \quad \begin{cases} t_U = (\rho, \theta) \\ t_f(U) = (\rho V(\rho) \cos \theta, V(\rho) \sin \theta) \\ t_g(U) = (\rho V(\rho) \sin \theta, -V(\rho) \cos \theta) \end{cases}$$

Le système (4.4)(4.5) est un système hyperbolique non-linéaire, les valeurs propres associées à la direction φ du plan (x,y) valent

$$(4.6) \quad \lambda_{\pm} = V(\rho) \cos(\theta-\varphi) - \frac{c(\rho)}{2M(\rho)} \cos(\theta-\varphi) \pm c(\rho) \sqrt{\sin^2(\theta-\varphi) + \frac{\cos^2(\theta-\varphi)}{4M^2(\rho)}}$$

et il possède une entropie (MORICE-VIVIAND [20]), à savoir

$$(4.7) \quad \begin{cases} \eta(\rho, \theta) = \psi(\rho) + \frac{1}{2} \theta^2 \\ \text{où } \psi''(\rho) = \frac{1}{M_0^2} \frac{\rho^{\gamma-3}}{V(\rho)^2} = \frac{1}{\rho^2 M^2} \end{cases} .$$

de flux associé

$$(4.8) \quad \vec{j}(\rho, \theta) = \left(\frac{1}{\rho} + \psi'(\rho) \right) \rho \vec{u} - \theta V(\rho) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} .$$

Une idée naturelle consiste à utiliser une formulation volumes-finis et, selon la démarche de GODUNOV [8], la difficulté est reportée dans la résolution du problème de Riemann monodimensionnel associé à (4.4) :

$$(4.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho V(\rho) \cos \theta \\ V(\rho) \sin \theta \end{pmatrix} = 0 \\ (\rho, \theta)(x, 0) = \begin{cases} (\rho_g, \theta_g) & x < 0 \\ (\rho_d, \theta_d) & x > 0 \end{cases} . \end{cases}$$

Or le problème (4.9) est difficile à résoudre : les champs ne sont ni linéairement dégénérés, ni vraiment non-linéaires, et les ondes de détente n'ont pas non plus d'expression simple. Nous n'avons donc pas poursuivi plus avant cette démarche.

L'utilisation d'un schéma centré aux différences finies est possible aussi et VIVIAND-VEUILLOT [32] ont utilisé le schéma de MAC CORMACK [17] pour calculer l'évolution numérique du système (4.4) dans le canal du GAMM. Une autre idée (OSHER [26]) est d'utiliser les variables entropiques associées à $\eta(\rho, \theta)$ et d'adapter les méthodes de streamline diffusion et de shock capturing operator (HUGHES-MALLET [14]) au système hyperbolique (4.4).

2 - UNE FORMULATION PRIMALE DE L'EQUATION DU POTENTIEL TRANSSONIQUE

Nous nous proposons de décrire une nouvelle formulation primale du problème transsonique potentiel, c'est-à-dire fondée sur une représentation du champ de vitesse du type

$$(4.10) \quad \vec{u} = \vec{\nabla} \phi$$

(plus une fonction spéciale si le domaine n'est pas simplement connexe, cf. Chapitre 2). Nous nous contentons de décrire la méthode dans un cas très simple, avec un choix de fonctions d'interpolation de plus bas degré.

Le domaine de calcul Ω est supposé par exemple maillé par des triangles et on suppose le potentiel donné sur une partie Γ_0 de la frontière Γ . Nous notons V_h le sous-espace des fonctions affines dans chaque élément, continues sur $\bar{\Omega}$, nulles sur Γ_0 , et $\bar{\phi}$ désigne un relèvement de la condition de Dirichlet sur Γ_0 . On a donc :

$$(4.11) \quad \phi = \bar{\phi} + \varphi \quad , \quad \varphi \in V_h$$

et le champ de vitesse qui lui est associé selon (4.10) est constant dans chaque élément.

