

THESE

présentée à
l'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 6
spécialité **Mathématiques Appliquées**

par **François DUBOIS**

Sujet de la Thèse :

**QUELQUES PROBLEMES LIES AU CALCUL
D' ECOULEMENTS DE FLUIDES PARFAITS
DANS LES TUYERES.**

Soutenue le 5 janvier 1988 devant le jury composé de

MM.	P.A. RAVIART	Président
	A.Y. LEROUX	
	O. PIRONNEAU	Rapporteurs
	B. MERCIER	
	P. MORICE	
	J.C. NEDELEC	Examineurs

Chapitre 7

Eléments finis mixtes, schéma d'Engquist-Osher
et algorithme de Newton pour la résolution numérique
de l'équation du potentiel transsonique .

La formulation mixte vitesse-fonction courant pour le problème transsonique présentée au Chapitre 4 ne nous a pas permis de traiter de façon entièrement satisfaisante la non-linéarité du problème et les conditions aux limites adaptées aux tuyères. Dans ce chapitre, nous adaptons la formulation mixte d'Amara à l'aide de deux modifications. Tout d'abord, nous proposons (partie I) d'utiliser un décentrage de l'impulsion basé sur le schéma d'ENGQUIST-OSHER [5,6] au lieu d'un décentrage de la densité. Par ailleurs, notre étude du Chapitre 6 permet de prendre en compte de façon naturelle les conditions aux limites physiques du problème, grâce à un couplage entre la fonction courant et l'impulsion le long de la frontière. Des tests numériques sur un profil NACA 0012 non-portant (partie II) montrent le haut niveau de fiabilité fourni par la méthode. Le problème intérieur est traité dans la troisième partie. Des écoulements très variés ont été calculés numériquement. Toutefois, des difficultés de convergence dans certains cas transsoniques nous ont conduit à proposer dans la partie IV une prise en compte encore plus précise de la non-linéarité du problème. Nous présentons ensuite une formulation primale entièrement nouvelle de l'équation du potentiel transsonique.

I - DESCRIPTION DE LA METHODE NUMERIQUE

1 - RAPPEL DE LA FORMULATION MIXTE

Nous commençons par rappeler brièvement la formulation mixte d'AMARA [1] décrite dans la première partie du Chapitre 4. Seules les notations importantes sont rappelées dans l'exposé qui suit. L'écoulement, supposé potentiel, est décrit par le champ de vitesse \vec{u} et la fonction courant ψ , discrétisés par des fonctions respectivement constante discontinue ($\vec{u} \in Q_0^h$) et biaffine continue ($\psi \in \bar{Q}_1^D \oplus Q_1^h$). Les conditions aux limites imposent de faire une partition de la frontière $\Gamma \equiv \partial\Omega$:

$$(1.1) \quad \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N .$$

Sur Γ_D , la valeur de la fonction courant est imposée, alors que sur Γ_N , on se donne la composante tangentielle de la vitesse :

$$(1.2) \quad \begin{cases} \psi = \bar{\psi} \text{ sur } \Gamma_D, & \bar{\psi} \in \bar{Q}_1^D \\ \vec{u} \cdot \vec{\tau} = g \text{ sur } \Gamma_N, & g \in \bar{Q}_0^N . \end{cases}$$

Le traitement de la non-linéarité fait appel à un décentrage de la densité : on écrit l'impulsion par unité de volume \vec{q} sous la forme :

$$(1.3) \quad \vec{q} = \bar{\rho}(\vec{u}, \psi) \vec{u}$$

où $\bar{\rho}$ est la densité décentrée, constante dans chaque élément, déterminée par le choix d'un élément amont KA pour chaque élément fini K

du maillage, et par l'un des décentrages décrits aux relations (1.14) et (1.24) à (1.26) du Chapitre 4. Le problème non-linéaire discret fait appel à une formulation mixte (\vec{u}, ψ) des équations aux dérivées partielles du modèle (conservation de la masse et irrotationnalité). On peut l'écrire :

$$(1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} \in Q_0^h \times Q_0^h \quad , \quad \psi - \bar{\psi} \in Q_1^h \\ \int_{\Omega} \bar{\rho}(\vec{u}, \psi) \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx - \int_{\Omega} \vec{r} \text{rot} \psi \cdot \vec{v} \, dx = 0 \quad \forall \vec{v} \in Q_0^h \times Q_0^h \\ - \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{r} \text{rot} \varphi \, dx = \int_{\partial\Omega} g \varphi \, d\gamma \quad \forall \varphi \in Q_1^h \end{array} \right.$$

L'algorithme de résolution est un algorithme de *point fixe* : partant d'un champ de vitesse \vec{u}^0 et d'une densité décentrée $\bar{\rho}^0$, la fonction courant ψ^1 est calculée grâce à la résolution d'un système linéaire symétrique défini positif, puis \vec{u}^1 et $\bar{\rho}^1$ sont issus d'un calcul explicite, et ainsi de suite.

Au Chapitre 4, nous avons montré la performance de cette méthode pour le calcul d'écoulements transsoniques, mais nous avons mis en évidence plusieurs limitations :

- l'algorithme de point fixe limite dans la pratique le choix de la fonction de décentrage $\bar{\rho}$ puisque seul l'un des quatre proposés s'est avéré stable (cf. partie II du Chapitre 4) ;
- les conditions aux limites imposent une partition (1.1) de la frontière qui peut ne pas être adaptée à la physique du problème, comme nous l'avons remarqué lors de l'étude du problème intérieur (partie III du Chapitre 4).

2 - EQUATIONS DU PROBLEME DISCRETISE

Afin de pallier aux inconvénients que nous venons de rappeler, nous avons transformé la discrétisation du problème transsonique potentiel, tout en conservant la formulation mixte par rapport au couple (\vec{u}, ψ) et le traitement de la non-linéarité à l'aide d'un décentrage par élément amont. Tout d'abord, les conditions aux limites sont maintenant décrites par une partition de la frontière qui généralise la relation (1.1) :

$$(1.5) \quad \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R$$

Les conditions aux limites sur Γ_D et Γ_N sont données comme précédemment, alors que pour chaque arête a de Γ_R , on impose la compatibilité entre le flux de masse calculé par différence entre les valeurs $\psi_{i_{a_2}}$ et $\psi_{i_{a_1}}$ de la fonction courant et ce même flux calculé par un argument plus physique. On a :

$$(1.6) \quad \psi_{i_{a_2}} - \psi_{i_{a_1}} - l_a \phi_a = 0$$

où l_a est la longueur de l'arête a . Nous remarquons que la relation (1.6) n'est autre que l'intégration de

$$(1.7) \quad \vec{q} - \text{rot } \psi = 0$$

le long de l'arête a (Figure 1.1). Précisons le cadre fonctionnel adapté à la relation (1.5) : la composante Γ_R contient NAFR arêtes et on impose à Γ_R de contenir exactement le même nombre NAFR de sommets du maillage \mathcal{F}_h . Ces sommets de $\Gamma_R \cap \mathcal{F}_h$ engendrent un espace vectoriel discret \tilde{Q}_1^R (obtenu en bloquant à zéro les noeuds du

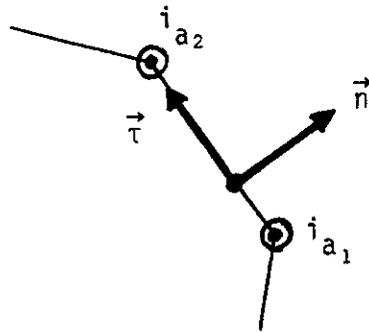


Figure 1.1 Arête a de la portion Γ_R de la frontière.

maillage qui n'appartiennent pas à Γ_R). De même (et comme au Chapitre 4), Γ_D contient NBL sommets où la fonction courant est bloquée à la valeur imposée $\bar{\psi}$, où $\bar{\psi}$ appartient à \bar{Q}_1^D . Enfin, les sommets restants du maillage engendrent un espace vectoriel Q_1^h de dimension NSI. La fonction courant est donc représentée sous la forme (cf. Figure 1.2) :

$$(1.8) \quad \psi = \psi_1 + \psi_2 + \bar{\psi} \in Q_1^h \oplus \tilde{Q}_1^R \oplus \bar{Q}_1^D .$$

Par ailleurs, le champ de vitesse est un vecteur constant dans chaque élément, ie

$$(1.9) \quad \vec{u} \in Q_0^h \times Q_0^h .$$

Supposons pour le moment donnée la prise en compte de la non-linéarité, d'une part grâce à un choix de l'impulsion spécifique \vec{q} :

$$(1.10) \quad Q_0^h \times Q_0^h \ni \vec{u} \mapsto \vec{q} = \vec{q}(\vec{u}) \in Q_0^h \times Q_0^h$$

en ce qui concerne le schéma intérieur, et d'autre part grâce à un flux de masse ϕ :

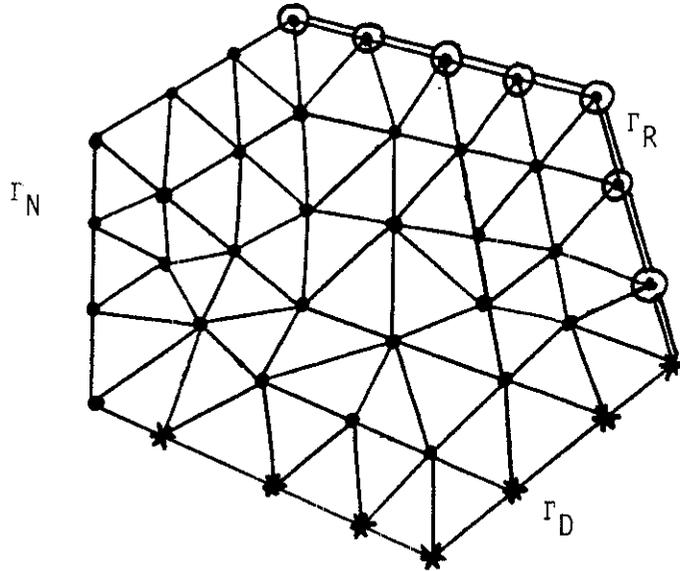


Figure 1.2 Illustration de la décomposition (1.8) des degrés de liberté liés aux sommets du maillage. Les sommets engendrant Q_1^h sont représentés par un point, les arêtes de Γ_R sont en double trait et les sommets qui définissent \tilde{Q}_1^R sont symbolisés par un cercle ; les noeuds bloqués de \bar{Q}_1^D sont notés avec une étoile.

$$(1.11) \quad \phi_a = \phi(\vec{u}, CL)$$

pour le traitement des conditions aux limites CL sur Γ_R . Les équations du problème s'écrivent alors simplement. On intègre (1.7) contre un vecteur \vec{v} arbitraire dans $Q_0^h \times Q_0^h$:

$$(1.12) \quad \int_{\Omega} \vec{q}(\vec{u}) \cdot \vec{v} \, dx - \int_{\Omega} \text{rot } \psi \cdot \vec{v} \, dx = 0 \quad \forall \vec{v} \in Q_0^h \times Q_0^h$$

et pour la nullité du tourbillon, la fonction test φ appartient à Q_1^h seulement. Il vient après intégration par parties :

$$(1.13) \quad \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \text{rot } \varphi \, dx + \int_{\Gamma} g \varphi \, d\gamma = 0 \quad \forall \varphi \in Q_1^h .$$

Jointes à (1.6), les équations (1.12)(1.13) fournissent

2NE + NSI + NAFR relations

(où NE est le nombre d'éléments de \mathcal{T}_h), soit exactement le nombre de degrés de liberté nécessaire à la description du couple (\vec{u}, ψ) .

