

THESE

présentée à
l'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 6
spécialité **Mathématiques Appliquées**

par **François DUBOIS**

Sujet de la Thèse :

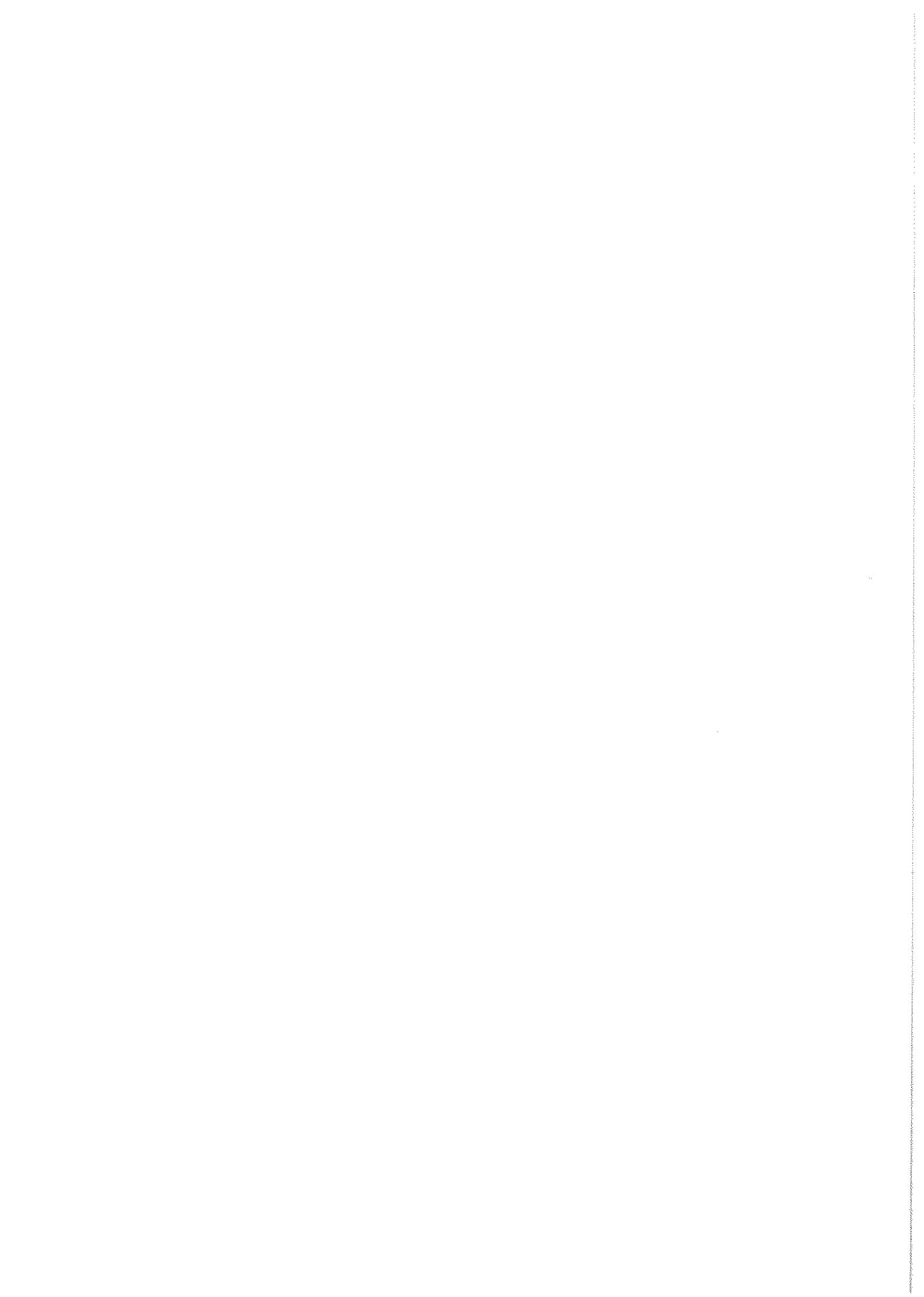
**QUELQUES PROBLEMES LIES AU CALCUL
D'ECOULEMENTS DE FLUIDES PARFAITS
DANS LES TUYERES.**

Soutenue le 5 janvier 1988 devant le jury composé de

MM.	P. A. RAVIART	Président
	A. Y. LEROUX	
	O. PIRONNEAU	Rapporteurs
	B. MERCIER	
	P. MORICE	
	J. C. NEDELEC	Examineurs

Chapitre 1

Quelques aspects de la modélisation



I - FLUIDES PARFAITS COMPRESSIBLES

Les propriétés de transport sans diffusion des fluides parfaits permettent souvent des simplifications notables dans l'étude des équations d'Euler. Aussi les modèles approchés abondent, et nous avons utilisé plusieurs d'entre eux dans les chapitres suivants. Dans un premier paragraphe nous rappelons les principaux théorèmes de la mécanique des fluides parfaits. Nous présentons ensuite les modèles les plus courants. Dans un troisième temps, nous faisons le lien entre les modèles précédents et la notion d'entropie mathématique de la théorie des systèmes hyperboliques non-linéaires. Enfin, des modèles spécifiquement monodimensionnels sont présentés au quatrième paragraphe.

1 - RAPPEL DES PRINCIPAUX THEOREMES DE LA MECANIQUE DES FLUIDES PARFAITS

Dans ce paragraphe, nous rappelons les hypothèses physiques et mathématiques qui sous-tendent le modèle le plus complet de fluide parfait compressible (équations d'Euler). Nous présentons ensuite les résultats classiques concernant ce modèle, qui motivent la construction de modèles simplifiés (paragraphe suivant).

a) Notions fondamentales

Les équations d'Euler de la mécanique des fluides parfaits expriment les lois fondamentales de conservation de la physique, l'hypothèse d'équilibre thermodynamique et des hypothèses phénoménologiques sur le comportement du fluide.

L'équilibre thermodynamique permet de définir une équation d'état qui relie les grandeurs thermodynamiques locales, densité, pression, température (ρ, p, T) , par une équation d'état. Mais l'hypothèse d'équilibre exprime d'abord qu'il existe une fonction concave f (l'énergie libre spécifique) du couple température-volume spécifique $(T, \frac{1}{\rho})$:

$$(1.1) \quad df = -s dT - p d\left(\frac{1}{\rho}\right) .$$

Par transformation de Legendre, l'énergie interne spécifique e est une fonction convexe du couple $(s, \frac{1}{\rho})$ entropie spécifique-volume spécifique :

$$(1.2) \quad e = e\left(s, \frac{1}{\rho}\right) ; \quad de = T ds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

Nous renvoyons à LANDAU-LIFCHITZ [19] pour une présentation très générale de toutes ces notions. Dans le cas d'un gaz parfait polytropique (l'hypothèse toujours réalisée dans les chapitres qui suivent), nous avons en particulier

$$(1.3) \quad e = \frac{R}{\gamma-1} \left(\exp \frac{s}{c_v} \right) \rho^{\gamma-1}$$

où la constante des gaz parfaits R , la chaleur spécifique à volume constant c_v et le rapport des chaleurs spécifiques γ sont des constantes strictement positives (et $\gamma > 1$). Par identification des dérivées partielles de $e\left(s, \frac{1}{\rho}\right)$, nous retrouvons la loi de Joule-Gay Lussac ainsi que l'équation d'état :

$$(1.4) \quad p = \rho R T$$

des gaz parfaits.

Le comportement d'un fluide parfait satisfait à des hypothèses très simples : viscosité nulle, pas de transport de chaleur et absence d'apport volumique de chaleur. Nous supposons aussi (pour simplifier) qu'aucun champ de force extérieur n'est imposé. Dans ces conditions, aucun terme de dissipation n'est présent dans les bilans de masse, d'impulsion, d'énergie, et ces lois de conservation s'expriment par des équations aux dérivées partielles du premier ordre, dues initialement à Euler :

$$(1.5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

$$(1.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

$$(1.7) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \operatorname{div}(\rho \vec{u} E + p \vec{u}) = 0$$

où \vec{u} représente le champ de vitesse, et E l'énergie totale, donnée par

$$(1.8) \quad E = e + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 .$$

Pour l'établissement des équations (1.5)-(1.7), nous renvoyons à GERMAIN [9] ou SERRIN [30]. Le système (1.5)-(1.7) comporte cinq équations (si x appartient à \mathbf{R}^3) et six inconnues scalaires (e, ρ, p, \vec{u}) . Si on lui adjoint (1.2), nous disposons d'autant d'équations que d'inconnues. Toutefois, des changements brutaux de l'équilibre thermodynamique ne sont pas incompatibles avec le modèle, et on doit rajouter aux équations (1.5)-(1.7) l'inéquation d'entropie :

$$(1.9) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho s) + \operatorname{div}(\rho \vec{u} s) \geq 0$$

qui exprime le second principe de la *thermodynamique*.