A l'interface a entre deux éléments, la résolution du problème de Riemann (4.9) permet, entre autres, le calcul du flux de masse Q_a sur cette interface. Comme nous avons vu que ce problème est hors de portée (sur le plan économique de toute façon), nous le remplaçons par un autre problème de Riemann, obtenu en changeant l'équation. Comme lors de l'analyse des conditions aux limites à l'infini,

nous utilisons les équations de Saint Venant (1.29)(1.30), et l'analyse menée en I.4.b est inchangée. Nous pouvons, grâce à notre interprétation (1.35) du schéma d'Osher, calculer sur chaque interface a intérieure au domaine un flux de masse $Q_a(\{\vec{u}\})$ qui est une fonction dérivable du champ de vitesse (4.10). L'étude des conditions aux limites s'étend trivialement, et $Q_a(\{\vec{u}\})$ peut donc être défini pour chaque arête du maillage, tant intérieure que frontalière.

Grâce à l'élément fini conforme dans $H(\text{div})$ de RAVIART-THOMAS [27], $Q_a(\{\vec{u}\})$ définit un *champ de vecteurs* $\vec{q}(\vec{u})$ dans le discrétisé de l'espace $H(\text{div})$ de RAVIART-THOMAS. Il ne reste plus qu'à exprimer de façon faible l'équation de conservation de la masse

$$(4.12) \quad \text{div } \vec{q} = 0$$

pour fermer le problème :

$$(4.13) \quad \begin{cases} \phi = \bar{\phi} + \varphi & , \quad \varphi \in V_h \\ \int_{\Omega} q(\vec{\nabla}\bar{\phi} + \vec{\nabla}\varphi) \cdot \vec{\nabla}\psi \, dx = \int_{\partial\Omega} \psi \vec{q}(\vec{\nabla}\bar{\phi} + \vec{\nabla}\varphi) \cdot \vec{n} \, d\gamma & \forall \psi \in V_h \end{cases}$$

Une méthode de Newton ou de quasi-Newton est bien adaptée à la résolution de (4.13) puisque $\vec{q}(\cdot)$ est dérivable. Une factorisée approchée de la matrice du problème linéaire dérivé de (4.13) a donc toute chance d'être un excellent préconditionneur du problème transsonique potentiel. Notons que cette matrice couple un sommet P du maillage avec l'ensemble des sommets qui appartiennent aux éléments ayant une interface commune avec un élément contenant P .

De plus, la formulation (4.13) s'étend au cas tridimensionnel sans aucun changement de la fonction $Q_a(\{\vec{u}\})$; il convient seulement de remplacer l'interpolé bidimensionnel par l'élément conforme $H(\text{div})$ de NEDELEC [23].

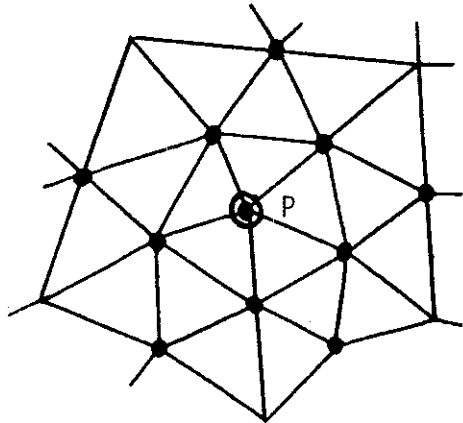


Figure 4.1 Ensemble des sommets couplés au noeud P, par le problème (4.13).

3 - UNE VARIANTE DE LA METHODE DE CE CHAPITRE

La méthode proposée au paragraphe précédent exige la réécriture complète d'un programme de calcul. Nous proposons ici une modification simple de la méthode présentée dans la première partie. La principale différence entre les deux méthodes est due à une analyse de l'interaction non-linéaire entre deux éléments voisins par l'intermédiaire d'un problème de Riemann, scalaire dans un cas et lié à un *système* de lois de conservation dans l'autre. En conservant une représentation du flux de masse dans chaque élément fini K par une formule de type (1.24), ie

$$(4.14) \quad \vec{q}_K(\vec{u}_{KA}, \vec{u}_K) = Q_a \frac{\vec{u}_K}{|\vec{u}_K|}$$

nous choisissons Q_a comme au paragraphe 2 (flux de masse du schéma d'Osher pour les équations de Saint Venant) au lieu de considérer une

équation scalaire (1.20). De cette façon, aucune hypothèse n'est plus nécessaire pour étudier l'interaction entre un élément K et son élément amont KA , et l'on suppose seulement l'alignement des vecteurs \vec{u}_K et \vec{q}_K . Cette amélioration du code existant nous permettra d'avoir rapidement une idée concrète des possibilités de la formulation primale exposée au second paragraphe.

V - CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle formulation mixte vitesse-fonction courant de l'équation du potentiel transsonique. Le décentrage par rapport à la densité utilisé par AMARA [1] et étudié également au Chapitre 4 est remplacé par un décentrage de l'impulsion à l'aide du schéma d'Engquist-Osher. Les conditions aux limites physiquement intéressantes ont été prises en compte en adaptant aux équations de Saint Venant notre étude détaillée du schéma d'Osher pour les équations d'Euler complètes. Le problème non-linéaire obtenu qui comporte un grand nombre d'inconnues, a été résolu par des itérations de type quasi-Newton. Les tests numériques sur le profil NACA 0012 non portant nous ont permis de calculer numériquement toute une famille d'écoulements, de nombre de Mach amont inférieur ou supérieur ou égal à 1. Les tests que nous avons effectués sur le canal du GAMM [28] ne nous ont pas permis d'obtenir une solution approchée du modèle transsonique potentiel qui présente une ligne sonique et un choc barrant tout le canal. Nous avons donc proposé dans une quatrième partie deux extensions possibles de notre schéma qui prennent mieux en compte le système hyperbolique non-linéaire sous-jacent.

Nous voulons ici attirer l'attention sur le fait que de telles solutions bloquées ne sont pas naturellement associées au modèle transsonique potentiel. En effet, la forme de l'entropie mathématique

$$(5.1) \quad \eta = \psi(\rho) + \frac{1}{2} \theta^2 \quad \text{où} \quad \psi''(\rho) = \frac{1}{\rho^2 M^2(\rho)}$$

impose à l'écoulement entropique de "dissiper de l'angle" puisqu'à travers un choc, aucune grandeur thermodynamique ne peut être dissipée ; l'entropie physique, dissipée par les équations d'Euler complètes est ici supposée constante, et les équations d'Euler barotropes isentropiques dissipent l'énergie totale et créent du tourbillon.

Avec les équations d'Euler complètes, un problème intérieur avec choc qui barre tout le divergent est en fait beaucoup plus facile à calculer numériquement. Nous avons développé une version bidimensionnelle du code explicite utilisé au Chapitre 6. Les variables conservatives U des équations d'Euler bidimensionnelles

$$(5.2) \quad {}^tU = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)$$

sont approchées par des fonctions constantes U_K^n dans chaque élément fini K . Le flux numérique normal F_j^n à l'interface j entre deux éléments ou à la frontière du domaine Ω est calculé à l'aide du schéma d'Osher (cf. Chapitre 6). Le schéma numérique s'écrit donc :

$$(5.3) \quad \frac{\text{vol}(K)}{\Delta t} (U_K^{n+1} - U_K^n) + \sum_{j \in K} F_j^n = 0$$

et le pas de temps Δt est choisi grâce à une condition uniforme de Courant-Friedrichs-Lewy. Nous avons étudié le canal du GAMM et initialisé tous les calculs par l'écoulement uniforme de nombre de Mach 0.85. Nous avons d'abord effectué un test avec entrée subsonique et sortie supersonique, où la solution continue des équations d'Euler coïncide théoriquement avec le modèle potentiel (cf. Chapitre 1). La carte du nombre de Mach (Figure 5.1) et une comparaison avec les résultats obtenus dans la troisième partie (Figure 5.2) révèlent les différences