Pour réécrire (1.12)-(1.13) de façon non variationnelle, nous introduisons l'opérateur non-linéaire $\vec{Q}(\vec{u})$ défini par

$$(1.14) \quad \begin{cases} Q_0^h \times Q_0^h \ni \vec{u} \mapsto \vec{Q}(\vec{u}) \in Q_0^h \times Q_0^h \\ \forall K \in \mathcal{T}_h, \vec{Q}(\vec{u})|_K = \int_K \vec{q}(\vec{u}) \, dx \end{cases} ,$$

la matrice B à 2NE lignes et NSI colonnes :

$$(1.15) \quad (B\varphi, \vec{v}) = - \int_{\Omega} \text{rot } \varphi \cdot \vec{v} \, dx, \quad \varphi \in Q_1^h, \quad \vec{v} \in Q_0^h \times Q_0^h$$

et enfin le vecteur colonne G d'ordre NSI :

$$(1.16) \quad Q_1^h \ni \varphi \mapsto G\varphi = \int_{\Gamma} g \varphi \, d\gamma .$$

Le problème transsonique est finalement écrit sous forme mixte au moyen du système d'équations non-linéaires :

$$(1.17) \quad \begin{cases} \vec{u} \in Q_0^h \times Q_0^h, \quad \psi - \bar{\psi} \in Q_1^h \oplus \tilde{Q}_1^R \\ \vec{Q}(\vec{u}) + B\psi = 0 \\ \mathbf{t}_B \vec{u} - G = 0 \\ \psi_{j_{a_2}} - \psi_{j_{a_1}} - \mathbf{1}_a \phi(\vec{u}, CL) = 0 \quad \forall a \in \Gamma_R \end{cases}$$

La première équation de (1.17) comporte 2NE équations scalaires, la seconde NSI, et la troisième NAFR. Comparé au système (1.9) du Chapitre 4, l'irrotationnalité est moins bien décrite (l'espace Q_1^h des fonctions tests est toujours inclus dans l'espace correspondant proposé au Chapitre 4) mais la conservation de la masse est renforcée le long des arêtes de Γ_R , alors qu'elle n'est écrite qu'en moyenne dans chaque élément dans la méthode précédente.

3 - SCHEMA NUMERIQUE INTERIEUR

Dans ce paragraphe, nous détaillons le calcul de l'impulsion $\vec{q}(\vec{u})$ (relation (1.10)). Comme au Chapitre 4, un élément amont KA est associé à chaque élément K du maillage par un critère de flux de masse entrant maximal, et en toute rigueur, il faudrait écrire :

$$(1.18) \quad \vec{q} = \vec{q}(\vec{u}, \psi)$$

au lieu de (1.10), afin de rappeler que le choix de l'élément amont dépend directement de la fonction courant. Une fois KA déterminé, l'impulsion \vec{q}_K dans l'élément fini K n'est fonction que des vitesses \vec{u}_K et \vec{u}_{KA} , et non du champ total $\{\vec{u}\}$; on note donc simplement :

$$(1.19) \quad \vec{q}_K = \vec{q}(\vec{u}_{KA}, \vec{u}_K) \quad , \quad K \text{ élément de } \mathcal{T}_h \quad .$$

Nous avons cherché une fonction \vec{q} *dérivable* et prenant en compte la non-linéarité de façon réaliste. Au Chapitre 4, paragraphe I.3, nous avons adapté l'analyse d'OSHER-HAFEZ-WHITLOW [25] pour construire

le décentrage N° 2 (relation (1.24)). Nous retenons intégralement cette démarche dans la version définitive de notre schéma ; nous la rappelons rapidement.

A l'interface entre KA et K, un problème de Riemann relatif à l'équation scalaire

$$(1.20) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \left(1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_0^2} (1-\rho^{\gamma-1}) \right)^{\frac{1}{2}} \right] = 0$$

modélise correctement l'évolution locale du fluide si l'écoulement est perpendiculaire à cette interface. Le schéma d'ENGQUIST-OSHER [5,6] est alors bien adapté au calcul numérique du flux de masse normal à l'interface : c'est la somme de la partie subsonique du flux $e(|\vec{u}_K|)$ dans l'élément courant K et de la composante supersonique $g(|\vec{u}_{KA}|)$ dans l'élément amont KA. Les expressions de e et g font intervenir la vitesse du son c évaluée grâce à l'hypothèse d'enthalpie totale constante selon :

$$(1.21) \quad c^2(|\vec{u}|) = \frac{1}{M_0^2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 (1 - |\vec{u}|^2) \right)$$

et la densité ρ , calculée à partir de c grâce à la relation

$$(1.22) \quad \rho(|\vec{u}|) = \left\{ M_0^2 c^2(|\vec{u}|) \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

puisque le fluide reste partout isentropique dans le modèle utilisé.

On a alors

$$(1.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} e(|\vec{u}|) = \begin{cases} \rho(|\vec{u}|) |\vec{u}| & \text{si } |\vec{u}|^2 \leq c^2(|\vec{u}|) \\ Q_{\max} & \text{si } |\vec{u}|^2 \geq c^2(|\vec{u}|) \end{cases} \\ g(|\vec{u}|) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\vec{u}|^2 \leq c^2(|\vec{u}|) \\ \rho(|\vec{u}|) |\vec{u}| - Q_{\max} & \text{si } |\vec{u}|^2 \geq c^2(|\vec{u}|) \end{cases} \end{array} \right. .$$

Puisque l'écoulement est normal à l'interface, il est dirigé selon le vecteur \vec{u}_K , et on choisit finalement l'expression de l'impulsion :

$$(1.24) \quad \vec{q}(\vec{u}_{KA}, \vec{u}_K) = \left[g(|\vec{u}_{KA}|) + e(|\vec{u}_K|) \right] \frac{\vec{u}_K}{|\vec{u}_K|} .$$

Dans le Chapitre 5 de sa Thèse [1], AMARA a proposé d'adapter à l'équation du potentiel transsonique le schéma d'Engquist-Osher qu'il utilisait déjà pour l'équation des petites perturbations transsoniques. Une relation du type (1.24) lui permet aussi de calculer l'impulsion, mais la différence avec notre algorithme porte sur $|\vec{u}_{KA}|$: AMARA propose d'utiliser une interpolation amont $|\vec{u}_A|$ du module de la vitesse en suivant la ligne de courant passant par le centre de l'élément K (cf. Figure 3.3.7 de [1]), alors que nous nous contentons du module $|\vec{u}_{KA}|$ dans l'élément amont.

Notons aussi que lors d'une première tentative (juillet 1986) pour construire la méthode numérique, nous avons choisi un *splitting vectoriel* du flux de masse, en remplaçant (1.24) par la décomposition :

$$(1.25) \quad \vec{q}(\vec{u}_{KA}, \vec{u}_K) = \vec{g}(\vec{u}_{KA}) + \vec{e}(\vec{u}_K) .$$

où les fonctions vectorielles \vec{g} et \vec{e} sont calculées à partir des fonctions scalaires g et e décrites plus haut :

$$(1.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{g}(\vec{u}_{KA}) = g(|\vec{u}_{KA}|) \frac{\vec{u}_{KA}}{|\vec{u}_{KA}|} \\ \vec{e}(\vec{u}_K) = e(|\vec{u}_K|) \frac{\vec{u}_K}{|\vec{u}_K|} . \end{array} \right.$$

4 - CONDITIONS AUX LIMITES

a) Généralités

La décomposition (1.5) de la frontière et la formulation (1.17) du problème global font apparaître les conditions aux limites sous forme linéaire et sous forme non-linéaire. Les conditions aux limites de type linéaire sont liées d'une part à la condition de Dirichlet $\bar{\psi}$ pour la fonction courant et d'autre part à la composante tangentielle g de la vitesse (cf. relations (1.2)). Les conditions non-linéaires sont nouvelles ; elles portent sur le flux de masse ϕ_a le long des arêtes de Γ_R (relations (1.6)). Dans la suite de ce paragraphe, nous nous proposons de détailler le calcul de la fonction $\phi(\vec{u}, CL)$ introduite à la relation (1.11).

Nous nous fixons une arête a appartenant à Γ_R ; nous notons \vec{u} le vecteur vitesse \vec{u}_K dans l'élément fini K qui contient cette arête (Figure 1.3).

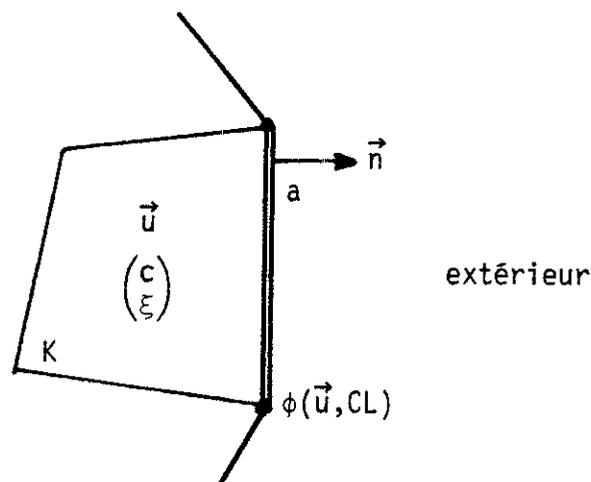


Figure 1.3 Notations

La fonction $\phi(\vec{u}, CL)$ représente le flux de masse passant à travers a , issu de l'interaction du champ \vec{u} et de la condition à la limite "CL". De façon plus précise, les différentes conditions aux limites physiquement réalistes n'interviennent dans le problème couplé (1.6) que par l'intermédiaire du flux de masse $\phi(.,.)$. Au Chapitre 6, nous avons étudié un schéma "volumes finis" pour les équations d'Euler monodimensionnelles. La condition limite est décrite par un flux (vectoriel) résultat de l'interaction (grâce à un problème de Riemann partiel) du champ \vec{u} dans l'élément du bord du domaine et des variables imposées à la limite. Ces dernières peuvent être de différents types : état donné à l'infini, entrée subsonique (enthalpie totale et entropie imposées), paroi rigide, entrée subsonique (pression statique imposée) et sortie supersonique. Ces quatre cas demeurent identiques pour le modèle transsonique potentiel, mais l'étude du Chapitre 6 (équations d'Euler complètes) doit être adaptée.