Un cas particulier très important dans la pratique est celui d'une évolution *barotrope*. Cette hypothèse exprime qu'une relation supplémentaire entre les grandeurs thermodynamiques est imposée a priori ; l'évolution du fluide peut ainsi être par exemple toujours thermalisée par le milieu extérieur, et l'on parle alors d'évolution isotherme ($T = \text{cste}$), ou bien l'évolution du fluide est assimilable à une évolution adiabatique réversible, et l'on parle d'écoulement isentropique ($s = \text{cste}$). Dans ce dernier cas, l'inéquation (1.9) est une égalité. Du point de vue algébrique, une évolution barotrope entraîne une simplification importante de la thermodynamique, et la pression est une fonction de la seule densité

$$(1.10) \quad p = P(\rho) \quad .$$

b) Evolution barotrope régulière

Dans ce cas particulier, on peut transformer l'équation (1.6) et la simplifier grâce à la conservation de la masse. Après un peu d'algèbre, et l'introduction du tourbillon $\vec{\omega}$ et de l'enthalpie spécifique h :

$$(1.11) \quad \vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}$$

$$(1.12) \quad dh(\rho) = \frac{1}{\rho} dP(\rho)$$

il vient :

$$(1.13) \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{u} + \nabla \left(\frac{1}{2} |\vec{u}|^2 + h \right) = 0 \quad .$$

Nous en déduisons deux résultats relatifs à l'énergie et au tourbillon. Supposons d'abord l'évolution stationnaire ($\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$) et introduisons l'enthalpie totale H :

$$(1.14) \quad H = \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 + h \quad .$$

Lorsqu'on dérive H le long d'une ligne de courant, on a :

$$\frac{dH}{dt} = \vec{u} \cdot \nabla H = 0$$

en vertu de (1.13). Nous avons montré le

THEOREME 1.1 (Bernoulli)

Dans un écoulement stationnaire de fluide parfait en évolution barotrope, l'enthalpie totale H est constante sur toute ligne de courant.

Nous supposons à nouveau l'évolution a priori instationnaire. Le rotationnel de l'équation (1.13) est appelé équation de la rotation :

$$(1.15) \quad \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{u}) = 0$$

et on a le

THEOREME 1.2 (Kelvin)

Pour un fluide parfait en évolution barotrope, le flux du tourbillon à travers une surface qu'on suit dans son mouvement est constant au cours du temps.

Mais le résultat le plus spectaculaire concerne le transport du vecteur $\frac{\vec{\omega}}{\rho}$. Développons l'équation (1.15). On obtient facilement

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + (\operatorname{div} \vec{u})\omega_i + (\vec{u} \cdot \nabla)\omega_i - \omega_j \partial_j u_i = 0$$

Compte tenu de (1.5) et de l'identité

$$(1.16) \quad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla$$

il vient

$$\frac{d\omega_i}{dt} - \frac{\omega_i}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \omega_j (\partial_j u_i)$$

soit après division par ρ :

$$(1.17) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = (\vec{\nabla} \vec{u}) \cdot \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) .$$

Cette dernière relation s'énonce sous la forme suivante :

THEOREME 1.3

Dans un écoulement de fluide parfait en évolution barotrope, le vecteur $\frac{\vec{\omega}}{\rho}$ est transporté par le mouvement.

Nous retiendrons le cas particulier important du mouvement irrotationnel :

THEOREME 1.4 (Lagrange)

Si à un instant particulier l'écoulement d'un fluide parfait est irrotationnel dans un volume \mathcal{V} , alors il reste irrotationnel aux instants ultérieurs lorsqu'on suit \mathcal{V} dans son mouvement, tant que l'évolution reste barotrope.

c) Evolution discontinue

Les pertes de barotropie d'un écoulement de fluide parfait sont avant tout dues aux discontinuités possibles de l'écoulement. Les relations de saut de Rankine-Hugoniot expriment la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie à travers une surface Σ . Comme les équations d'Euler (1.5)-(1.7) sont invariantes par transformation de Galilée (voir par exemple LANDAU-LIFCHITZ [20]), nous pouvons supposer immobiles le point d'étude P et le plan tangent à Σ en ce point. Notons \vec{n} la normale associée. Si le flux de masse

$$(1.18) \quad q = \rho \vec{u} \cdot \vec{n}$$

est nul au point P , alors Σ est une discontinuité de contact, et on établit facilement que le tourbillon est alors une *mesure* puisque la vitesse tangentielle est discontinue sur Σ . Si le flux (1.18) est non-nul, on le suppose positif en orientant convenablement \vec{n} , et les relations de Rankine-Hugoniot prennent dans ce cas la forme simple suivante :

$$(1.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\rho \vec{u} \cdot \vec{n}] = 0 \\ [\rho (\vec{u} \cdot \vec{n})^2 + p] = 0 \\ [\vec{u} \times \vec{n}] = 0 \\ [H] = 0 \end{array} \right.$$

$$(1.20) \quad [s] > 0 \quad .$$

où $[\varphi]$ désigne la discontinuité $\varphi_2 - \varphi_1$ du champ φ à travers Σ (Figure 1.1). On en déduit les relations suivantes

$$(1.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\rho] > 0 \\ [\vec{u} \cdot \vec{n}] < 0 \\ [p] > 0 \end{array} \right.$$

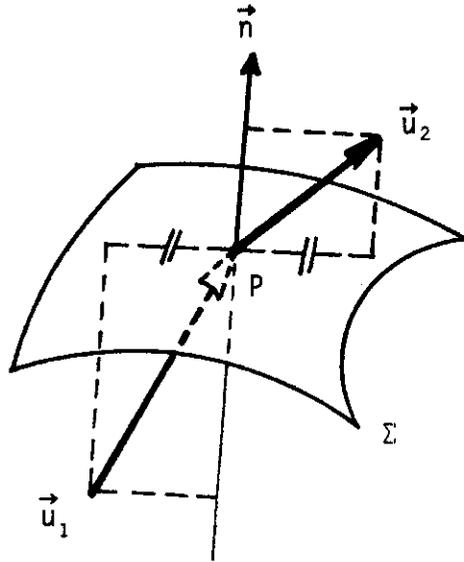


Figure 1.1 Onde de choc stationnaire

toutes équivalentes à (1.20), qui expriment qu'un choc physiquement admissible est toujours une *compression*.

A travers une onde de choc, le saut d'entropie (1.20) entraîne une perte de barotropie de l'écoulement ; en particulier les hypothèses du Théorème 1.4 ne sont plus satisfaites. Nous pouvons toutefois décrire le saut du tourbillon à travers une onde de choc Σ .

THEOREME 1.5 (HADAMARD [17])

Soit Σ la surface d'une onde de choc stationnaire. Le tourbillon $\vec{\omega}$ est une fonction au voisinage de Σ , discontinue à la traversée de Σ et l'on a :

$$(1.22) \quad [\vec{\omega}] = \vec{rot}_\Gamma [\vec{u} \cdot \vec{n}]$$

où \vec{rot}_Γ est le rotationnel surfacique sur Σ .

DEMONSTRATION DU THEOREME 1.5

La distribution $\vec{\omega}$ est une fonction puisque la composante tangentielle de la vitesse est continue à la traversée de Σ . Le vecteur normal

\vec{n} peut être prolongé à un voisinage de Σ dans \mathbb{R}^3 (NEDELEC [26], voir aussi le Chapitre 2), et le prolongement obtenu \vec{N} vérifie

$$(1.23) \quad \text{rot } \vec{N} = 0$$

On décompose alors le champ de vitesse \vec{u} en une composante régulière \vec{v}

$$(1.24) \quad \vec{v} = \vec{u} - \varphi \vec{N}, \quad \varphi = \vec{u} \cdot \vec{N}$$

et une composante $\varphi \vec{N}$, discontinue sur Σ . Le tourbillon du vecteur \vec{v} est continu à travers Σ donc nous avons

$$[\vec{\omega}] = [\text{rot}(\varphi \vec{N})].$$

Mais $\text{rot}(\varphi \vec{N}) = \nabla \varphi \times \vec{n}$ compte tenu de (1.23). En se plaçant en un point de la surface Σ , on a :

$$\text{rot}(\varphi \vec{N})|_{\Sigma} = \text{rot}_{\Gamma}(\vec{u} \cdot \vec{n})$$

puisque $\varphi \equiv \vec{u} \cdot \vec{n}$ sur Σ . Nous en déduisons le résultat annoncé par simple différence entre les deux faces de la discontinuité. ■

En aval du choc, l'écoulement n'est donc plus barotrope ni irrotationnel, et les relations (1.12)-(1.13) sont en défaut. L'enthalpie spécifique h est maintenant définie par

$$(1.25) \quad h = e + \frac{p}{\rho}, \quad dh = T ds + \frac{1}{\rho} dp$$

et l'équation (1.13) doit être remplacée par

$$(1.26) \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{u} + \nabla h - T \nabla s = 0$$

compte tenu de l'expression de $\frac{1}{\rho} \nabla p$ issue de (1.25), avec l'enthalpie

totale H toujours calculée à l'aide de la relation (1.14). L'équation (1.26) est connue sous le nom de Théorème de CROCCO [5]. En particulier, pour un écoulement bidimensionnel stationnaire d'enthalpie totale constante, (1.26) permet un calcul explicite du tourbillon en fonction du gradient d'entropie :

$$(1.27) \quad \omega = \frac{T}{|\vec{u}|^2} \vec{u} \times \nabla s$$

et AMARA [1] avait utilisé cette remarque pour résoudre numériquement les équations d'Euler stationnaires.