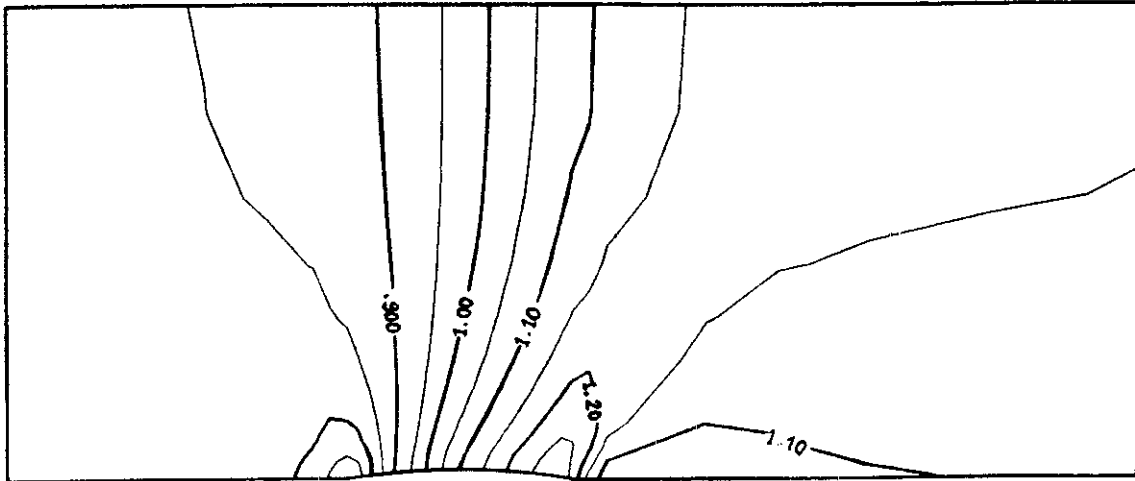


Figure 5.1 Isovaleurs du nombre de Mach. Canal du GAMM (G21) avec entrée subsonique et sortie supersonique. Equations d'Euler.

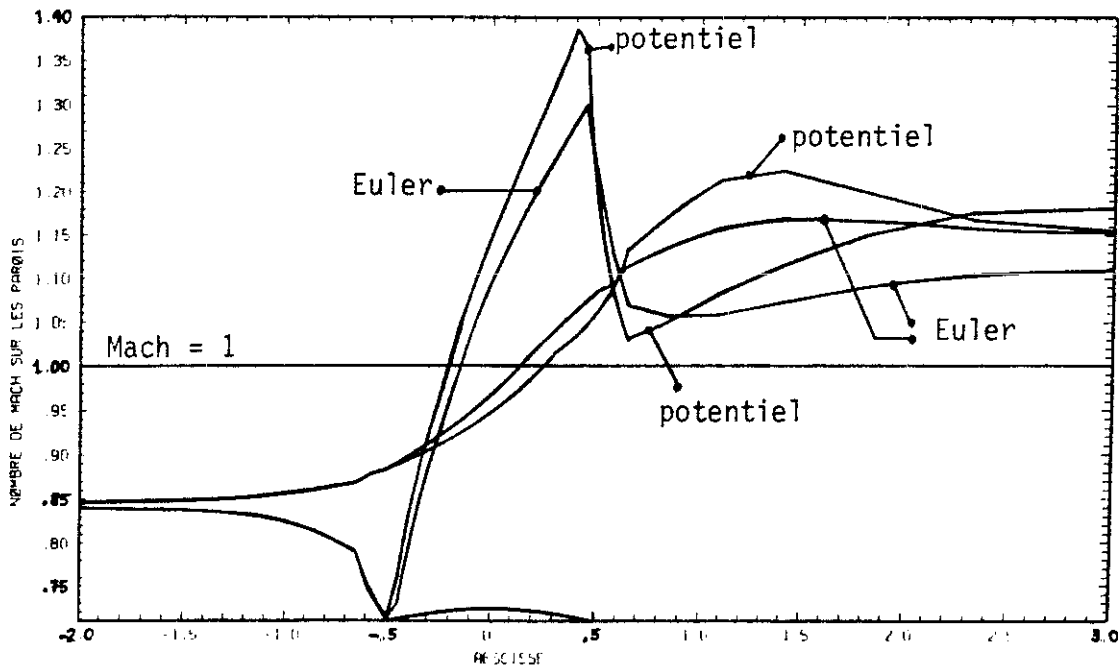


Figure 5.2 Nombre de Mach sur les parois pour le problème précédent. Comparaison du code potentiel de ce chapitre et du code Euler volumes finis.