La donnée d'un état à l'infini (ou d'une entrée supersonique) est exactement équivalente à la donnée d'un vecteur vitesse \vec{u}_∞ ; on notera $\phi_\infty(\vec{u})$ le flux de masse correspondant. Une sortie subsonique revient ici encore à se donner la valeur P de la pression statique, d'où la notation $\phi_p(\vec{u})$. Une frontière de type sortie supersonique n'est liée à aucune donnée numérique et nous notons $\phi_S(\vec{u})$ le flux correspondant. Pour l'entrée subsonique, notre traitement reviendra à imposer l'angle entre la vitesse et la normale au domaine, d'où le choix $\phi_\theta(\vec{u})$. Quant à la paroi rigide, le calcul de $\phi_M(\vec{u})$ est immédiat.

Pour terminer ce paragraphe, nous introduisons des variables non-conservatives adaptées à une analyse le long de la normale. La donnée du vecteur vitesse \vec{u} permet le calcul de la vitesse du son $c(\vec{u})$ et de la densité $\rho(\vec{u})$ grâce aux relations (1.21)-(1.22). Par ailleurs, nous notons ξ la vitesse normale à l'interface :

$$(1.27) \quad \xi(\vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{n} \quad .$$

Nous décrivons l'interaction le long de l'arête a par l'intermédiaire du couple

$$(1.28) \quad W(\vec{u}) = t(c(\vec{u}), \xi(\vec{u})) \quad .$$

b) Etat imposé à l'infini

Considérons d'abord le cas où une vitesse à l'infini \vec{u}_∞ est imposée. Nous formons

$$W_\infty = t(c(\vec{u}_\infty), \xi(\vec{u}_\infty))$$

et il suffit de pouvoir exprimer ϕ_∞ en fonction de W et W_∞ pour fermer le problème. Nous proposons de décrire cette interaction par un problème de Riemann relatif aux *équations d'Euler isentropiques* (ou de Saint-Venant, voir VILA [31] par exemple) puisque le modèle potentiel suppose l'isentropie de tout l'écoulement. Plus précisément, nous considérons le problème de Riemann (1.29)-(1.30) suivant :

$$(1.29) \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \xi \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \xi \\ \rho \xi^2 + \frac{1}{\gamma M_0^2} \rho \gamma \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$(1.30) \quad (\rho, \xi)(x, 0) = \begin{cases} (\rho(\vec{u}), \xi(\vec{u})) & x < 0 \\ (\rho(\vec{u}_\infty), \xi(\vec{u}_\infty)) & x > 0 \end{cases}$$

Les équations de Saint-Venant (1.29) admettent deux champs vraiment non-linéaires de valeurs propres $\xi_{\mp c}$ et d'invariants de Riemann associés $\xi_{\mp} \pm \frac{2c}{\gamma-1}$, avec une vitesse du son c donnée par

$$(1.31) \quad c^2 = \frac{\gamma P}{\rho} = \frac{1}{M_0^2} \rho^{\gamma-1} .$$

La solution multivaluée du problème (1.29)-(1.30) (Chapitre 6) permet de calculer rapidement le flux numérique vectoriel d'OSHER [24]; le flux de masse ϕ_∞ cherché en est simplement la première composante.

Rappelons rapidement la construction de cette solution multivaluée (les variables conservatives $U, {}^tU = (\rho, \rho\xi)$, et non conservatives $W, {}^tW = (c, \xi)$, ne sont pas redéfinies lorsqu'il n'y a pas ambiguïté). La 1-courbe (de détente) issue de $U_g \equiv {}^t(\rho_g, \rho_g \xi_g) = {}^t(\rho(\vec{u}), \rho(\vec{u})\xi(\vec{u}))$ coupe la 2-courbe issue de $U_d \equiv {}^t(\rho_d, \rho_d \xi_d) = {}^t(\rho(\vec{u}_\infty), \rho(\vec{u}_\infty)\xi(\vec{u}_\infty))$ en $U_2 = {}^t(\rho_2, \rho_2 \xi_2)$. L'état sonique sur la 1-courbe (resp. la 3-courbe) issue de U_g (resp. U_d) est noté U_1' (resp. U_3'); il vérifie $\xi_1' - c_1' = 0$ (resp. $\xi_3' + c_3' = 0$). Il vient facilement :

$$(1.32) \quad c_1' = \xi_1' = \frac{2}{\gamma+1} c_g + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \xi_g$$

$$(1.33) \quad \begin{cases} c_2 = \frac{1}{2} c_g + \frac{\gamma-1}{4} \xi_g + \frac{1}{2} c_d - \frac{\gamma-1}{4} \xi_d \\ \xi_2 = \frac{1}{\gamma-1} c_g + \frac{1}{2} \xi_g - \frac{1}{\gamma-1} c_d + \frac{1}{2} \xi_d \end{cases}$$

$$(1.34) \quad c_3' = -\xi_3' = \frac{2}{\gamma+1} c_d - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \xi_d .$$

Le flux de masse ϕ_∞ est la somme algébrique des flux de masse des états présents simultanément en $x=0$, comptés avec le signe moins s'ils appartiennent à une détente rétrograde. Rappelons que toutes ces notions ont été détaillées au Chapitre 6 (voir aussi la Figure 1.4). On a donc :

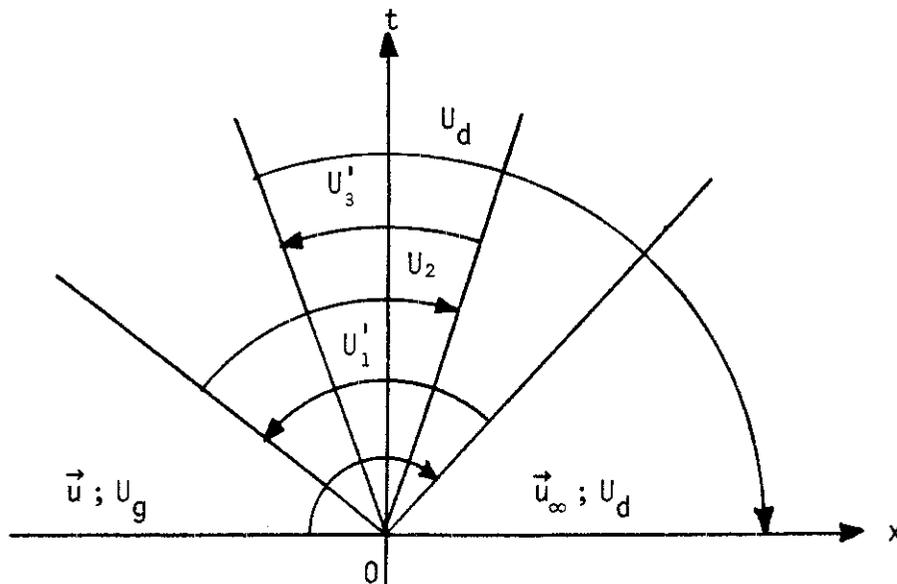


Figure 1.4 Solution multivaluée du problème de Riemann pour les équations de Saint Venant.

$$(1.35) \quad \left\{ \begin{aligned} \phi_\infty(\vec{u}) = \phi(\vec{u}_g, \vec{u}_d) = & \epsilon_g \rho_g \xi_g + \epsilon_1' \rho_1' \xi_1' + \\ & + \epsilon_2 \rho_2 \xi_2 + \epsilon_3' \rho_3' \xi_3' + \epsilon_d \rho_d \xi_d \end{aligned} \right.$$

avec $\vec{u}_g \equiv \vec{u}$, $\vec{u}_d \equiv \vec{u}_\infty$, et

$$(1.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_g = \begin{cases} 1 & \xi_g \geq c_g \\ 0 & \xi_g < c_g \end{cases} \\ \varepsilon_1' = \begin{cases} 1 & \xi_2 \geq c_2 \text{ et } \xi_g < c_g \\ -1 & \xi_2 < c_2 \text{ et } \xi_g \geq c_g \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \varepsilon_2 = \begin{cases} 1 & -c_2 \leq \xi_2 < c_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \varepsilon_3' = \begin{cases} 1 & \xi_d \geq -c_d \text{ et } \xi_2 < -c_2 \\ -1 & \xi_d < -c_d \text{ et } \xi_2 \geq -c_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \varepsilon_d = \begin{cases} 1 & \xi_d < -c_d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

Dans les paragraphes suivants, nous adaptons la prise en compte des conditions aux limites relatives aux équations d'Euler proposée dans la troisième partie du Chapitre 6 au cas des équations de Saint Venant.

c) Sortie subsonique

Le calcul de $\phi_p(\vec{u})$ fait appel à un problème de Riemann partiel. Plus précisément, on relie l'état de gauche U_g (qui représente la vitesse \vec{u} dans l'élément frontière : ${}^tU_g = (\rho(\vec{u}), \rho(\vec{u})\xi(\vec{u}))$) à la variété d'équation $p = P$, grâce à une 1-onde de détente. L'état

intermédiaire U_2 est donc obtenu comme intersection de la 1-courbe contenant U_g et de la variété $\{p=P\}$. On a donc :

$$(1.37) \quad \begin{cases} c_2 = \sqrt{\gamma} \left(\frac{1}{\gamma M_0^2} \right)^{\frac{1}{2\gamma}} p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \\ \xi_2 = \xi_g + \frac{2}{\gamma-1} (c_g - c_2) \end{cases}$$

