

Différences finies caractéristiques

pour les options asiatiques

François Dubois \square

1) Introduction.

- Une option d'achat donne le droit, mais pas l'obligation, d'acheter une action de manière différée tout en se garantissant sur son prix. La détermination du prix des options est un problème complexe, qui donne lieu, après modélisation stochastique à l'aide du mouvement brownien, à la résolution d'équations aux dérivées partielles depuis le travail fondateur de Black-Scholes [BS73] et Merton [Me73]. Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Lamberton et Lapeyre [LL92] pour une introduction aux méthodes du calcul stochastique appliqué à la finance et une description de l'analyse mathématique qui conduit à des modèles déterministes.

- Les options asiatiques introduisent une moyenne du prix de l'action au cours du temps, afin de contrer certaines spéculations. Dans ce cas, l'équation continue à résoudre a été mise en évidence il y a quelques années par Rogers et Shi [RS95]. Après un prétraitement naturel destiné à faire s'écouler le temps du passé vers le futur, l'équation aux dérivées partielles à résoudre s'écrit dans une première approche :

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \left(r x + \frac{1}{T} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x > 0, t > 0,$$

$$(2) \quad u(0, x) = 0, \quad x \geq 0,$$

$$(3) \quad u(t, 0) = \frac{1}{rT} \left(1 - e^{-rt} \right), \quad t \geq 0.$$

\square Conservatoire National des Arts et Métiers, fdubois@cnam.fr,
janvier 2003, mai 2003, édition 29 mars 2009.

Les grandeurs r , σ et T sont strictement positives ; r est le taux d'intérêt ($r \simeq 2\%$ à 15% typiquement), σ la volatilité de l'action ($\sigma \simeq 5\%$ à 20% dans les applications) et T l'horizon du problème ($T = 1$ [an] par exemple). On se propose de calculer avec grande précision (quatre chiffres significatifs !) le nombre $u(T, x)$ pour une valeur arbitraire x positive du "sous-jacent".

2) Reformulation caractéristique.

- Comme le montre le travail de Lelièvre [Le2k], le problème (1) (2) (3) est **raide** quand la diffusion (la volatilité) σ est petite, ce qui est le cas lorsque σ vaut $0,05$ typiquement. On se propose ici d'utiliser la **linéarité** du terme convectif de l'équation d'évolution (1) *via* la méthode des caractéristiques pour transformer l'advection-diffusion (1) en une **pure** diffusion. On doit simplement intégrer l'équation différentielle ordinaire "satellite" suivante :

$$(4) \quad \frac{dx}{dt} = rx + \frac{1}{T}$$

en prenant garde à **bien** paramétrer le lieu des points où les courbes intégrales de l'équation (4) entrent dans le domaine admissible $\{x > 0, t > 0\}$. Il vient alors naturellement

$$(5) \quad rx + \frac{1}{T} \equiv \frac{y}{T} e^{rt}, \quad y > 0.$$

Lorsque $t = 0$, la relation (5) s'écrit $rx = \frac{1}{T}(y - 1)$ pour $x > 0, y > 1, t = 0$, et pour $x = 0$, on a simplement $y = e^{-rt}$ pour $t > 0, y < 1, x = 0$.

- Ces considérations suggèrent le **changement de variables** suivant

$$]0, \infty[^2 \ni (t, x) \longmapsto (\theta \equiv t, y \equiv (rTx + 1) e^{-rt}) \in]0, \infty[^2,$$

avec la condition supplémentaire $\theta > \frac{1}{r} \log \frac{1}{y}$, ainsi que le **changement de fonction inconnue** obtenu en cherchant $u(\bullet, \bullet)$ sous la forme $u(t, x) \equiv v(\theta, y)$.

- La transformation de l'équation (1) impose de calculer avec soin les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \theta} - ry \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = rT e^{-r\theta} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = rT e^{-r\theta} \frac{\partial}{\partial y} \left[rT e^{-r\theta} \frac{\partial v}{\partial y} \right] = (rT)^2 e^{-2r\theta} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Comme $-r y + (r x + \frac{1}{T}) r T e^{-r t}$ est identiquement nul, le terme en $\frac{\partial v}{\partial y}$ dans le membre de gauche de l'équation (1) est nul ; de plus, compte tenu de la relation (5), on a

$$\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \sigma^2 \left(x r T e^{-r \theta} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\sigma^2}{2} \left(y - e^{-r \theta} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

et l'équation d'évolution de la nouvelle fonction inconnue $v(\bullet, \bullet)$ s'écrit

$$(6) \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\sigma^2}{2} \left(y - e^{-r \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad \theta > 0, y > 0, \theta > \frac{1}{r} \log \frac{1}{y}.$$

Cette équation purement diffusive où l'advection a été "distillée" dans le changement de variables $(t, x) \mapsto (\theta, y)$ a été également utilisée par Večer [Ve01] en suivant une approche purement stochastique.