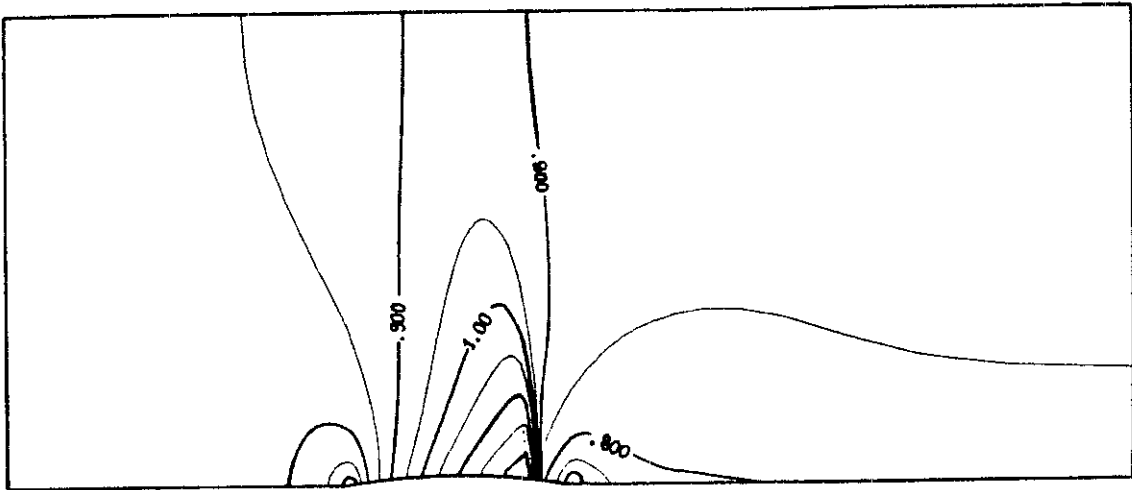


Figure 5.3 Isovaleurs du nombre de Mach. Canal du GAMM (G41) d'entrée subsonique et pression de sortie $\Pi = 0.623512$. Equations d'Euler.

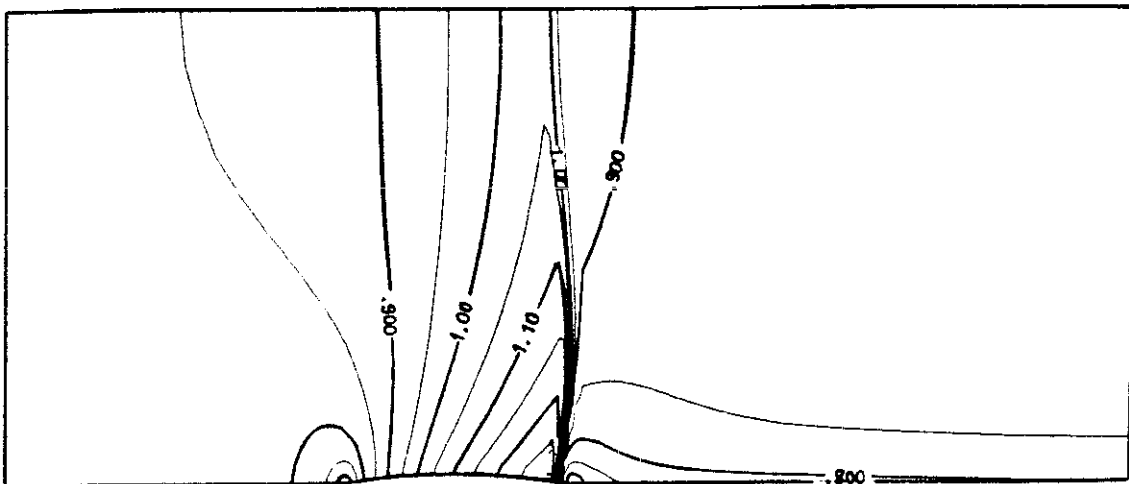


Figure 5.4 Isovaleurs du nombre de Mach. Canal du GAMM, pression de sortie $\Pi = 0.61$. Equations d'Euler.

purement numériques entre les méthodes ; signalons que ces deux calculs ont été effectués sur le même maillage grossier G21 (35×11 points). Le débit total calculé par le code Euler :

$$(5.4) \quad D_{\text{sub.super}} = 2.0266$$

reste toutefois très proche de la valeur (2.0271) obtenue en (3.1). Pour les deux tests qui suivent, nous avons imposé des conditions aux limites de type entrée et sortie subsoniques (avec pression imposée en sortie). Le premier test correspond à la valeur de la pression imposée au GAMM workshop :

$$(5.5) \quad \Pi = 0.623512 \quad .$$

Notre résultat (Figure 5.3) est très voisin de ceux publiés antérieurement (voir par exemple LERAT-SIDES et VEUILLOT-VIVIAND [28], STOUFFLET [2], ou MONTAGNE [18]). Le second test, non publié antérieurement à notre connaissance, consiste à choisir

$$(5.6) \quad \Pi = 0.61 \quad .$$

Dans ce cas, la ligne sonique est présente sur toute la largeur du canal et le choc qui suit bloque effectivement tout l'écoulement. Signalons aussi qu'un raffinement de maillage (les figures 5.3 et 5.4 sont résultats de calculs avec le maillage G41 proposé au workshop) n'affecte pas la convergence.