2 - PRESENTATION DES PRINCIPAUX MODELES

Les équations d'Euler complètes (1.5)-(1.7) présentées au premier paragraphe constituent le modèle fondamental pour toutes les études qui suivent. Nous les avons d'ailleurs utilisées sous cette forme aux Chapitres 6 et 7 de ce travail. Mais le nombre important d'équations et d'inconnues a motivé le développement de modèles simplifiés, valables dans de vastes régions de l'écoulement réel.

a) Equations de Saint Venant

Ce sont les équations d'Euler d'un fluide en évolution barotrope, qui décrivent en particulier l'évolution isentropique d'un gaz parfait, ou bien des écoulements en eau peu profonde (shallow water) étudiés par Saint Venant. Les inconnues (ρ, \vec{u}) vérifient le système de lois de conservation

$$(1.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} P(\rho) \end{array} \right. = 0$$

avec une fonction $P(\rho)$ définie dans la pratique par

$$(1.29) \quad P(\rho) = \text{cste} \cdot \rho^\gamma$$

pour des valeurs de γ égales à 1, 1.4, 2 qui correspondent respectivement à une loi isotherme, isentropique et aux équations "shallow water". Ce modèle a été utilisé aux Chapitres 5 et 7.

b) H-système

Les écoulements étudiés en aérodynamique externe et interne sont le plus souvent uniformes "à l'infini amont", et l'on en cherche une solution stationnaire. Dans ces conditions, l'enthalpie totale, constante sur chaque ligne de courant si l'évolution est barotrope (Théorème 1.1) est une constante dans toute la zone d'évolution isentropique du fluide puisque l'entropie et l'enthalpie totale sont supposées fixées en amont, indépendamment de la ligne de courant. De plus, les relations de Rankine-Hugoniot à travers un choc stationnaire (1.19) montrent que l'enthalpie totale H est continue à travers les chocs. S'il est possible de décrire le champ de vitesses en termes de lignes de courant, l'enthalpie totale est donc constante dans tout le domaine. Pour un gaz parfait polytropique, on a :

$$(1.30) \quad H = \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$$

et cette dernière relation permet de calculer la pression comme fonction du seul couple densité-impulsion :

$$(1.31) \quad p(\rho, \rho \vec{u}) = \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\rho H - \frac{|\rho \vec{u}|^2}{2\rho} \right) .$$

Il suffit donc de prendre en compte les lois de conservation de la masse et de l'impulsion pour fermer le modèle fluide :

$$(1.32) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u} & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} p(\rho, \rho \vec{u}) & = 0 \end{cases}$$

Ce système, proposé entre autres par VIVIAND-VEUILLOT [32] a les mêmes solutions stationnaires que les équations d'Euler si les conditions aux limites amont sont isentropiques et isenthalpiques, comme nous venons de le voir. Et RIZZI-ERICKSSON [28] vont même jusqu'à identifier le H-système et les équations d'Euler complètes. Nous préférons suivre la démarche originale de VIVIAND-VEUILLOT [32] et considérer le système (1.32) comme un système pseudo-stationnaire particulier pour l'approximation des solutions stationnaires des équations d'Euler.

c) Equation du potentiel transsonique

Nous envisageons maintenant l'étude d'écoulements stationnaires, isentropiques, isenthalpiques et irrotationnels à l'infini amont. Grâce au Théorème 1.4, cet écoulement reste irrotationnel tant que l'évolution est barotrope. Mais grâce au Théorème de Crocco, on peut relier le tourbillon créé par le choc au gradient d'entropie. Si le choc reste de force

modérée (ie un nombre de Mach amont inférieur à 1.4 dans les applications) alors le saut d'entropie, qui varie comme le cube du saut de pression, reste faible et on le néglige ainsi que son gradient. Le tourbillon est donc lui aussi négligé (ce qui est licite dans le cas bidimensionnel, cf (1.27)). Nous pouvons donc imposer une représentation du champ de vitesse du type :

$$(1.33) \quad \vec{u} = \nabla\phi$$

et lorsque le domaine n'est pas simplement connexe, on ajoute à (1.33) une fonction spéciale prenant en compte les circulations non-tourbillonnantes du champ de vitesse (voir Chapitre 2). Le comportement reste par ailleurs isenthalpique et isentropique, donc la conservation (1.30) de l'enthalpie totale H s'écrit :

$$\frac{|\vec{u}|^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} S_0 \rho^{\gamma-1} = \frac{u_0^2}{2} + \frac{c_0^2}{\gamma-1}$$

où S_0 , u_0 , c_0 sont respectivement l'entropie (adimensionnalisée), la vitesse et la célérité du son d'un état de référence. Le choix le plus courant

$$(1.34) \quad u_0 = 1 \quad , \quad S_0 = \frac{1}{\gamma}$$

conduit à une expression explicite de la densité comme fonction du module de la vitesse :

$$(1.35) \quad \rho = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 (1 - |\vec{u}|^2) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

où $M_0 = u_0/c_0$. On ferme le problème grâce à l'équation de conservation de la masse :

$$(1.36) \quad \operatorname{div} \left[\rho (|\nabla \phi|^2) \nabla \phi \right] = 0$$

Le système (1.35)(1.36) caractérise l'équation du potentiel transsonique (Transonic Full Potential Equation, en anglais). Il a été proposé très tôt (voir par exemple COURANT-FRIEDRICHS [4]). Sur un plan théorique, le *changement de type* des équations (elliptique en zone subsonique, hyperbolique dans les régions supersoniques dans le cas bidimensionnel) qui caractérise un comportement transsonique, est couplé à la *non-linéarité* du problème, très générale en mécanique des fluides. L'étude théorique et numérique de ce modèle a conduit à de nombreux travaux durant les décennies passées (cf. COLE-COOK [3] et les références incluses), liés le plus souvent à une reformulation dans le plan de l'hodographe (voir par exemple COURANT-FRIEDRICHS [4] ou LANDAU-LIFCHITZ [20]). Nous reviendrons aux Chapitres 3, 4 et 7 de ce travail à l'équation du potentiel.

d) Petites perturbations transsoniques

Afin de simplifier encore davantage le modèle précédent, des lois de similarité pour les écoulements transsoniques ont été proposées par VON KARMAN [33]. Pour l'étude d'un profil d'épaisseur relative δ placé le long de l'axe Ox , on peut développer le champ de vitesse $\vec{q} = (q_x, q_y)$ sous la forme :

$$(1.37) \quad \begin{cases} q_x = u_0 (1 + \delta^{2/3} u + \dots) \\ q_y = u_0 \delta v + \dots \end{cases}$$

En changeant d'échelle selon Oy suivant la loi :

$$(1.38) \quad \tilde{y} = \delta^{1/3} y$$

on obtient en identifiant les termes dominants dans les équations du modèle précédent les équations

$$(1.39) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(Ku - \frac{\gamma+1}{2} u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} v = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} = 0 \end{cases}$$

avec $K = (1 - M_\infty^2) / \delta^{2/3}$,

qui caractérisent le modèle dit des petites perturbations transsoniques.

Notons ϕ le potentiel associé à la seconde équation de (1.39), et y au lieu de \tilde{y} ; on obtient

$$(1.40) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(K - \frac{\gamma+1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0$$

qui est l'équation des petites perturbations (Transonic Small Disturbance, en anglais). Elle est aussi de type variable suivant la valeur de $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ par rapport à $\frac{K}{\gamma+1}$, la non-linéarité est *monodimensionnelle* (le long de Ox) et cette simplicité en a fait un excellent test des premiers schémas qui capturent le choc (MURMAN-COLE [24], ENGQUIST-OSHER [8]).

3 - LIEN AVEC LES SYSTEMES HYPERBOLIQUES NON-LINEAIRES

a) Rappel sur les hyperboliques non-linéaires

L'étude mathématique des lois de conservation, entreprise dans les années 50 par GERMAIN-BADER [11], LAX [27] et GODUNOV [14] connaît ces dernières années des développements importants. Pour un exposé de l'état de l'art, que nous supposons pour l'essentiel connu du lecteur,

nous renvoyons à SMOLLER [31] ou GODLEWSKI-RAVIART [13] (des rappels rapides sont aussi donnés au Chapitre 5). La notion clef, à notre avis, de cette théorie, est celle d'*entropie mathématique* introduite par LAX [22]. Le système hyperbolique non-linéaire des lois de conservation

$$(1.41) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(U) = 0 \quad , \quad U \in \mathbb{R}^n, f_j(U) \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^d$$

admet une entropie $\eta(U)$ si l'on peut trouver des flux d'entropie associés $\varphi_j(U)$ ($j=1, \dots, d$) de sorte que

$$(1.42) \quad \begin{cases} \mathbb{R}^d \ni U \rightarrow \eta(U) \in \mathbb{R} \text{ est convexe} \\ d\varphi_j(U) = d\eta(U) \cdot df_j(U) ; j=1, \dots, d \end{cases} .$$

Pour un système du type (1.41) le plus général, une telle entropie n'existe pas. Mais la plupart des systèmes considérés précédemment admettent une (et parfois plusieurs) entropies.

b) Entropies pour différents modèles de fluide parfait

- Equations d'Euler. Ces équations (1.5)-(1.7) admettent une entropie mathématique qui correspond à l'entropie physique comme nous l'avons communiqué J.C. NEDELEC. Plus précisément, on a (voir GODUNOV [16] par exemple) :

$$(1.43) \quad \eta = -\rho s \quad , \quad \varphi_j = -\rho u_j s$$

Pour vérifier que les propriétés (1.42) sont satisfaites, il suffit d'établir que η est une fonction convexe des variables conservatives U ,

$${}^t U = (\rho, q_j \equiv \rho u_j, \varepsilon \equiv \rho E)$$

puisque la seconde condition de (1.42) résulte facilement de (1.9).