Les états U_3' et U_d n'existent plus dans ce problème, et U_1' reste calculé grâce à (1.32). On en déduit l'expression de ϕ_p :

$$(1.38) \quad \phi_p(\vec{u}) = \varepsilon_g \rho_g \xi_g + \varepsilon_1' \rho_1' \xi_1' + \varepsilon_2 \rho_2 \xi_2$$

avec $\vec{u}_g \equiv \vec{u}$ et

$$(1.39) \quad \begin{cases} \varepsilon_g = \begin{cases} 1 & \xi_g \geq c_g \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \varepsilon_1' = \begin{cases} 1 & \xi_2 \geq c_2 \text{ et } \xi_g < c_g \\ -1 & \xi_2 < c_2 \text{ et } \xi_g \geq c_g \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \varepsilon_2 = \begin{cases} 1 & \xi_2 < c_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

d) Sortie supersonique

Ce type de condition est traité exactement comme au Chapitre 6. Si $\xi_g = \xi(\vec{u}) \geq c_g = c(\vec{u})$ alors ϕ_S est calculé à l'aide du flux de

$\rho_g \xi_g$. Mais dans le cas contraire ($\xi_g < c_g$), pour forcer la sortie à devenir supersonique, on imagine qu'un état de grande vitesse est présent à l'extérieur du domaine de calcul. Il crée donc une 1-détente dans la solution du problème de Riemann correspondant, et l'état sonique U_1' est le seul à contribuer au calcul de ϕ_S dans ce cas. On a donc finalement :

$$(1.40) \quad \phi_S(\vec{u}) = \epsilon_g \rho_g \xi_g + \epsilon_1' \rho_1' \xi_1'$$

avec $\vec{u}_g = \vec{u}$ et

$$(1.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_g = \begin{cases} 1 & \xi_g \geq c_g \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \epsilon_1' = \begin{cases} 1 & \xi_g < c_g \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

e) Entrée subsonique

Pour les équations d'Euler générales, on se donne l'enthalpie totale et l'entropie physique. Or ces deux paramètres sont supposés fixés dans le modèle potentiel scalaire. La conservation de l'entropie physique étant imposée par le choix des équations de Saint Venant pour résoudre le problème de Riemann à l'interface, nous avons retenu a priori une condition du type enthalpie totale imposée. Or cette dernière condition laisse indéterminée la direction de la vitesse, et n'en calcule que le module. Nous avons choisi très simplement de faire porter toute la vitesse sur sa composante normale ξ dans la recherche

de l'état intermédiaire U_2 , ce qui revient à se donner un angle égal à Π entre cette vitesse et la normale à l'interface. La généralisation à un angle quelconque de $] -\Pi, \Pi]$ est facile. Comme dans le cas de la sortie subsonique, une 1-courbe de détente permet de relier l'état U_g à une variété, donnée ici par l'équation

$$(1.42) \quad \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{1}{\gamma-1} c^2 = H$$

et la condition

$$(1.43) \quad \xi < 0$$

puisque la normale \vec{n} est supposée extérieure. L'état intermédiaire U_2 est solution du système d'équations

$$(1.44) \quad \begin{cases} \xi_2 + \frac{2}{\gamma-1} c_2 = \xi_g + \frac{2}{\gamma-1} c_g \equiv R_g \\ \frac{1}{2} \xi_2^2 + \frac{1}{\gamma-1} c_2^2 = H \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma-1)M_0^2} \end{cases}$$

Lorsque

$$(1.45) \quad \frac{\gamma-1}{2} R_g^2 < 2H$$

alors le système (1.44) a une seule solution telle que $\xi_2 < 0$:

$$(1.46) \quad \begin{cases} \xi_2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} R_g - \frac{2}{\gamma+1} \sqrt{(\gamma+1)H - R_g^2} \\ c_2 = \frac{\gamma-1}{2} (R_g - \xi_2) \end{cases}$$

et le flux de masse $\phi_\theta(\vec{u})$ est donné par les équations (1.38)-(1.39).

f) Paroi rigide

Ce dernier cas est de loin le plus simple. La condition limite exprime que la matière ne traverse pas la paroi correspondante, donc nous avons :

$$(1.47) \quad \phi_M(\vec{u}) = 0$$

Comme cette dernière condition ne dépend pas du champ de vitesse \vec{u} présent dans la dernière maille, on a également

$$(1.48) \quad d\phi_M(\vec{u}) = 0 \quad .$$

5 - ALGORITHME DE NEWTON

a) Généralités

Nous étudions maintenant la résolution du système non-linéaire discret (1.17). La non-linéarité est représentée par les fonctions $\vec{u} \mapsto \vec{Q}(\vec{u})$ et $\vec{u} \mapsto \phi(\vec{u}, CL)$. Or ces fonctions sont calculées grâce aux schémas d'Engquist-Osher et d'Osher respectivement. Elles sont donc *dérivables*. Réécrivons symboliquement le système (1.17) sous la forme :

$$(1.49) \quad \begin{cases} N = 2.NE + NSI + NAFR \\ \mathbb{R}^N \ni (\vec{u}, \psi) \equiv X \mapsto F(X) \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

$$(1.50) \quad F(X) = 0 \quad .$$

L'application F est dérivable, et un algorithme de type Newton est naturellement bien adapté à la résolution de (1.50). Si $X = X^n$ est

donné, on calcule un incrément δX dans \mathbb{R}^N par la résolution du système linéaire

$$(1.51) \quad dF(X^n) \cdot \delta X + F(X^n) = 0 \quad .$$

Nous précisons d'abord comment s'effectue le calcul des nouveaux coefficients à prendre en compte pour la matrice $dF(X)$ (ils sont dûs aux termes $d\vec{Q}(\vec{u})$ et $d\phi(\vec{u}, CL)$) puis nous nous intéressons à la structure de cette matrice.

b) Calcul de $d\vec{Q}(\vec{u})$

Dans chaque élément fini K , on a, grâce aux relations (1.14) :

$$(1.52) \quad \vec{Q}(\vec{u}) = \text{vol}(K) \vec{q}(\vec{u}_{KA}, \vec{u}_K)$$

où $\text{vol}(K)$ est la mesure de K . Il suffit donc de dériver la relation (1.24) pour évaluer la matrice $d\vec{Q}(\vec{u})$. Après quelques lignes de calcul, on trouve :

$$(1.53) \quad \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{u}_{KA}} = \frac{\rho_{KA} \chi(|\vec{u}_{KA}| - c_{KA})}{|\vec{u}_K| |\vec{u}_{KA}|} \left(1 - \frac{|\vec{u}_{KA}|^2}{c_{KA}^2} \right) \begin{pmatrix} u_K \cdot u_{KA} & u_K \cdot v_{KA} \\ v_K \cdot v_{KA} & v_K \cdot v_{KA} \end{pmatrix}$$

$$(1.54) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{u}_K} &= \frac{\rho_K \chi(c_K - |\vec{u}_K|)}{|\vec{u}_K|^2} \left(1 - \frac{|\vec{u}_K|^2}{c_K^2} \right) \begin{pmatrix} u_K^2 & u_K \cdot v_K \\ u_K \cdot v_K & v_K^2 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{g(|\vec{u}_{KA}|) + e(|\vec{u}_K|)}{|\vec{u}_K|^3} \begin{pmatrix} v_K^2 & -u_K \cdot v_K \\ -u_K \cdot v_K & u_K^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

où $\vec{u}_K = (u_K, v_K)$, $\vec{u}_{KA} = (u_{KA}, v_{KA})$, $\rho_K = \rho(\vec{u}_K)$,
 $c_K = c(\vec{u}_K)$, $\rho_{KA} = \rho(\vec{u}_{KA})$, $c_{KA} = c(\vec{u}_{KA})$ et $\chi(s)$

est la fonction de Heaviside ($\chi = 1$ si $s \geq 0$, 0 sinon). La matrice $d\vec{Q}(\vec{u})$ est donc composée de blocs 2×2 ; elle couple l'élément K à son élément amont KA par l'intermédiaire des lignes qui correspondent à l'élément K.

c) Calcul de $d\phi(\vec{u}, CL)$

On vérifie facilement (cf. Chapitre 6) que chaque fonction ϕ intervenant dans les conditions aux limites non-linéaires (ie $\phi_\infty, \phi_p, \phi_S, \phi_\theta, \phi_M$) est obtenue en dérivant les seuls facteurs ρ et ξ dans chaque terme du type $\varepsilon \rho \xi$, puisque les contributions dues aux fonctions (discontinues) ε s'annulent deux à deux. Explicitons la méthode de calcul d'un terme type. La condition limite fait intervenir les variables non-conservatives W_g relatives à la vitesse $\vec{u}_g \equiv \vec{u}$ et à la normale \vec{n} (relation (1.28)) ainsi qu'un état intermédiaire \tilde{U} , ${}^t\tilde{U} = (\tilde{\rho}, \tilde{\rho}\tilde{\xi})$, calculé en utilisant les variables non-conservatives \tilde{W} (${}^t\tilde{W} = (\tilde{c}, \tilde{\xi})$). Cet état intermédiaire contribue au calcul du flux via le terme

$$(1.55) \quad \tilde{\phi} = \tilde{\varepsilon} \tilde{\rho} \tilde{\xi} .$$

On a donc :

$$(1.56) \quad d\tilde{\phi} = \tilde{\varepsilon} \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{\xi})}{\partial\tilde{W}} \cdot \frac{\partial\tilde{W}}{\partial W_g} \cdot \frac{\partial W_g}{\partial \vec{u}_g} \cdot d\vec{u}_g$$

Dans cette dernière relation, seul le facteur $\frac{\partial\tilde{W}}{\partial W_g}$ change avec le choix de l'état intermédiaire \tilde{U} . On a toujours

$$(1.57) \quad \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{\xi}}{\partial \tilde{W}} = \left(\frac{2}{\gamma-1} \frac{\tilde{\rho} \tilde{\xi}}{\tilde{c}}, \tilde{\rho} \right)$$

$$(1.58) \quad \frac{\partial W_g}{\partial \vec{u}_g} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma-1}{2} \frac{u_g}{c_g} & -\frac{\gamma-1}{2} \frac{v_g}{c_g} \\ n_x & n_y \end{pmatrix}$$

avec $\vec{n} = {}^t(n_x, n_y)$ et $\vec{u} = {}^t(u_g, v_g)$. Il suffit ensuite de dériver les relations (1.32) à (1.34), (1.37) et (1.46) par rapport à (c_g, ξ_g) pour achever le calcul de $d\tilde{\phi}$. Pour chaque cas envisagé au paragraphe 4, nous détaillons maintenant le calcul de la dérivée $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial W_g}$.

