THESE

présentée à
l' UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L' UNIVERSITE PARIS 6
spécialité **Mathématiques Appliquées**

par **François DUBOIS**

Sujet de la Thèse :

QUELQUES PROBLEMES LIES AU CALCUL D ' ECOULEMENTS DE FLUIDES PARFAITS DANS LES TUYERES.

Soutenue le 5 janvier 1988 devant le jury composé de

MM.	P.A. RAVIART	Président
	A.Y. LEROUX	
	O. PIRONNEAU	Rapporteurs
	B. MERCIER	
	P. MORICE	
	J.C. NEDELEC	Examinateurs

INTRODUCTION

Cette thèse a pour thème le calcul numérique, par la méthode des éléments finis, des écoulements de fluides parfaits dans des tuyères au moyen d'un potentiel vecteur. Ce problème d'énoncé physique assez simple est en fait mathématiquement quasi-inaccessible ; les équations sont fortement non-linéaires et autorisent des solutions discontinues, les ondes de choc par exemple. De plus, la théorie mathématique des systèmes hyperboliques non-linéaires, qui correspond à ces problèmes, ne permet de traiter rigoureusement que quelques cas particuliers pour une géométrie monodimensionnelle. Le développement de nouvelles méthodes numériques s'appuie donc sur les méthodes existantes pour lesquelles nous disposons de résultats d'approximation précis dans le cas linéaire, sur l'analyse mathématique de problèmes modèles qui traitent une physique de plus en plus complexe, et sur les expériences numériques qui permettent une validation empirique sur des cas tests classiques.

Nous commençons donc, au Chapitre 1, par rappeler quelques points de modélisation qui nous semblent importants. Nous présentons les modèles de fluides parfaits utilisés dans la suite du travail ainsi que leur domaine physique de validité. Nous détaillons également le modèle monodimensionnel des tuyères, non-linéaire, qui permet au prix de calculs très simples de dégager la nature des phénomènes physiques dominants dans l'écoulement.

Les chapitres suivants sont rangés par ordre croissant de complexité non-linéaire, due essentiellement à une prise en compte croissante des conditions aux limites. Nos cas de calcul traitent des géométries de dimensions un, deux ou trois. Nous prenons pour point de départ le modèle linéaire du fluide irrotationnel et incompressible. Nous le rappelons brièvement. La tuyère est représentée par un ouvert borné Ω assez régulier plongé dans $\mathbb{R}^2$ et le fluide est décrit par le seul champ de vitesse $\vec{u}$. Nous nous donnons aussi le flux normal sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine. Le problème à résoudre s'écrit sous forme du système d'équations :

(1) $\quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \Omega$

(2) $\quad \operatorname{rot} \vec{u} = 0 \quad \Omega$

(3) $\quad \vec{u}.\vec{n} = g \quad \partial\Omega$

La loi de conservation (1) nous permet d'introduire la fonction courant ψ pour représenter le champ de vitesse :

(4) $\quad \vec{u} = \vec{\operatorname{rot}}\, \psi$

et cette fonction courant est alors simplement solution de l'équation de Laplace

(5) $\quad -\Delta\psi = 0 \quad \Omega$.

Par ailleurs, en intégrant la relation (3) le long de la frontière $\partial\Omega$, on construit facilement à partir du flux g une condition limite de Dirichlet $\bar{\psi}$ pour la fonction courant :

(6) $\quad \psi = \bar{\psi} \quad \partial\Omega$

La fonction courant est solution du problème (5)(6), très classique, pour lequel les méthodes d'éléments finis conformes et mixtes ont montré leur pertinence.

Au Chapitre 2, nous étudions un problème de type (1)-(3) dans un domaine Ω *tridimensionnel*. Dans ce cas, la fonction courant introduite à la relation (4) est un potentiel vecteur. Nous le discrétisons à l'aide de l'élément fini tétraédrique vectoriel de degré 1 introduit par NEDELEC [5]. Bien que linéaire, le problème à résoudre comporte plusieurs difficultés. La condition de jauge à ajouter à la relation (4), afin d'assurer l'unicité du potentiel vecteur, donne naissance à une jauge discrète reliée au choix d'un arbre parmi les arêtes du maillage ; la condition limite (3) conduit à des difficultés de même nature. Afin de coupler correctement les représentations (3) et (4) sur la frontière, nous avons développé un élément fini courbe qui généralise le tétraèdre de NEDELEC. Nous proposons une formulation mixte vitesse-potentiel vecteur du problème et nous donnons une estimation d'erreur optimale pour le champ de vitesse.