La définition de $\eta(U)$ nécessite un peu d'attention ; supposant connues les seules variables conservatives (ρ, q_j, ε) , on pose

$$u_j = \frac{q_j}{\rho} \quad , \quad e = \frac{\varepsilon}{\rho} - \frac{1}{2} \sum_j u_j^2 \quad .$$

La thermostatique nous fournit une fonction $s\left(e, \frac{1}{\rho}\right)$ telle que

$$ds = \frac{1}{T} \left(de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \right)$$

et on pose

$$(1.44) \quad \eta(U) = -\rho s\left(\frac{\varepsilon}{\rho} - \frac{1}{2} \sum_j \left(\frac{q_j}{\rho}\right)^2, \frac{1}{\rho}\right) \quad .$$

PROPOSITION 1.1

La convexité de l'entropie mathématique η définie en (1.44) est équivalente à la convexité de l'énergie interne $e\left(s, \frac{1}{\rho}\right)$ de la relation (1.2).

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.1 (simplifiée depuis par RAVIART [13]).

• Notons $\tau \equiv \frac{1}{\rho}$ le volume spécifique. L'énergie interne $e(s, \tau)$ est une fonction convexe du couple (s, τ) (voir LANDAU-LIFCHITZ [19] ou GERMAIN [9]) et l'on a :

$$(1.45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 e}{\partial s^2} \equiv \frac{\partial T}{\partial s} > 0 \\ \frac{\partial^2 e}{\partial s^2} \frac{\partial^2 e}{\partial \tau^2} - \left(\frac{\partial^2 e}{\partial \tau \partial s} \right)^2 \equiv - \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial p}{\partial \tau} - \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)^2 > 0 \quad . \end{array} \right.$$

On note également

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \quad , \quad \gamma = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \tau} \quad , \quad \psi = \frac{1}{T} \left(\frac{u^2}{2} - h \right)$$

• On se place dans le cas d'une seule dimension d'espace ($d=1$) pour étudier l'entropie $\eta(U)$. On dérive (1.44) :

$$d\eta = \left\{ -s + \frac{1}{T} \left(\frac{\varepsilon}{\rho} - \frac{q^2}{\rho^2} + \frac{p}{\rho} \right) \right\} d\rho + \frac{q}{\rho T} dq - \frac{1}{T} d\varepsilon$$

deux fois :

$$d^2\eta = \frac{1}{\rho T} \begin{pmatrix} \alpha\psi^2 + 2\beta\psi + \gamma + u^2 & -u \left(\frac{\alpha\psi + \beta}{T} + 1 \right) & \frac{1}{T} (\alpha\psi + \beta) \\ -u \left(\frac{\alpha\psi + \beta}{T} + 1 \right) & 1 + \alpha \frac{u^2}{T^2} & -\alpha \frac{u}{T^2} \\ \frac{1}{T} (\alpha\psi + \beta) & -\alpha \frac{u}{T^2} & \frac{\alpha}{T^2} \end{pmatrix}$$

Montrons que $d^2\eta$ est une matrice symétrique définie positive. Pour cela, nous montrons que les sous-matrices carrées "en bas à droite" de $d^2\eta$ ont un déterminant strictement positif, i.e. :

$$(1.46) \quad \det (d^2\eta_{kl})_{\substack{i \leq k \leq 3 \\ i \leq l \leq 3}} > 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad .$$

Or $d^2\eta_{33} = \frac{\alpha}{T^2}$, et le déterminant 2×2 correspondant à la valeur $i=2$ dans (1.46) vaut aussi $\frac{\alpha}{T^2}$, qui est strictement positif vu (1.45).

Par ailleurs, on a :

$$\det (d^2\eta) = \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\rho^3 T^5}$$

qui est strictement positif compte tenu de la seconde inégalité de convexité de $e(s, \tau)$. L'équivalence proposée est donc établie. ■

REMARQUE 1.1

La proposition précédente devait être connue de LAX [22] et déjà de GODUNOV qui utilise dans son article [15] la fonction convexe duale de $\eta(U)$. Par contre, dans un travail plus récent, HARTEN [18] n'envisage que le cas du gaz polytropique, ce qui rend le résultat moins facile à voir. Les approches physique (paragraphe 1) et mathématique (paragraphe 3) du problème de la dissipation dans les fluides parfaits peuvent donc complètement s'identifier, ce qui nous semble tout à fait remarquable. Mais la démonstration de la Proposition 1.1 qui précède reste lourde, et aucune explication "évidente a posteriori" ne nous est connue.

- Equations de Saint Venant. S'imposer l'entropie physique contraint de relaxer la loi de conservation de l'énergie. Les variables conservatives $U = {}^t(\rho, q_j)$ définissent p grâce à (1.10), puis l'enthalpie h par (1.12) et enfin l'énergie interne e selon

$$(1.47) \quad e(\rho) = h - \frac{1}{\rho} P(\rho) \quad ; \quad de = -p d\left(\frac{1}{\rho}\right) .$$

L'entropie mathématique est maintenant l'énergie (!), soit plus précisément :

$$(1.48) \quad \begin{cases} \eta(U) = \rho e + \frac{1}{2\rho} \sum_j q_j^2 \\ \varphi_j(U) = q_j \left(h + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 \right) . \end{cases}$$

La convexité de $\eta(U)$ correspond maintenant à la simple condition

$$(1.49) \quad c^2(\rho) \equiv \frac{dP(\rho)}{d\rho} > 0 \quad .$$

- H-système. Ce système résulte du Théorème de Bernoulli, des relations de Rankine-Hugoniot et d'hypothèses d'uniformité à l'infini amont (cf. paragraphe 2.b). La loi de pression (1.31) mélange la variable thermodynamique ρ et la vitesse \vec{u} , ce qui n'est jamais le cas pour les équations d'Euler ou de Saint Venant. De plus, le système (1.32) ne respecte pas l'invariance de Galilée des équations de la mécanique classique. En collaboration avec Ph. Le Floch, nous n'avons pas trouvé d'entropie mathématique simple pour ce H-système. Par ailleurs, l'expression des ondes de détente et de choc est compliquée (VIVIAND-VEUILLOT [32]), alors qu'elle est simple pour les équations d'Euler (cf. Chapitre 6) ou de Saint Venant (Chapitres 5 et 7).

- Equation du potentiel transsonique. A priori ce système (1.35)-(1.36) n'entre pas dans le cadre classique (1.41) des systèmes hyperboliques non-linéaires. Pourtant, dans le cas de deux dimensions d'espace, VIVIAND-VEUILLOT [32] ont réussi à l'écrire comme équation stationnaire d'un problème d'évolution. L'idée consiste à écrire le champ de vitesse inconnu \vec{u} sous la forme

$$(1.50) \quad \vec{u} = V(\rho)(\cos \theta, \sin \theta)$$

où le module $V(\rho)$ est calculé en inversant (1.35). L'équation de l'impulsion (1.13) relative à une évolution barotrope est ensuite projetée sur la direction normale au champ de vitesse. On obtient :

$$(1.51) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{u} = 0$$

puisque l'enthalpie totale reste constante. Les variables conservatives U

$$(1.52) \quad {}^t U = (\rho, \theta)$$

permettent de définir un système hyperbolique non-linéaire :

$$(1.53) \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho V(\rho) \cos \theta \\ V(\rho) \sin \theta \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho V(\rho) \sin \theta \\ -V(\rho) \cos \theta \end{pmatrix} = 0$$

et le champ de vitesse (1.50) solution stationnaire de (1.53) vérifie les équations du modèle transsonique potentiel. De plus, une entropie mathématique existe pour le système (1.53) (MORICE-VIVIAND [23]). Nous y reviendrons au Chapitre 7.

4 - MODELES MONODIMENSIONNELS

Tous les modèles présentés au paragraphe 2 peuvent être définis dans le cas d'une seule dimension spatiale. Mais la particularité de cette géométrie conduit à des modèles encore plus simples (du point de vue de la mécanique des fluides).

a) Eguation de Burgers

La version non visqueuse de l'équation proposée par Burgers :

$$(1.54) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad , \quad u(x,t) \in \mathbb{R}$$

est le prototype d'équation hyperbolique non-linéaire pour la démonstration de théorèmes abstraits et l'étude numérique et mathématique des schémas.