* Etat donné à l'infini. La relation (1.35) peut se réécrire, avec des notations évidentes :

$$(1.59) \quad \phi_\infty(\vec{u}_g) = \phi_g + \phi_1' + \phi_2 + \phi_3' + \phi_d$$

D'après ce qui précède, nous obtenons :

$$(1.60) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\phi_g = \varepsilon_g \rho_g \left(n_x - u_g \frac{\xi_g}{c_g} \right) du_g + \varepsilon_g \rho_g \left(n_y - v_g \frac{\xi_g}{c_g} \right) dv_g \\ d\phi_1' = \varepsilon_1' \rho_1' \left(n_x - \frac{u_g}{c_g} \right) du_g + \varepsilon_1' \rho_1' \left(n_y - \frac{v_g}{c_g} \right) dv_g \\ d\phi_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_2 \rho_2 \left(1 + \frac{\xi_2}{c_2} \right) \left(n_x - \frac{u_g}{c_g} \right) du_g + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \rho_2 \left(1 + \frac{\xi_2}{c_2} \right) \left(n_y - \frac{v_g}{c_g} \right) dv_g \\ d\phi_3' = d\phi_d = 0 \end{array} \right.$$

* Sortie subsonique. Nous réécrivons (1.38) sous la forme

$$(1.61) \quad \phi_P(\vec{u}_g) = \phi_g + \phi_1' + \phi_2^P .$$

Les termes ϕ_g et ϕ_1' sont identiques à ceux de la relation (1.59). Par contre, ϕ_2^P est calculé grâce à la relation (1.37), et sa dérivée vaut :

$$(1.62) \quad d\phi_2^P = \varepsilon_2 \rho_2 \left(n_x - \frac{u_g}{c_g} \right) du_g + \varepsilon_2 \rho_2 \left(n_y - \frac{v_g}{c_g} \right) dv_g \quad .$$

* Entrée subsonique. La relation qui donne $\phi_\theta(\vec{u})$ est analogue à (1.61) :

$$(1.63) \quad \phi_\theta(\vec{u}_g) = \phi_g + \phi_1' + \phi_2^\theta$$

Le dernier terme ϕ_2^θ , calculé au moyen de l'état intermédiaire U_2 obtenu à la relation (1.46), a une dérivée donnée par :

$$(1.64) \quad d\phi_2^\theta = \varepsilon_2 \rho_2 \left(1 + \frac{\xi_2}{c_2} \right) \left(n_x - \frac{u_g}{c_g} \right) du_g + \varepsilon_2 \rho_2 \left(1 + \frac{\xi_2}{c_2} \right) \left(n_y - \frac{v_g}{c_g} \right) dv_g \quad .$$

d) Structure de la matrice

Nous pouvons réécrire l'équation (1.51) qui définit l'algorithme de Newton par rapport à l'inconnue auxiliaire $(\delta\vec{u}, \psi' = \psi + \delta\psi)$ sous la forme :

$$(1.65) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{vol}(K) \left(\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{u}_K} \delta\vec{u}_K + \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{u}_{KA}} \delta\vec{u}_{KA} \right) + B\psi' = -\text{vol}(K)\vec{q}_K - B\bar{\psi} \\ \phantom{\text{vol}(K)} \phantom{\left(\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{u}_K} \delta\vec{u}_K + \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{u}_{KA}} \delta\vec{u}_{KA} \right)} + B\psi' = G - {}^t B \cdot \vec{u} \\ \psi'_{i_{a_2}} - \psi'_{i_{a_1}} - l_a \frac{\partial \phi}{\partial \vec{u}_g} \cdot \delta\vec{u}_g = - \left\{ \bar{\psi}_{i_{a_2}} - \bar{\psi}_{i_{a_1}} - l_a \phi(\vec{u}_g, CL) \right\} \end{array} \right.$$

Dans la dernière équation, \vec{u}_g désigne la vitesse dans l'élément qui contient l'arête a et $\bar{\psi}_{i_{a_1}}$ (resp. $\bar{\psi}_{i_{a_2}}$) n'est présent dans le second membre que si le sommet i_{a_1} (resp. i_{a_2}) est bloqué (ie appartient à Γ_D).

La matrice dF est *creuse*. Sa structure est représentée Figure 1.5. Nous l'avons rangée en mémoire en ne stockant que les éléments non-nuls (on se donne les tableaux LIGNE(m), COLONNE(m), VALEUR(m) décrivant le numéro de ligne, de colonne et la valeur numérique du $m^{\text{ième}}$ élément non nul). Nous avons utilisé une factorisation *exacte* de Gauss (avec pivot) proposée par la bibliothèque NAG [22] (sous-programmes F01BRF et F04AXF).

Nous notons que la matrice $dF(x)$ est de grande dimension, puisque son ordre est d'environ deux fois le nombre d'éléments plus le nombre de sommets, alors que la matrice du Chapitre 4 n'était que d'ordre égal au nombre de sommets.

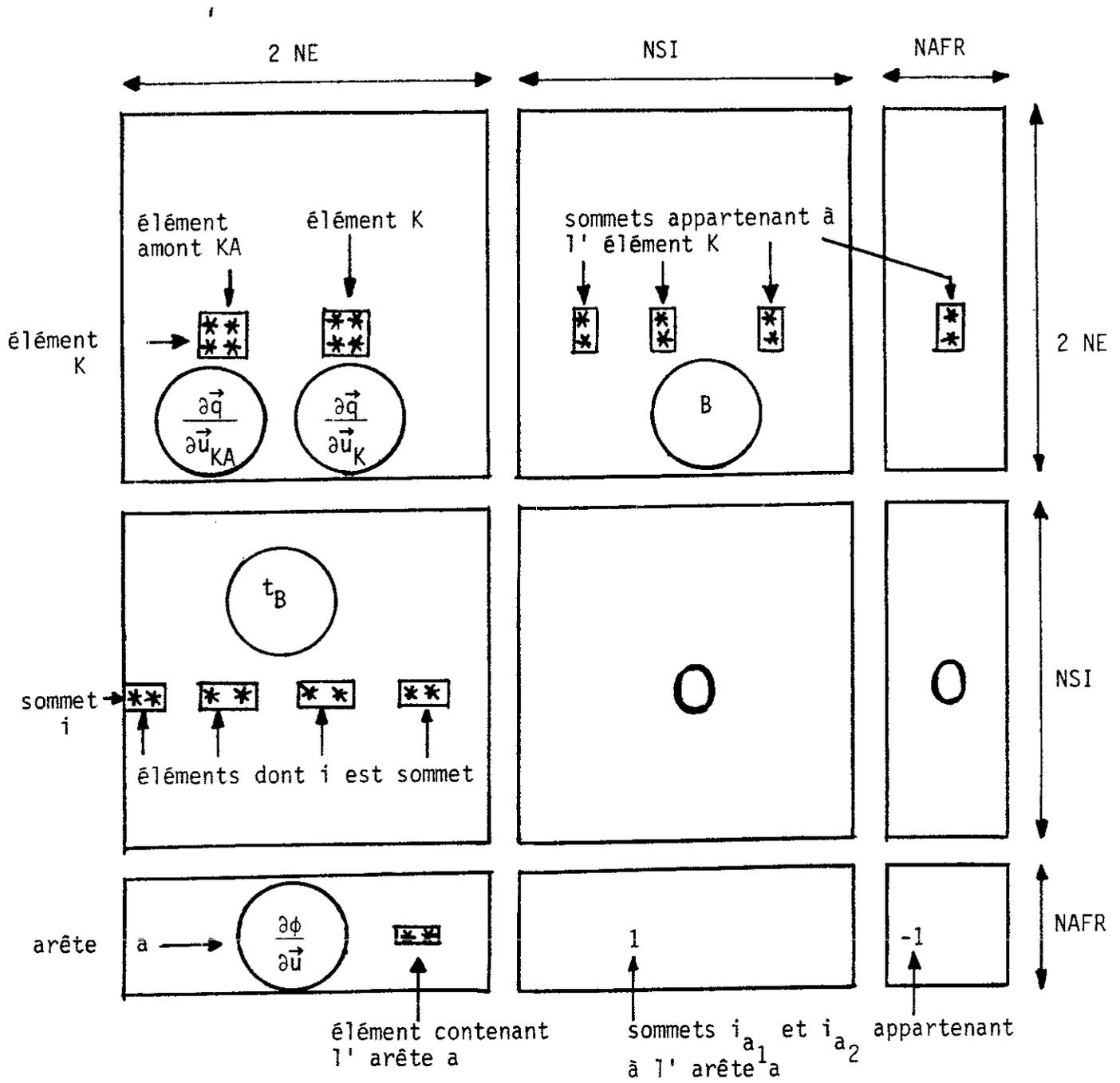


Figure 1.5 Structure de la matrice

II - TESTS NUMERIQUES SUR L'AILE NACA 0012

1 - POSITION DU PROBLEME

Comme au Chapitre 4, nous commençons par valider notre code de calcul sur l'aile NACA 0012. Nous précisons d'abord les conditions aux limites envisagées, ainsi que le maillage utilisé. La partition (1.5) de la frontière Γ nous a permis de décomposer le domaine de calcul (identique à celui utilisé au Chapitre 4) en une composante Γ_D de Dirichlet où la fonction courant est nulle, et une frontière artificielle (en pointillés sur la Figure 2.1) sur laquelle on s'est donné les conditions aux limites soit grâce à un problème de Riemann Γ_R (1.29)-(1.30), soit grâce à une donnée de vitesse tangentielle (frontière de Neumann Γ_N).

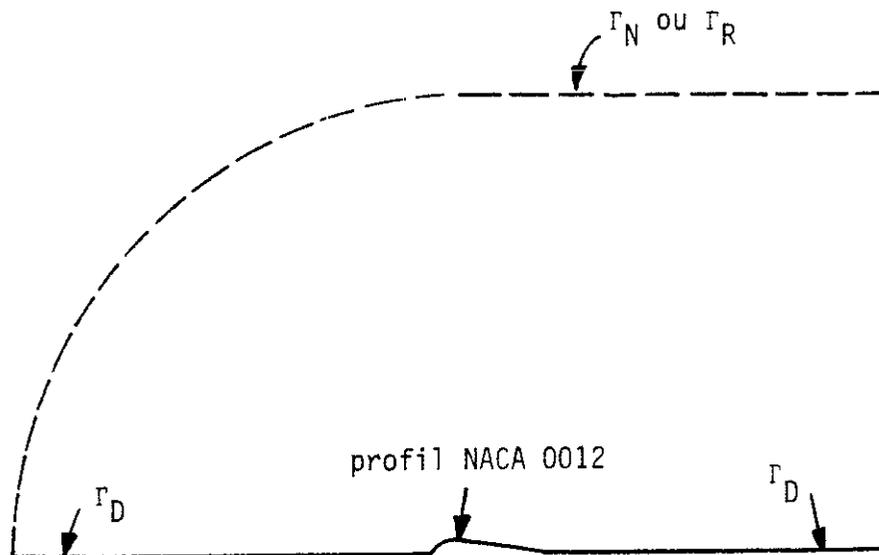


Figure 2.1 Conditions aux limites pour l'aile NACA 0012

Par ailleurs, nous avons conservé les maillages construits pour le Chapitre 4 autour du demi-profil NACA. Mais l'ordre des matrices à factoriser est maintenant d'environ 290, 1100, 4300, 9600 pour les maillages comportant respectivement 11, 21, 41, 61 points sur le demi-profil. Afin de concentrer notre effort sur le traitement des non-linéarités du problème, nous n'avons pas utilisé de méthode itérative de type gradient conjugué pour les systèmes non-symétriques (pour lesquelles nous renvoyons à JOLY [16] et aux références citées). Nous avons au contraire retenu une *factorisation exacte* de Gauss avec pivot décrite au paragraphe précédent. Par contre, le coût d'une telle procédure est très élevé. Ainsi les maillages N41 et N61 conduisent à des temps de calcul trop importants. Nous n'avons donc utilisé que les maillages N11 pour les tests et N21 pour l'exploitation du programme (Figure 2.2).