Ces deux derniers tests, joints à nos résultats antérieurs, montrent que l'équation du potentiel transsonique devient très mal adaptée à la prédiction d'écoulements internes. Aussi HABASHI-HAFEZ-KOTIUGA [10,11]

ont proposé d'enrichir le modèle transsonique usuel (irrotationnel isentropique isenthalpique) en incluant le saut d'entropie à la manière de HAFEZ-LOVELL [12], AMARA [1] et EL DABAGHI-PIRONNEAU [4], tout en conservant l'hypothèse d'irrotationnalité. Mais nous pensons que le fantastique développement ces dernières années des méthodes instationnaires pour les systèmes hyperboliques non-linéaires (voir par exemple VAN LEER [30], WOODWARD-COLELLA [33], YEE [34] et les diverses contributions du workshop INRIA 1983 [2]) doit permettre un calcul précis des écoulements intérieurs bloqués ou non, sans aucune procédure de "shock fitting" indispensable dans les méthodes proposées précédemment [12,1].

De plus, l'équation du potentiel transsonique conserve un intérêt théorique très grand : en bidimensionnel, un système hyperbolique non-linéaire non-banal lui est associé et des développements tant théoriques que numériques devraient prochainement voir le jour. En tridimensionnel, la théorie des systèmes hyperboliques non-linéaires ne s'applique probablement pas directement et la notion de solution entropique (satisfaisante théoriquement) pour le système couplé

$$(5.7) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\rho(|\vec{\nabla}\varphi|^2)\vec{\nabla}\varphi) = 0 \\ \rho(u^2) = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2(1-u^2)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \end{cases}$$

reste à préciser, malgré les avancées récentes de FEISTAUER-NEČAS [7] et MORAWETZ [19].

REFERENCES DU CHAPITRE 7

- [1] AMARA M., *Analyse de Méthodes d'Éléments Finis pour des Écoulements Transsoniques*, Thèse d'Etat, Université Paris 6, 1983.
- [2] ANGRAND F., DERVIEUX A., DESIDERI J.A., GLOWINSKI R. (eds), *Numerical Methods for the Euler Equations of Fluid Dynamics*, SIAM, Philadelphia, 1985.
- [3] BRISTEAU M.O., PIRONNEAU O., GLOWINSKI R., PERIAUX J., PERRIER P., POIRIER G., *On Numerical Solution of Nonlinear Problems in Fluid Dynamics by Least Squares and Finite Element Methods (II). Application to Transonic Flow Simulations*, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, vol 51, pp 363-394, 1985.
- [4] EL DABAGHI F., PIRONNEAU O., *Stream Vectors in Three Dimensional Aerodynamics*, *Numer. Math.*, vol 48, pp 561-589, 1986.
- [5] ENGQUIST B., OSHER S., *Stable and Entropy Satisfying Approximations for Transonic Flow Simulations*, *Math. of Comp.*, vol 34, n° 149, pp 45-75, 1980.
- [6] ENGQUIST B., OSHER S., *One-Sided Difference Approximations for Nonlinear Conservation Laws*, *Math. of Comp.*, vol 36, n° 154, pp 321-351, 1981.
- [7] FEISTAUER M., NEČAS J., *On the Solvability of Transonic Potential Flow Calculations*, *Z für Analysis und ihre Anwendungen*, vol 4, n° 4, pp 305-329, 1985.
- [8] GODUNOV S.K., *A Finite Difference Method for the Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics*, *Math. Sb*, vol 47, pp 271-290, 1959.
- [9] HABASHI W., HAFEZ M., *Finite Element Solutions of Transonic Flow Problems*, *AIAA J.*, vol 20, n° 10, pp 1368-1376, 1982.
- [10] HABASHI W., HAFEZ M., KOTIUGA P., *Computation of Choked and Supersonic Turbomachinery Flows by a Modified Potential Method*, *AIAA J.*, vol 23, n° 2, pp 214-220, 1985.
- [11] HAFEZ M., HABASHI W., KOTIUGA P., *Conservative Calculations of Non-Isentropic Transonic Flows*, *Int J. for Num. Meth. in Fluids*, vol 5, pp 1047-1057, 1985.