A un changement de fonction inconnue près, c'est une version instationnaire de l'équation des petites perturbations transsoniques ou même de l'équation du potentiel. Nous utiliserons cette remarque aux Chapitres 4 et 7.

b) Le p-système

C'est une version lagrangienne des équations de Saint Venant (1.28) monodimensionnelles. Les variables de Lagrange (ξ, θ) à utiliser ne sont pas les plus habituelles, et nous nous sommes fortement inspiré de BARDOS [2] dans la présentation qui suit. On considère l'équation différentielle

$$(1.55) \quad \frac{\partial X}{\partial \theta}(\xi, \theta) = u(X(\xi, \theta), \theta)$$

et la condition initiale

$$(1.56) \quad \frac{\partial X}{\partial \xi}(\xi, 0) = \frac{1}{\rho(X(\xi, 0), 0)} \quad , \quad X(\xi_0, 0) = \xi_0$$

obtenues à partir d'un champ $(\rho(x, t), u(x, t))$ solution des équations de Saint Venant. Notons que cette construction impose à ρ d'être non nul, ce qui exclut tout vide dans la condition initiale. L'application

$$(\xi, \theta) \mapsto (x, t) = (X(\xi, \theta), \theta)$$

définit les coordonnées eulériennes (x, t) en fonction des coordonnées lagrangiennes (ξ, θ) ; elle est biunivoque sous l'hypothèse

$$(1.57) \quad 0 < \rho_* \leq \rho(x, 0) \leq \rho^* < \infty \quad , \quad \forall X \in \mathbb{R}$$

et le jacobien $J(\xi, \theta)$ est donné par

$$(1.58) \quad J(\xi, \theta) = \frac{\partial X}{\partial \xi}(\xi, \theta) = \frac{1}{\rho(X(\xi, \theta), \theta)} \quad v(\xi, \theta)$$

puisque la dérivée $\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho(X(\xi, \theta), \theta) \cdot J(\xi, \theta))$ est identiquement nulle et que $\rho \cdot J$ vaut identiquement 1 pour $\theta = 0$. Nous introduisons les inconnues du p-système

$$(1.59) \quad \begin{cases} \tau(\xi, \theta) = \frac{1}{\rho(x, t)} \\ v(\xi, \theta) = u(x, t) \end{cases} .$$

On a facilement

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{v}{\tau} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

et le couple volume spécifique-vitesse (τ, v) vérifie le p-système

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0 \end{cases}$$

équivalent à (1.28), qu'on écrit habituellement en remplaçant les lettres grecques (θ, ξ, τ, v) par (t, x, v, u) respectivement. On obtient :

$$(1.60) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p(v)}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

où $p(v) = \frac{\text{cste}}{v^\gamma}$ dans les applications.

Le p-système (1.60) est un système strictement hyperbolique qui admet une entropie mathématique

$$(1.61) \quad \eta(v, u) = \frac{u^2}{2} - P(v) \quad \text{où} \quad \frac{dP}{dv} = p(v)$$

associée au flux d'entropie

$$q(v, u) = u p(v) \quad .$$

Nous retrouverons le p-système au Chapitre 5.

II - TUYERES MONODIMENSIONNELLES

Dans cette partie, nous étudions le modèle le plus courant des tuyères quasi-monodimensionnelles. Nous explicitons au premier paragraphe le terme source à ajouter aux équations d'Euler. Nous rappelons ensuite le théorème de Hugoniot et ses conséquences. L'étude générale du blocage est abordée dans la troisième partie ; nous y adoptons une présentation non classique. Quelques remarques concluent ce chapitre.

1 - RAPPEL DU MODELE QUASI-MONODIMENSIONNEL

L'étude des écoulements de fluide parfait dans des domaines de forme quelconque reste un problème ouvert sur le plan mathématique, et les ingénieurs (comme de Laval) ont proposé depuis longtemps des modèles réalistes simplifiés de tuyères. Le modèle quasi-monodimensionnel, très simple, donne un grand nombre d'informations qualitatives sur la réalité multidimensionnelle.

L'écoulement est confiné dans un tuyau de section $A(x)$ lentement variable, de sorte que tous les champs sont supposés constants en espace le long de chaque plan $x = \text{cste}$ et on approche le vecteur vitesse par sa composante $u(x)$ sur l'axe Ox (voir Figure 2.1). Le bilan de masse s'obtient facilement :

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u A) = 0$$

mais le bilan de quantité de mouvement exige plus de soin. Partant de la relation vectorielle

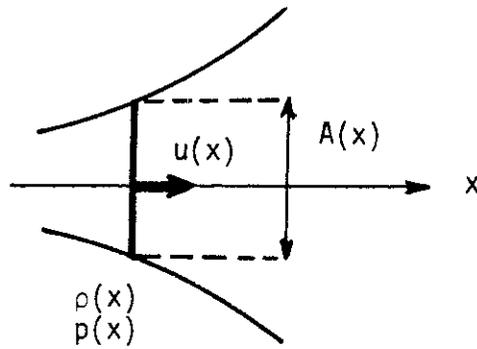


Figure 2.1 Tuyère monodimensionnelle

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \text{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = -\nabla p$$

la moyenne du premier membre dans le volume compris entre x et $x+dx$ vaut :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u A) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 A) \right] dx$$

et pour le terme de pression, les termes de l'intégrale de surface

$\iint p d\vec{\sigma}$ qui correspondent au double trait sur la Figure 2.2 s'éliminent (à l'ordre d'approximation considéré) ; la moyenne de $-\nabla p$ vaut finalement

$$-A(x) \frac{\partial p}{\partial x} dx .$$

L'équation quasi-monodimensionnelle de transfert d'impulsion prend donc la forme :

$$(2.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho u A) + \frac{\partial}{\partial x} [(\rho u^2 + p)A] - p \frac{dA}{dx} = 0$$

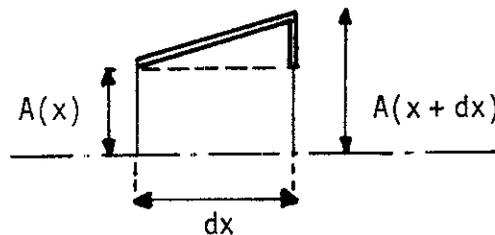


Figure 2.2 Bilan d'impulsion

La conservation de l'énergie (grandeur scalaire) s'obtient comme la conservation de la masse, et l'on a :

$$(2.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho E A) + \frac{\partial}{\partial X} [(\rho u E + p u) A] = 0 \quad .$$

Le système instationnaire (2.1)-(2.3) est discrétisé au Chapitre 6.

2 - THEOREME DE HUGONIOT ET CONSEQUENCES

a) Théorème de Hugoniot

Nous nous intéressons à un écoulement stationnaire (allant de gauche à droite) dans une tuyère. Les équations (2.1)-(2.3) et les théorèmes généraux du I.1 nous montrent qu'hors des chocs (ie toutes les fonctions inconnues sont régulières), on a :

$$(2.4) \quad \rho u A = \text{cste}$$

$$(2.5) \quad H \equiv \frac{u^2}{2} + h = \text{cste}$$

$$(2.6) \quad s = \text{cste}$$

Pour un écoulement régulier, l'équation (2.6) exprime l'isentropie, donc la barotropie. Compte tenu de (2.5) (théorème de Bernoulli) et de la définition de la vitesse du son c :

$$(2.7) \quad c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} (\rho, s)$$

on en déduit :

$$(2.8) \quad \frac{d(\rho u)}{\rho u} = \frac{du}{u} + \frac{dh}{c^2} = (1 - M^2) \frac{du}{u}$$

avec $M = u/c$ (nombre de Mach). Par ailleurs, la relation (2.4) impose à la quantité de mouvement ρu de varier en sens contraire de la section A . Lorsque A décroît (tuyère convergente), ρu croît et ceci est possible pour un fluide en régime subsonique ($M < 1$) si u croît ou en régime supersonique si u décroît. Lorsque $A(x)$ croît (tuyère divergente), ρu décroît, donc la vitesse diminue si le fluide est subsonique et augmente s'il est supersonique. Tous ces résultats constituent le théorème de Hugoniot. On en déduit que le passage d'un écoulement subsonique à un écoulement supersonique n'est possible qu'en un minimum A^* de la section (col de la tuyère).

b) Conséquences du théorème

Dans la suite, nous n'envisagerons que le cas d'une tuyère convergente-divergente, dite de De Laval. Nous nous donnons également l'état thermodynamique en entrée, par exemple le couple pression-température :

$$(2.9) \quad (p_0, T_0) \quad . \quad (\text{entrée})$$

Il s'agit par convention d'un état *générateur* de vitesse nulle. Ceci exprime en fait que l'état effectivement considéré à l'entrée de la tuyère est obtenu à partir de celui-ci par une détente isentropique qui conserve l'enthalpie totale. Précisons tout ceci dans le cas du gaz polytropique : l'enthalpie h_0 et l'entropie S_0 sont d'abord évalués

$$(2.10) \quad h_0 = C_p T_0 \quad S_0 \equiv \exp \frac{S_0}{C_v} = (RT_0)^\gamma p_0^{1-\gamma} \quad .$$

L'état d'entrée possède ainsi une vitesse u , une densité ρ , une entropie $s = s_0$ et une enthalpie totale h_0 telles que :

$$(2.11) \quad \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} S_0 \rho^{\gamma-1} = h_0 \quad .$$

Notons que dans la pratique, l'état d'entrée a le plus souvent une vitesse très faible puisque la section d'entrée est très grande devant celle du col. Les conditions (2.9) représentent alors l'état thermodynamique du fluide juste après la combustion. Nous avons la

PROPOSITION 2.1

Dans une tuyère convergente-divergente de section A^ au col, si l'on se donne les conditions génératrices (2.9) en entrée, le débit est alors majoré par une valeur critique Q^* :*

$$(2.12) \quad Q^* = \sqrt{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{P_0}{\sqrt{R T_0}} A^*$$

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.1

• Supposons d'abord l'évolution régulière. Compte tenu de (2.5)-(2.6), tous les états possibles pour le fluide vérifient la relation (2.11). On peut alors étudier la variation de l'impulsion ρu en fonction de la densité (Figure 2.3). Le débit maximal est donc obtenu pour l'écoulement sonique au col, et la valeur (2.12) résulte alors d'un calcul élémentaire.