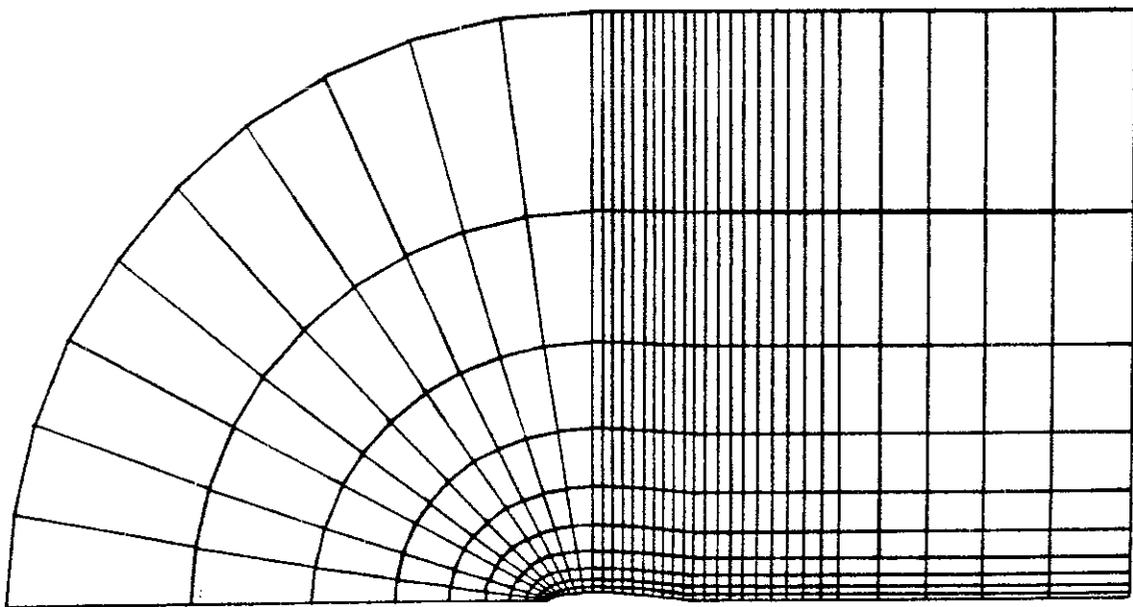


Figure 2.2 Maillage N21 autour du NACA 0012

Dans ce dernier cas, la factorisation L.U s'effectue typiquement en 10 à 20 secondes CPU sur le Cray 2 du CCVR.

L'algorithme de Newton présenté dans la première partie (relation (1.51)) n'a pas été mis en oeuvre aussi simplement. En fait, nous avons utilisé un algorithme de quasi-Newton ; l'inconnue globale $X = (\vec{u}, \psi)$ est calculée par l'algorithme sous relaxé suivant :

$$(2.1) \quad X^{n+1} = X^n + \omega^n \delta X$$

avec δX solution de

$$(2.2) \quad dF(X^m) \cdot \delta X = -F(X^n)$$

Dans ces relations, ω^n et $dF(X^m)$ sont choisis comme suit : le coefficient ω^n ($\omega^n \in [0,1]$) est adapté de sorte que l'incrément final de vitesse $\omega^n \cdot \delta \vec{u}$ ne dépasse pas 0.01 en norme L^∞ :

$$(2.3) \quad \omega^n \cdot \|\delta u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 0.01 \quad , \quad 0 \leq \omega^n \leq 1$$

et pour être complet, rappelons que le nombre de Mach de référence M_0 a toujours été choisi égal à 1 :

$$(2.4) \quad c = 1 \iff |\vec{u}| = 1 \quad .$$

Par ailleurs, la matrice $dF(X^m)$ est factorisée toutes les 10 itérations. L'entier m est donc choisi selon la relation :

$$(2.5) \quad m = 10 \cdot \text{Partie entière} \left(\frac{n}{10} \right) + 1$$

De cette façon, une courbe de convergence typique a l'allure indiquée Figure 2.3 : le résidu de la densité $\|\rho^{n+1} - \rho^n\|_{L^\infty} / \|\rho^n\|_{L^\infty}$ stationne

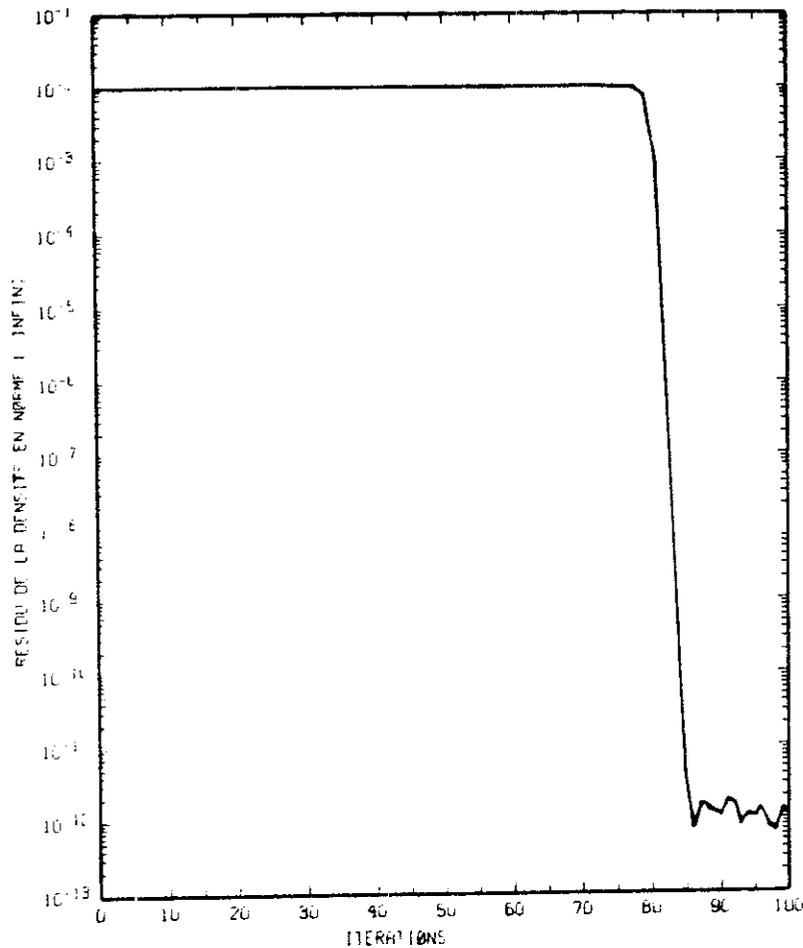


Figure 2.3 Résidu de la densité. Aile NACA 12,
 $M_{\infty} = 0.90$, itérations 250 à 350.

autour de 10^{-2} à cause de notre contrainte (2.3), puis décroît très rapidement dès qu'on s'approche de la solution.

Pour les calculs à nombre de Mach à l'infini inférieur à 1, nous avons initialisé le calcul par l'écoulement uniforme correspondant. L'algorithme prend alors 200 à 400 itérations avant de converger jusqu'à la précision de la machine. Lorsque le nombre de Mach à l'infini est plus grand que 1, nous avons initialisé le calcul par le résultat de l'expérience précédente (de Mach directement inférieur).

Dans ce dernier cas, nous avons choisi une condition de type Γ_N , pour la frontière artificielle, alors que le problème de Riemann nous a permis d'effectuer les premiers cas tests à $M_\infty = 0.8, 0.85, 0.90, 0.95$.

2 - CALCULS A MACH INFINI EGAL A 0.80 ET 0.85

Ces deux valeurs du Mach à l'infini ont été déjà considérées au Chapitre 4. Les champs d'isomachs correspondants, représentés sur les Figures 2.4 et 2.5 sont très comparables aux résultats obtenus Chapitre 4 (Figures 2.12 et 2.18). Pourtant, l'étude des courbes de coefficient de pression sur le profil (Figures 2.6 et 2.7) montre qu'avec notre nouvelle méthode, la zone supersonique est plus étendue et le nombre de Mach maximal est plus élevé. Pour le cas $M_\infty = 0.80$, la comparaison avec les auteurs du GAMM workshop [28] (voir aussi la Figure 2.17 du Chapitre 4) est très satisfaisante, puisque l'overshoot présent dans nos résultats du Chapitre 4 a disparu, et que notre nouvelle valeur minimale du coefficient de pression (≈ -0.88) se place mieux dans la fourchette $(-0.84, -0.93)$ proposée par RIZZI-VIVIAND [28]. Pour l'écoulement à $M_\infty = 0.85$, la position du choc reste correcte ($x_c \approx 0.7, 0.8$) et celui-ci est plus fort (Mach maximal ≈ 1.35). Ces deux cas tests classiques nous ont permis de valider le code de calcul et le schéma intérieur en particulier.

Le splitting vectoriel proposé aux relations (1.25)(1.26) avait donné des résultats corrects pour $M_\infty = 0.80$, mais un choc beaucoup trop fort (!) placé en bord de fuite du profil pour $M_\infty = 0.85$ (Figures 2.8 et 2.9). Nous ne l'avons donc pas utilisé pour d'autres tests. Toutefois la convergence de ce dernier cas nous a confirmé le bien-fondé d'un algorithme de type Newton pour la résolution du problème.