Au Chapitre 3, nous présentons la mise en oeuvre numérique de la méthode précédente pour un problème non-linéaire elliptique (programme de calcul tridimensionnel PSI3D, que nous avons développé sur le Cray 1S du CCVR). Nous enrichissons le modèle fluide par l'introduction de la densité ρ. Le problème à résoudre est un modèle transsonique potentiel qui satisfait aux équations :

$$(7) \qquad \begin{cases} \rho\vec{u} = \vec{\mathrm{rot}}\ \psi & \Omega \\ \mathrm{rot}\ \vec{u} = 0 & \Omega \\ \rho = f(|\vec{u}|) & \Omega \end{cases}$$

$$(8) \qquad \rho\vec{u}.\vec{n} = g \qquad \partial\Omega$$

Nous reformulons le système non-linéaire (7) sous forme variationnelle mixte et nous mettons en oeuvre un algorithme de point fixe. Le maillage utilisé est semi-déductif et des prismes ont servi de support géométrique à l'élément fini vectoriel permettant de discrétiser le potentiel vecteur.

Au Chapitre 4, nous abordons l'étude *d'écoulements transsoniques* dans des tuyères, en nous restreignant au cas de deux dimensions d'espace. Nous utilisons la méthode proposée par AMARA [1] : un décentrage de la densité ρ couplé à un algorithme de point fixe. Nous avons ainsi résolu numériquement le système (7)(8) de façon satisfaisante (à cette occasion, nous avons développé le logiciel PFX03 sur les ordinateurs Cray 1S et Cray 2 du CCVR). Mais cette étude montre aussi que les conditions aux limites physiques du problème sont en général mal représentées par la condition limite (8).

Au Chapitre 5 nous étudions, en collaboration avec Ph. Le Floch, le problème abstrait des *conditions aux limites pour les systèmes hyperboliques* de lois de conservation. Deux formulations sont proposées. La première, fondée sur la méthode de viscosité, conduit à une inégalité d'entropie à la limite qui généralise un travail antérieur de BARDOS-LEROUX NEDELEC [2]. La seconde résulte d'une analyse en terme de problème de Riemann et conduit à des problèmes à la limite mathématiquement bien posés. Nous montrons aussi que pour les systèmes hyperboliques linéaires stricts et les lois de conservation scalaires non-convexes, ces deux formulations sont équivalentes.

Au Chapitre 6, nous étudions le traitement numérique des *conditions aux limites physiquement intéressantes* pour les équations d'Euler de la mécanique des fluides parfaits. Cette étude repose sur une interprétation simple du schéma numérique d'OSHER [6] en terme d'ondes de détente multivaluées. Notre démarche généralise la seconde formulation du chapitre précédent et permet d'introduire (sans la formaliser outre mesure) la notion de problème de Riemann partiel, déjà présente chez GODUNOV [4] dans plusieurs cas particuliers. Des expériences numériques monodimensionnelles effectuées au CIRCE après développement du programme EUL08 illustrent et motivent notre travail.

Au dernier chapitre, nous reprenons l'étude des tuyères transsoniques bidimensionnelles commencée au Chapitre 4. Nous avons résolu numériquement le modèle transsonique potentiel (7) grâce à *deux nouveautés* par rapport au Chapitre 4 : un décentrage de l'impulsion à l'aide du schéma d'ENGQUIST-OSHER [3], qui conduit à substituer à l'algorithme de point fixe un algorithme de quasi-Newton, et d'autre part une prise en compte des conditions aux limites inspirée de l'analyse proposée au Chapitre 6. Le schéma obtenu est relativement complexe et assez coûteux à mettre en oeuvre, mais grâce à cette méthode nous avons mené à bien, à l'aide de nos codes EON28 et DD05 sur l'ordinateur Cray 2 du CCVR, toute une série de calculs d'écoulements transsoniques classiques et moins classiques pour des problèmes d'aérodynamique externe et interne.

- novembre 1987 -

REFERENCES

[1] AMARA M., *Analyse de Méthodes d'Eléments Finis pour des Ecoulements Transsoniques*, Thèse d'Etat, Université Paris 6, 1983.

[2] BARDOS C., LEROUX A.Y., NEDELEC J.C., *First order Quasilinear Equations with Boundary Conditions*, Comm. P.D.E., vol 4, n° 9, pp 1017-1034, 1979.

[3] ENGQUIST B., OSHER S., *One Sided Difference Approximations for Nonlinear Conservation Laws*, Math. of Comp., vol 36, pp 321-352, 1981.

[4] GODUNOV S.K. et coll., *Résolution Numérique des Problèmes Multidimensionnels de la Dynamique des Gaz*, Editions Mir, Moscou, 1976, 1979.

[5] NEDELEC J.C., *Mixed Finite Elements in* $\mathbb{R}^3$, Numer Math, vol 35, pp 315-341, 1980.

[6] OSHER S., *Numerical Solution of Singular Perturbation Problems and Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, in Math Studies n° 47 (Axelsson-Frank-Van der Sluis eds), North Holland, Amsterdam, pp 179-205, 1981.