- [12] HAFEZ M., LOVELL D., *Numerical Solution of Transonic Stream Function Equation*, AIAA J., vol 21, n° 3, pp 327-335, 1983.
- [13] HAFEZ M., SOUTH J., MURMAN E., *Artificial Compressibility Methods for Numerical Solutions of Transonic Full Potential Equation*, AIAA J., vol 17, n° 8, pp 838-844, 1979.
- [14] HUGHES T., MALLET M., *A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics, III, IV*, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., vol 58, pp 305-328, pp 329-336, 1986.
- [15] JAMESON A., *Iterative Solution of Transonic Flows over Airfoils and Wings, Including Flows at Mach 1*, Comm. Pure Appl. Math., vol 27, pp 283-309, 1974.
- [16] JOLY P., *Présentation de Synthèse des Méthodes de Gradient Conjugué*, Math. Modelling and Numerical Analysis, vol 20, n° 4, pp 639-665, 1986.
- [17] MAC CORMACK R.W., *Numerical Solution of the Interaction of a Shock Wave with a Laminar Boundary Layer*, in 2nd International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Lect Notes in Physics, n° 8, Springer, Berlin, pp 151-163, 1971.
- [18] MONTAGNE J.L., *Etude de Schémas Numériques Décentrés en Dynamique des Gaz Bidimensionnelle*, La Recherche Aérospatiale, n° 1984-5, pp 323-338, 1984.
- [19] MORAWETZ C., *On a Weak Solution for a Transonic Flow Problem*, Comm. Pure Appl. Math., vol 38, pp 797-818, 1985.
- [20] MORICE P., VIVIAND H., *Equations de Conservation et Condition d'Irréversibilité pour les Ecoulements Transsoniques Potentiels*, C.R. Acad. Sc. Paris, série B, t 291, pp 235-238, 1980.
- [21] MURMAN E., *Analysis of Embedded Shock Waves Calculated by Relaxation Methods*, AIAA J., vol 12, n° 5, pp 626-633, 1974.
- [22] NAG, *Numerical Algorithms Group, NAG Fortran Library Manual*, Oxford, 1982.
- [23] NEDELEC J.C., *Mixed Finite Elements in \mathbb{R}^3* , Numer Math, vol 35, pp 315-341, 1980.
- [24] OSHER S., *Numerical Solution of Singular Perturbation Problems and Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, in Math Studies n° 47 (Axelsson-Franck-Van der Sluis Eds), North Holland, Amsterdam, pp 179-205, 1981.

- [25] OSHER S., HAFEZ M., WHITLOW W., *Entropy Condition Satisfying Approximations for the Full Potential Equation of Transonic Flow*, Math of Comp, vol 44, n° 169, pp 1-29, 1985.
- [26] OSHER S., Communication personnelle, 1986.
- [27] RAVIART P.A., THOMAS J.M., *A Mixed Finite Element Method for 2nd Order Elliptic Problems*, in Proceedings, Rome 1975 (Dold-Eckmann Eds), Lecture Notes in Maths, vol 606, pp 292-315, 1977.
- [28] RIZZI A., VIVIAND H. (Eds), *Numerical Methods for the Computation of Inviscid Transonic Flows with Shock Waves*, Notes on Num. Fluid Mechanics, vol 3, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1981.
- [29] SEDOV L., *Mécanique des Milieux Continus*, tome 2, éditions MIR, Moscou, 1973, 1975.
- [30] VAN LEER B., *Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method*, J. of Comp Phys, vol 32, pp 101-136, 1979.
- [31] VILA J.P., *Sur la théorie et l'Approximation Numérique de Problèmes Hyperboliques Non Linéaires. Application aux Equations de Saint Venant et à la Modélisation des Avalanches de Neige Dense*, Thèse, Université Paris 6, 1986.
- [32] VIVIAND H., VEUILLOT J.P., *Méthodes Pseudo-Instationnaires pour le Calcul d'Écoulements Transsoniques*, ONERA T.P., n° 1978-4, 1978.
- [33] WOODWARD P., COLELLA P., *The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks*, J. of Comp Phys, vol 54, pp 115-173, 1984.
- [34] YEE H.C., *Construction of Explicit and Implicit Symmetric TVD Schemes and Their Applications*, J of Comp Phys, vol 68, pp 151-179, 1987.