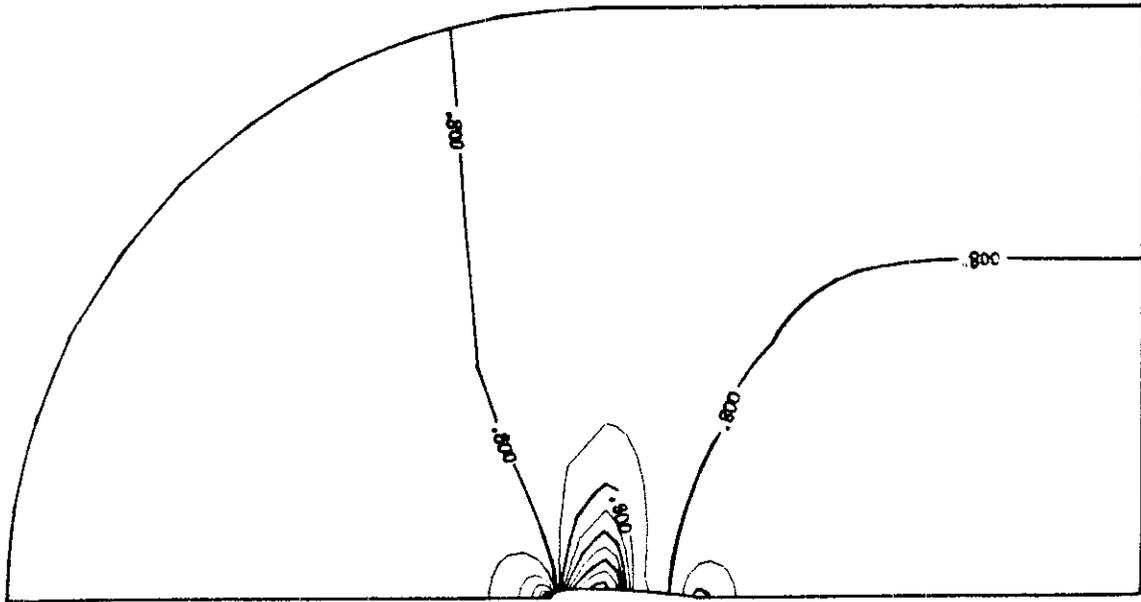


Figure 2.4 Isovaleurs du nombre de Mach.
Aile NACA 0012, $M_\infty = 0.80$, $\alpha = 0^\circ$.

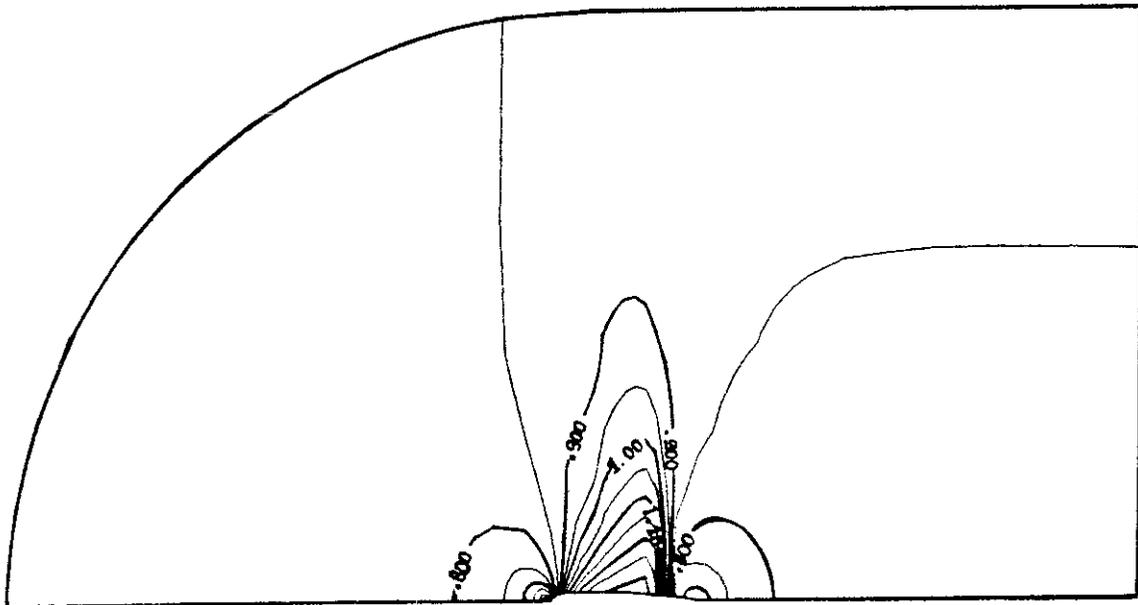


Figure 2.5 Isovaleurs du nombre de Mach.
Aile NACA 0012, $M_\infty = 0.85$, $\alpha = 0^\circ$.

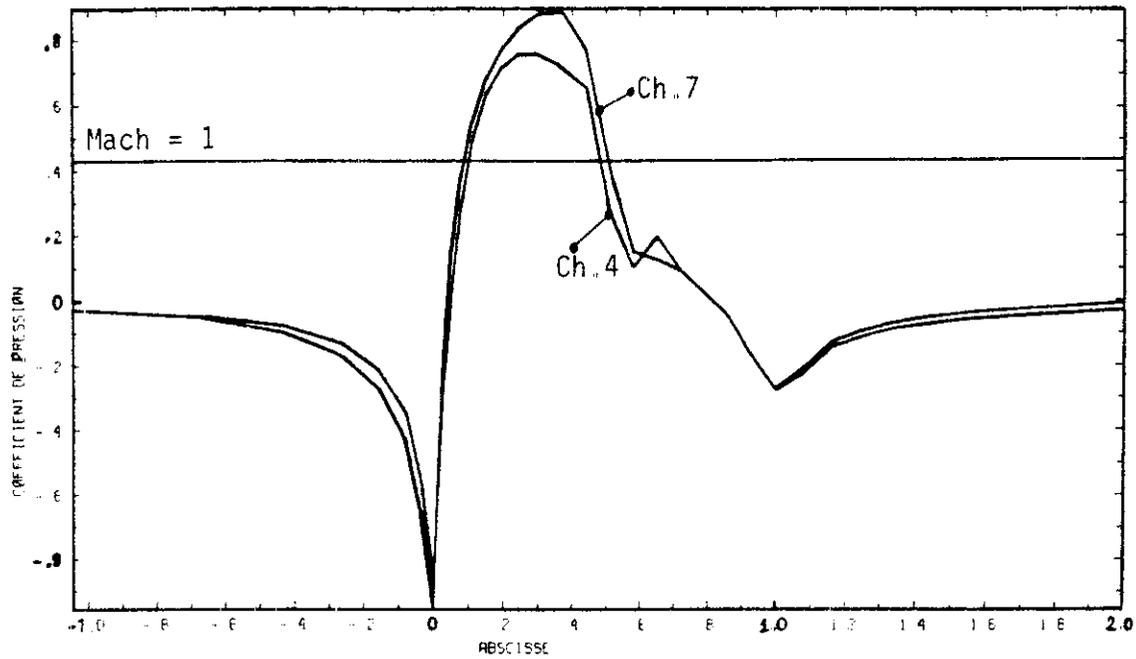


Figure 2.6 Courbes de C_p sur le profil NACA 0012, $M_\infty = 0.80$, $\alpha = 0^\circ$. Comparaison des résultats obtenus avec les méthodes des Chapitres 4 et 7.

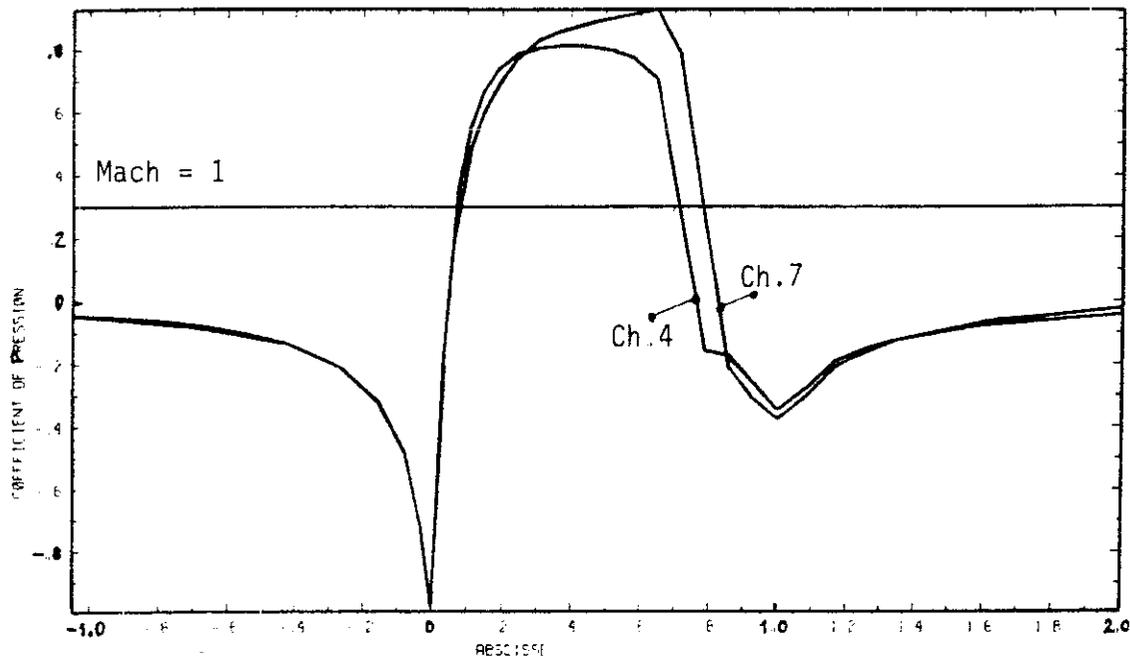


Figure 2.7 Courbes de C_p sur le profil NACA 0012, $M_\infty = 0.85$, $\alpha = 0^\circ$. Comparaison des méthodes développées aux Chapitres 4 et 7.