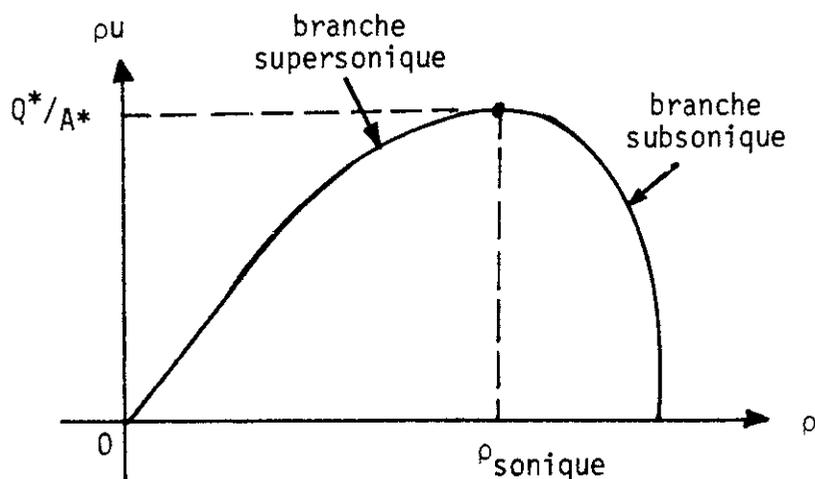


Figure 2.3 Relation quantité de mouvement-densité pour un gaz polytropique d'enthalpie

- Si un ou plusieurs chocs sont présents, l'entropie devient nécessairement supérieure à s_0 , et le débit est alors inférieur ou égal à Q^* . D'où le résultat. ■

REMARQUE 2.1

Les écoulements subsoniques dans le convergent et soniques au col permettent à la fois d'optimiser le débit qui traverse la tuyère et aussi d'accélérer au mieux le fluide, puisqu'ils peuvent donner naissance à des écoulements supersoniques dans le divergent. On dit que la tuyère est alors amorcée, ou bloquée.

3 - BLOCAGE DES TUYERES MONODIMENSIONNELLES

Nous étudions toujours l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait polytropique dans une tuyère de Laval. Les conditions d'entrée (2.9) sont supposées fixées (entrée subsonique). Nous supposons de plus la pression imposée à la sortie :

$$(2.13) \quad p = P \quad (\text{sortie}) \quad .$$

Les écoulements qui résultent de ces conditions aux limites sont très différents selon les valeurs de la contre-pression ; nous en détaillons les principales caractéristiques. La présentation choisie reprend celle de l'article [7] de EMBID-GOODMAN-MAJDA. Nous notons A_e et A_s les sections à l'entrée et à la sortie.

La relation (2.13), jointe à (2.5) et

$$(2.14) \quad h = \frac{c^2}{\gamma-1} = \frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho}$$

permet de calculer l'impulsion de sortie en fonction de la densité à la sortie du canal :

$$(2.15) \quad \rho u = \sqrt{2 h_0 \rho^2 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} P \rho}$$

et cette courbe \mathcal{P} est représentée sur la Figure 2.4. Nous avons aussi porté la courbe $\mathcal{H}S_0$ de la Figure 2.3, l'équation :

$$(2.16) \quad \rho u = \sqrt{2 h_0 \rho^2 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} S_0 \rho^{\gamma+1}}$$

qui caractérise les états d'entropie et d'enthalpie totale imposés.

a) Condition nécessaire

Cherchons d'abord l'état de sortie (point Σ sur la Figure 2.4).

Il est nécessaire que les courbes \mathcal{P} et $\mathcal{H}S_0$ se coupent, i.e. :

$$(2.17) \quad P \leq p_0$$

sinon aucun écoulement de vitesse positive n'est possible.

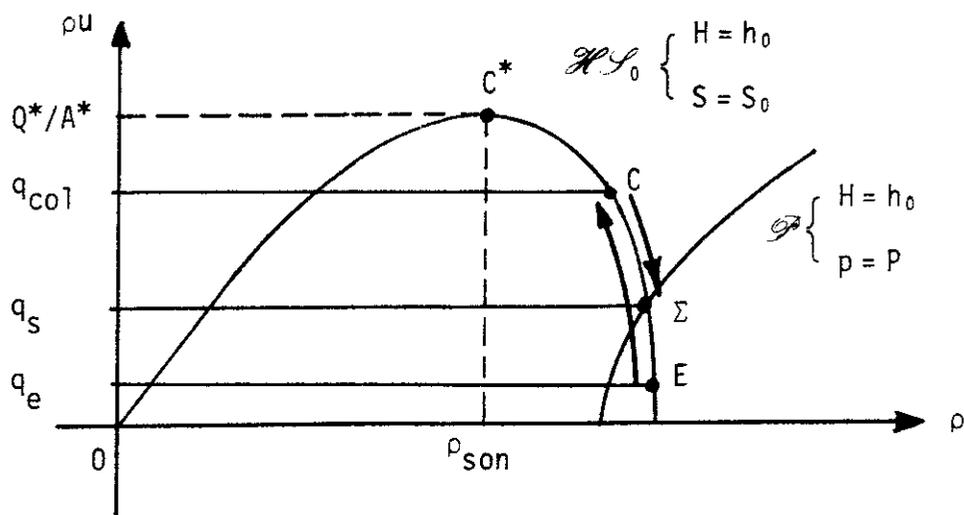


Figure 2.4 Ecoulement partout subsonique

b) Écoulement partout subsonique

Lorsque la condition (2.17) est satisfaite, le point Σ est facile à calculer, ce qui fixe le flux de masse q_s en sortie, donc le débit $Q = q_s A_s$. Dans ces conditions, les points E et C de fonctionnement en entrée et au col sont fixés, puisqu'on reste sur la courbe $\mathcal{H} \mathcal{I}_0$ (Figure 2.4) ; le fluide accélère jusqu'au col C pour ensuite ralentir dans le divergent (rappelons que pour chaque point A de la Figure 2.4, la pente de la corde OA issue de l'origine est égale à la vitesse de l'état A).

c) Blocage

Le comportement décrit au paragraphe précédent se poursuit tant que l'état physique C du col peut être construit ie tant que $q_s A_s \leq Q^*$ soit

$$(2.18) \quad P_1 \leq P \leq p_0$$

pour une pression P_1 facile à évaluer numériquement. Pour la valeur $P = P_1$, l'écoulement est subsonique partout sauf au col (sonique) et le débit maximum (2.12) est alors atteint.

d) Choc dans le divergent

- La construction de l'état de sortie (point Σ sur la Figure 2.4) exposée plus haut n'est plus valable si un choc est présent dans le canal. Nous rappelons que les relations de Rankine-Hugoniot associées à (2.1)(2.3) prennent la forme (pour un écoulement stationnaire) :

$$(2.19) \quad \begin{cases} [\rho u] = 0 \\ [\rho u^2 + p] = 0 \\ [H] = 0 \\ [S] \geq 0 \end{cases}$$

puisque la section $A(x)$ du canal varie de façon régulière. Nous en déduisons que le débit et l'enthalpie totale restent constants dans tout le canal, qu'il y ait un choc stationnaire ou non. Si nous fixons un point $(\rho, \rho u)$ de la courbe $\mathcal{H}S_0$ correspondant à un état supersonique, on construit facilement, compte tenu de (2.19), l'état aval (ρ_1, q_1) issu de l'état précédent par un choc stationnaire :

$$(2.20) \quad \begin{cases} \rho_1 = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \frac{\rho u^2}{h_0} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\rho - \frac{\gamma S_0}{(\gamma-1)h_0} \rho^\gamma \right) \\ q_1 = \rho u = \sqrt{2 h_0 \rho^2 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} S_0 \rho^{\gamma+1}} \end{cases}$$

Lorsque ρ varie entre 0 et la valeur sonique

$$(2.21) \quad \rho_s = \left(\frac{2(\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{h_0}{S_0} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

(ρ_1, q_1) parcourt la "courbe de choc" \mathcal{C} (cf. Figure 2.5).

- Supposons maintenant la pression P de sortie inférieure à P_1 (cf. (2.18)). Il n'est plus possible de construire de solution barotrope des équations (2.1)-(2.3). Si un choc est présent dans la tuyère, il transforme un état supersonique en un état subsonique. Compte tenu du théorème de Hugoniot, le col est donc nécessairement sonique. Par suite, le débit maximal Q^* est atteint, le convergent reste lui subsonique (et en évolution barotrope) et le choc est situé dans le divergent. La conservation de la masse (2.1) nous impose la valeur de l'im-

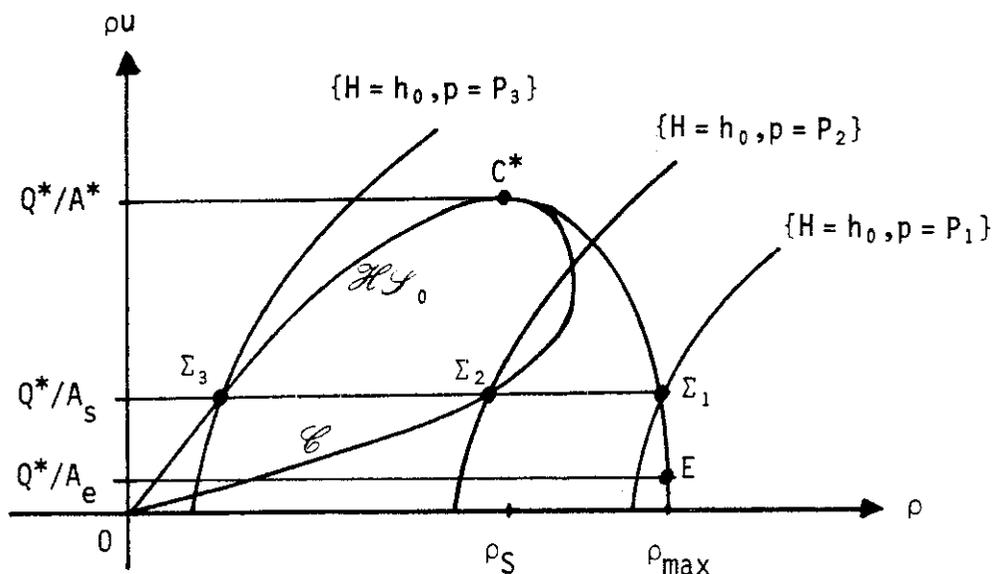


Figure 2.5 Pressions critiques

...pulsion en entrée et en sortie ; en particulier l'état d'entrée (E sur la Figure 2.5) est imposé. Pour l'état de sortie, deux points particuliers Σ_2 et Σ_3 sont mis en évidence. Ils correspondent à deux valeurs particulières P_2 et P_3 :

$$(2.22) \quad P_3 < P_2 < P_1$$

de la pression de sortie. L'évolution $E \rightarrow C^* \rightarrow \Sigma_3$ (pour $p = P_3$) le long de la courbe \mathcal{H}_0 correspond à un écoulement barotrope avec sortie supersonique, alors que l'évolution $E \rightarrow C^* \rightarrow \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_2$ (pour $p = P_2$) est un cas limite où le choc est situé juste à la sortie de la tuyère.

- Considérons maintenant des valeurs de pression en sortie telles que

$$(2.23) \quad P_2 < P < P_1 .$$

Le point Σ (Figure 2.6) représentatif de la sortie est donné par la condition (2.13) et le débit total Q^* . Puisqu'en aval du choc l'écoulement (subsonique) reste isentropique, l'état aval du choc est situé

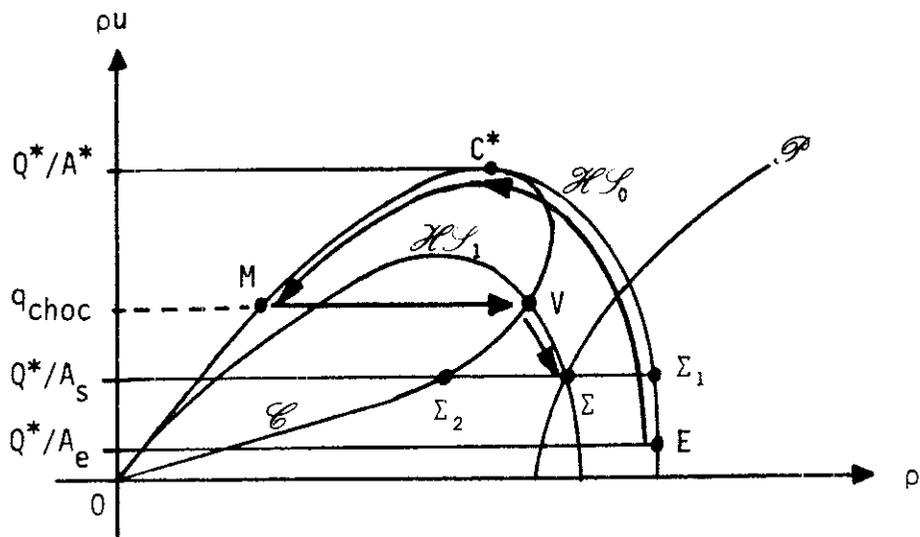


Figure 2.6 Ecoulement bloqué avec choc dans le divergent

sur l'unique courbe \mathcal{H}_1 d'équations

$$(2.24) \quad H = h_0 \quad , \quad S = S_1$$

passant par le point Σ . Notons que cette condition fixe l'entropie en sortie S_1 , i.e. la valeur de la contre-pression P fixe la force du choc. La position du choc s'obtient ensuite facilement : l'état aval est nécessairement situé à l'intersection $\mathcal{C} \cap \mathcal{H}_1$ (Figure 2.6). L'état amont M a même quantité de mouvement q_{choc} et est situé sur \mathcal{H}_0 . Dans le plan de phase $(\rho, \rho u)$, l'écoulement est donc fonction uniquement de p_0, T_0, P et des sections A_e, A^*, A_s . Dans le convergent, le point représentatif de l'état du fluide parcourt la courbe $E \rightarrow C^*$ et dans le divergent, le régime supersonique $C^* \rightarrow M$ est suivi du choc $M \rightarrow V$ puis d'une évolution isentropique $V \rightarrow \Sigma$. La position physique du choc s'obtient en résolvant par rapport à l'abscisse x (dans le divergent) l'équation

$$(2.25) \quad A(x) = \frac{Q^*}{q_{\text{choc}}} \quad .$$

Ce type d'écoulement caractérise une tuyère bloquée, puisque l'amorçage ayant eu lieu (vitesse sonique au col), la contre-pression (2.23) trop forte empêche la tuyère de détendre complètement le gaz dans le divergent.

e) Synthèse

Pour une tuyère de Laval avec entrée subsonique donnée par un état générateur (2.9), nous avons mis en évidence quatre valeurs caractéristiques de la contre-pression de sortie :

$$(2.26) \quad P_3 < P_2 < P_1 < p_0 \quad .$$

Pour $P = p_0$, le fluide est au repos, un écoulement subsonique régulier est obtenu pour $P_1 \leq P < p_0$, qui devient sonique au col pour $P = P_1$. L'écoulement bloqué avec choc dans le divergent est obtenu pour $P_2 \leq P < P_1$, et pour $P < P_2$, $P \neq P_3$ le modèle précédent n'a pas de solution. En fait une étude plus complète du jet en sortie de tuyère montre que pour $P_3 < P < P_2$ la tuyère est surdétendue et des ondes de choc sont présentes dans le jet, alors que pour $P < P_3$, la tuyère est sousdétendue et le fluide continue à se détendre dans le jet. Le régime $P = P_3$ est le plus intéressant pour l'ingénieur : la tuyère accélère le gaz jusqu'à un écoulement supersonique adapté à la pression de sortie, et la poussée fournie est alors maximale (voir par exemple SEDOV [29]). La loi débit-pression de sortie est résumée Figure 2.7 et la synthèse précédente est illustrée Figure 2.8, empruntée à GERMAIN [10].