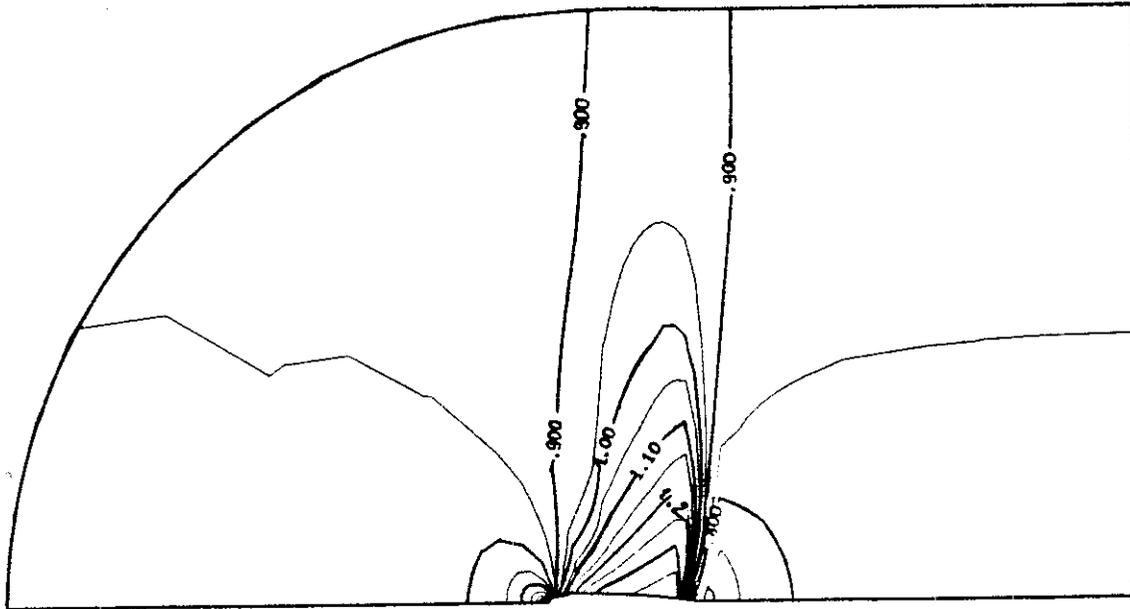


Figure 2.8 Courbes d'isomach. Aile NACA 0012, $M_\infty = 0.85$, $\alpha = 0^\circ$. Splitting vectoriel (1.25)(1.26).

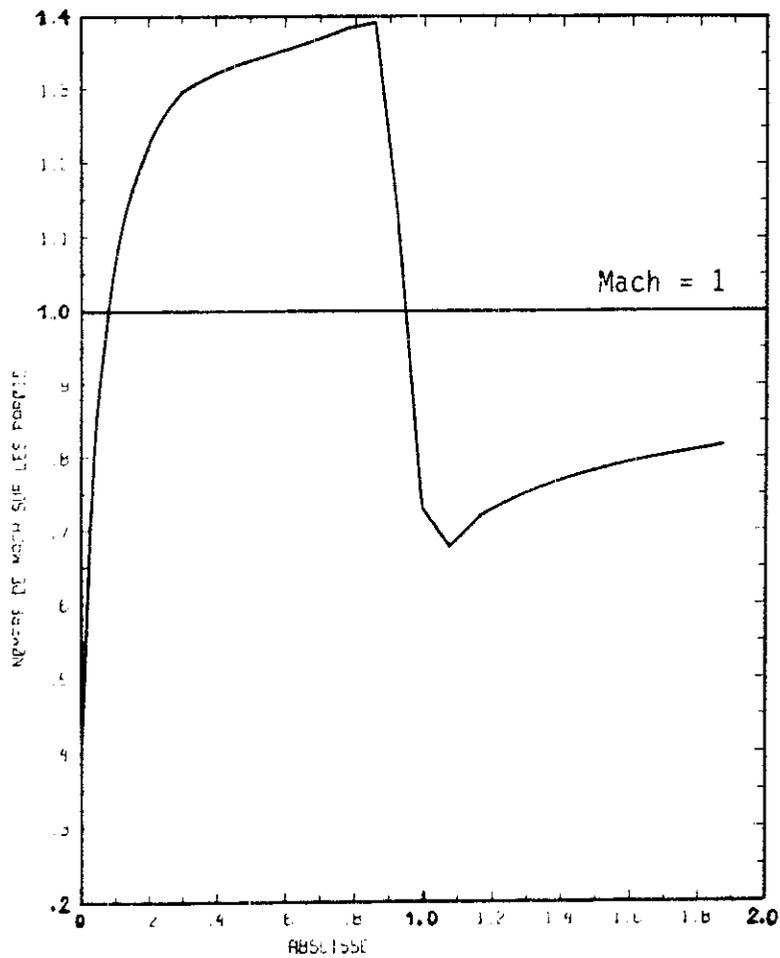


Figure 2.9 Courbe de C_p sur le profil NACA 0012, $M_\infty = 0.85$, $\alpha = 0^\circ$, splitting vectoriel.

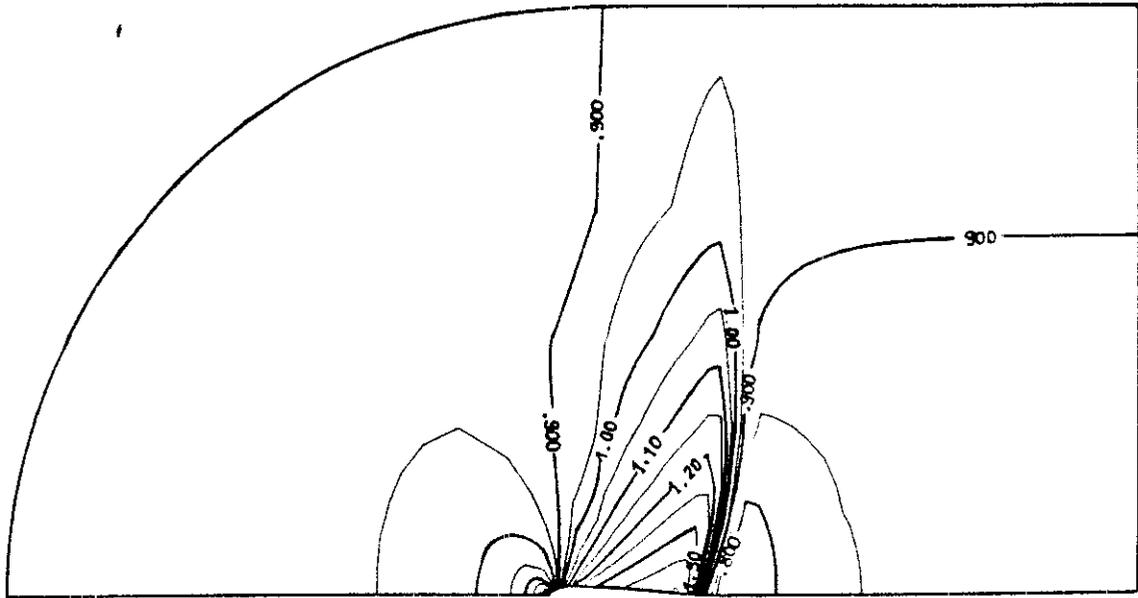


Figure 2.10 Isovaleurs du nombre de Mach. Demi-profil
NACA 0012, $M_\infty = 0.90$.

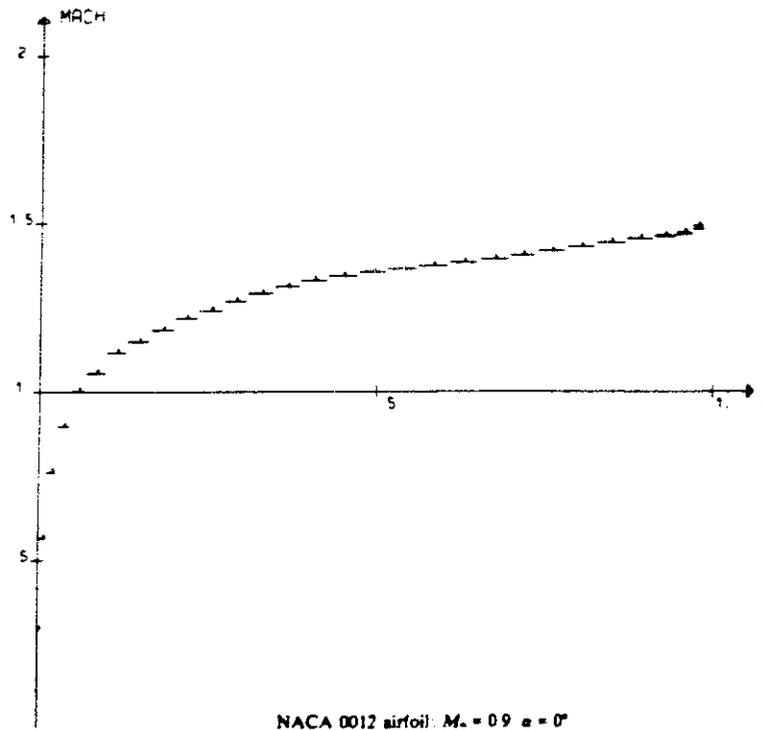
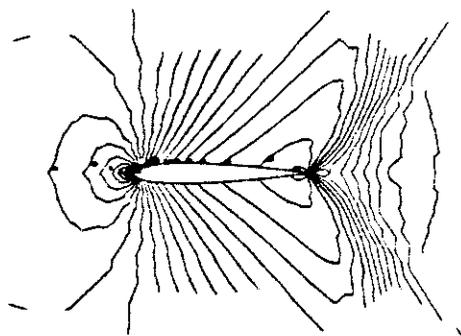


Figure 2.11 Résultats de BRISTEAU et al [3] pour ce même cas test.

3 - TEST A $M_\infty = 0.90$.

Ce cas test est beaucoup plus raide que les deux précédents. Il a nécessité 350 itérations non-linéaires au total (soit 35 factorisations de Gauss). Les cent dernières valeurs du résidu ont été portées Figure 2.3. Le choc, placé cette fois sur le bord de fuite du profil, est très développé (la zone supersonique a une extension au dessus de l'aile qui dépasse deux cordes). De plus, ce choc est clairement *oblique* (Figure 2.10), puisque les relations de Rankine-Hugoniot relatives à un choc droit, satisfaites dans les deux cas tests précédents, sont maintenant en défaut : le nombre de Mach en amont du choc (1.41) est suivi d'un état aval de nombre de Mach égal à 0.77 alors que la relation de Hugoniot relative à un choc droit nous prédit 0.67. Les comparaisons avec d'autres auteurs sont plus difficiles, et à notre connaissance, seuls BRISTEAU-PIRONNEAU-GLOWINSKI-PERIAUX-PERRIER-POIRIER [3] ont publié des résultats pour ce cas test ($M_\infty = 0.90$, $\alpha = 0^\circ$, cf. Figure 2.11). Ces auteurs obtiennent comme nous un choc oblique en bord de fuite. Le nombre de Mach maximal qu'ils obtiennent (1.5) est un peu plus fort que le nôtre, mais leur maillage est plus raffiné. Pour conclure, nous pouvons considérer que nos résultats sont très comparables à ceux de BRISTEAU et al. Ce cas test montre à la fois la robustesse de notre formulation et la précision qu'offre la méthode numérique.