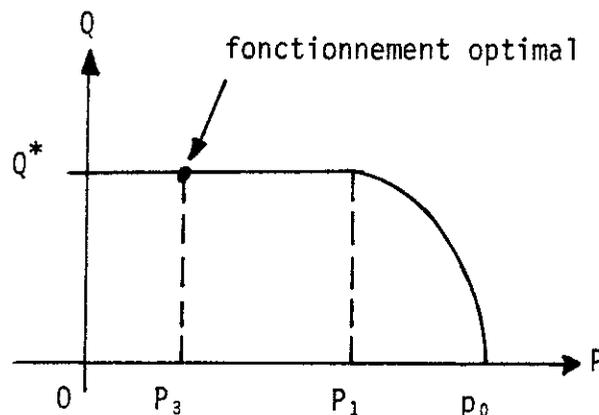


Figure 2.7 Loi débit-pression de sortie pour une tuyère de Laval

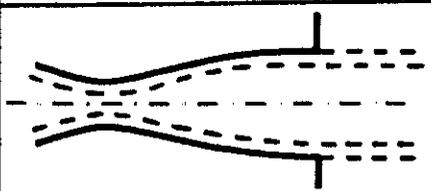
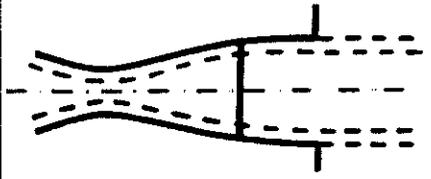
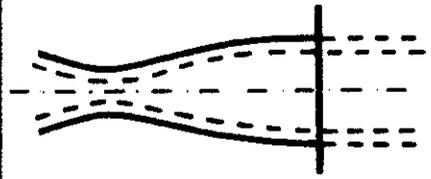
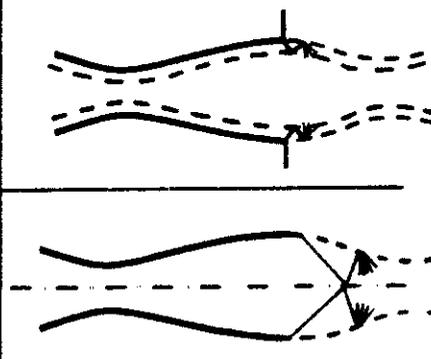
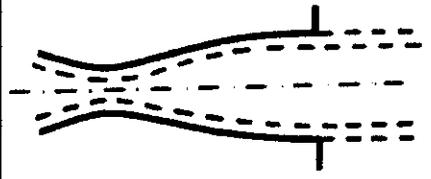
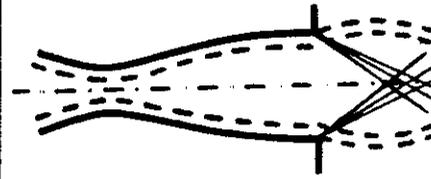
Valeur de P	Schéma d'écoulement	Commentaires
$P_1 \leq P \leq p_0$		Écoulement subsonique
$P_2 < P < P_1$		Supersonique $x_c < x < x_s$ Subsonique $x_s < x$ onde de choc x_s
$P = P_2$		onde de choc dans la section terminale
$P_3 < P < P_2$		Système d'ondes de choc à la sortie du divergent
$P = P_2$		Pression p, « adaptée » Jet uniforme
$P < P_3$		Système d'ondes de détente

Figure 2.8 Configurations d'écoulements dans une tuyère de Laval (d'après GERMAIN [10])

4 - REMARQUES FINALES

L'étude du blocage des tuyères exposé au paragraphe 3 pour les équations d'Euler s'étend sans difficulté au modèle de Saint Venant (voir EMBID-GOODMAN-MAJDA [7]). Par contre le modèle potentiel (I-2-c) est *mal adapté* à l'étude quasi-monodimensionnelle des tuyères. En effet, les conditions d'entrée (2.9) imposent à l'écoulement (isenthalpique *et* isentropique) de suivre la loi (2.11) donc, dans le plan de phase, imposent au point représentatif du fluide de *rester* sur la courbe $\mathcal{H}S_0$ (Figure 2.3), même lors d'un choc. Lorsque la tuyère est amorcée, la pression de sortie revient donc *toujours* à la valeur $p = P_1$, et pour spécifier davantage l'écoulement dans le divergent, il faut ajouter une condition sur la différence de potentiel :

$$(2.27) \quad \phi_{\text{sortie}} - \phi_{\text{entrée}} = \Delta\phi$$

comme le proposent DECONNINCK-HIRSCH [6] ou NECAS [25]. Nous pensons que la condition limite (2.27) est peu physique, et les conséquences de cette remarque sont abordées au Chapitres 4 et 7 pour des écoulements bidimensionnels.

Enfin nous n'avons pas du tout abordé le problème des fluides entrant dans le convergent à vitesse supersonique ni les évolutions purement instationnaires dans les tuyères quasi-monodimensionnelles. Nous renvoyons à [7] déjà cité et surtout à l'étude monumentale de GLAZ-LIU (voir [12] et les références citées). Sachons seulement que si le débit est supérieur au débit critique, une onde de choc instationnaire remonte le fluide à contre-courant et lui impose un passage sonique du col. Suivant l'analogie avec le trafic autoroutier (voir par exemple WHITHAM [34]), cette onde de choc nous est bien familière, lors des "bouchons" de la circulation.

REFERENCES DU CHAPITRE I

- [1] AMARA M., *Analyse de Méthodes d'Eléments Finis pour des Ecoulements Transsoniques*, Thèse d'Etat, Université Paris 6, 1983.
- [2] BARDOS C., *Introduction aux Problèmes Hyperboliques Non Linéaires*, Rapport Interne n° 40, Université Paris Nord, 1983.
- [3] COLE J.D., COOK L.P., *Transonic Aerodynamics*, North Holland series in applied mathematics and mechanics, Amsterdam, 1986.
- [4] COURANT R., FRIEDRICHS K.O., *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience, New-York, 1948.
- [5] CROCCO L., *Eine neue Strömfunktion für die Erforschung der Bewegung der Gase mit Rotation*, Z. Angew. Math. Mech. vol 17, pp 1-7, 1937.
- [6] DECONINCK H., HIRSCH C., *Boundary Conditions for the Potential Equation in Transonic Internal Flow Calculation*, ASME Paper 83-GT-135, 1983.
- [7] EMBID P., GOODMAN J., MAJDA A., *Multiple Steady States for 1-D Transonic Flow*, SIAM J. Sci. Stat. Comput. vol 5, n° 1, pp 21-41, 1984.
- [8] ENGQUIST B., OSHER S., *Stable and Entropy Satisfying Approximations for Transonic Flow Calculations*, Math of Comp, vol 34, n° 149, pp 45-75, 1980.
- [9] GERMAIN P., *Cours de Mécanique des Milieux Continus, Théorie Générale*, Masson, Paris, 1973.
- [10] GERMAIN P., *Mécanique*, tome 2, Ecole Polytechnique, Ellipses, Paris, 1986.
- [11] GERMAIN P., BADER R., *Unicité des écoulements avec choc dans la mécanique de Burgers*, ONERA, 1953.
- [12] GLAZ H.M., LIU T.P., *The Asymptotic Analysis of Wave Interactions and Numerical Calculations of Transonic Nozzle Flow*, Advances in Appl. Math., vol 5, pp 111-146, 1984.
- [13] GODLEWSKI E., RAVIART P.A., *An Introduction to the Theory and Numerical Analysis of Nonlinear Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, à paraître.

- [14] GODUNOV S.K., *Finite Difference Method for Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics*, Math. Sbornik, vol 47, n° 3, pp 271-290, 1959.
- [15] GODUNOV S.K., *An Interesting Class of Quasilinear Systems*, Dok. Akad. Nauk. SSSR, vol 139, pp 521-523, 1961 et Sov. Math., vol 2, pp 947-949, 1961.
- [16] GODUNOV S.K. et al., *Résolution Numérique des Problèmes Multidimensionnels de la Dynamique des Gaz*, Editions Mir, Moscou, 1976, 1979.
- [17] HADAMARD J., *Leçons sur la Propagation des Ondes et les Equations de l'Hydrodynamique* (pp 362-369), Hermann, Paris, 1903.
- [18] HARTEN A., *On the Symmetric Form of Systems of Conservation Laws with Entropy*, J. of Comp. Phys., vol 49, pp 151-164, 1983.
- [19] LANDAU L., LIFCHITZ E., *Physique Statistique*, Editions Mir, Moscou, 1950, 1967.
- [20] LANDAU L., LIFCHITZ E., *Mécanique des Fluides*, Editions Mir, Moscou, 1953, 1971.
- [21] LAX P.D., *Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and their Numerical Computation*, Comm. Pure Appl. Math., vol 7, pp 159-193, 1954.
- [22] LAX P.D., *Shock Waves and Entropy*, in : *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, Zarantonello (ed), pp 603-634, Academic Press, New York, 1971.
- [23] MORICE P., VIVIAND H., *Equations de Conservation et Condition d'Irréversibilité pour les Ecoulements Transsoniques Potentiels*, C.R. Acad. Sc. Paris, t 291, série B, pp 235-238, 1980.
- [24] MURMAN E., COLE J., *Calculation of Plane Steady Transonic Flows*, AIAA J., vol 9, n° 1, pp 114-121, 1971.
- [25] NEČAS J., *Ecoulements de Fluides : Compacité par Entropie*, Masson, Paris, à paraître.
- [26] NEDELEC J.C., *Curved Finite Element Methods for the Solution of Singular Integral Equations on Surfaces in \mathbb{R}^3* , Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. vol 8, pp 61-80, 1976.
- [27] OLEINIK O., *On Discontinuous Solutions of Nonlinear Differential Equations*, Usp. Math. Nauk. (NS), vol 12, pp 3-73, 1957 et Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol 26, pp 95-172, 1957.

- [28] RIZZI A., ERIKSSON L.E., *Computation of Flow Around Wings Based on the Euler Equations*, J. of Fluid Mech., vol 148, pp 45-71, 1984.
- [29] SEDOV L., *Mécanique des Milieux Continus*, tome 2, Editions Mir, Moscou, 1973-1975.
- [30] SERRIN J., *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*, in *Handbuch der Physik*, vol 8/1, Truesdell (ed), pp 125-263, Springer Verlag, Berlin, 1959.
- [31] SMOLLER J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [32] VIVIAND H., VEUILLOT J.P., *Méthodes Pseudostationnaires pour le Calcul d'Écoulements Transsoniques*, publication ONERA n° 1978-4, 1978.
- [33] VON KARMAN T., *The Similarity Law of Transonic Flow*, J. of Math. and Physics, vol 26, n° 3, pp 182-190, 1947.
- [34] WHITHAM G.B., *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley, New York, 1974.