- Pour $\theta = 0$ et $y \geq 1$, la condition initiale (2) prend maintenant la forme

$$(7) \quad v(0, y) = 0, \quad y \geq 1.$$

Lorsque $y < 1$ et $\theta = \frac{1}{r} \log \frac{1}{y}$, la condition à la limite (3) devient

$$(8) \quad v\left(\frac{1}{r} \log \frac{1}{y}, y\right) = g(y) \equiv \frac{1}{r T} (1 - y), \quad 0 < y \leq 1.$$

Le problème aux limites (6)(7)(8) est posé sur un domaine non rectangulaire

$$\Omega_T = \left\{ (\theta, y), 0 \leq \theta \leq T, y > 0, \theta \geq \frac{1}{r} \log \frac{1}{y} \right\}$$

dont la frontière contient la courbe Γ définie par $\Gamma = \left\{ \left(\theta = \frac{1}{r} \log \frac{1}{y}, y \right), 0 < y \leq 1 \right\}$. La discrétisation de ce problème demande de réfléchir avec soin à un maillage en espace-temps qui contienne explicitement la courbe Γ . On peut suggérer le schéma d'ordre deux de précision obtenu grâce à un schéma en temps à pas constant de Crank-Nicolson et à pas non uniforme pour la variable y , au moins pour $y < 1$.

3) Discrétisation en temps.

- Nous écrivons l'équation (6) sous la forme

$$(9) \quad \frac{dv}{d\theta} = A(\theta) \bullet v(\theta)$$

où $v(\bullet)$ est une fonction inconnue de la variable y (avec $y \geq e^{-r \theta}$) qui varie au cours du temps. L'opérateur linéaire $A(\theta)$ est donné par

$$(10) \quad A(\theta) = \mu(\theta, y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \equiv \frac{\sigma^2}{2} \left(y - e^{-r\theta} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

et agit sur des fonctions assez régulières de la variable y .

- On introduit un pas de temps Δt qui permet de diviser la durée T de l'étude en N intervalles égaux $[\theta^k, \theta^{k+1}]$ associés aux instants intermédiaires θ^k :

$$\Delta t = \frac{T}{N}, \quad \theta^k \equiv k \Delta t, \quad 0 \leq k \leq N.$$

Nous cherchons une solution approchée $v^k \simeq v(\theta^k)$ de l'équation (9) au temps θ^k grâce au schéma de Crank-Nicolson (voir par exemple Hildebrand [Hi56]) :

$$(11) \quad \frac{1}{\Delta t} \left(v^{k+1} - v^k \right) = \frac{1}{2} \left(A(\theta^{k+1}) \bullet v^{k+1} + A(\theta^k) \bullet v^k \right).$$

La condition **initiale** (7) peut s'écrire sous la forme

$$v^0 = 0$$

et il est commode de poser $A^k = A(\theta^k)$. Le système linéaire (11) à résoudre peut s'écrire aussi sous la forme

$$(12) \quad \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} A^{k+1} \right) \bullet v^{k+1} = \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} A^k \right) \bullet v^k$$

et nous devons maintenant nous intéresser à la discrétisation en espace pour préciser le travail à faire.

4) Discrétisation en espace.

- Les temps intermédiaires θ^k définissent naturellement pour $0 \leq k \leq N$, des points y_{N-k} sur la courbe limite Γ , et l'on pose :

$$y_j \equiv \exp \left(-r \theta^{N-j} \right), \quad 0 \leq j \leq N.$$

On remarque aussi que $y_0 = e^{-rT}$ et $y_N = 1$. On établit par ailleurs sans difficulté la relation

$$(13) \quad y_{j+1} = e^{r \Delta t} y_j, \quad j \geq 0$$

qui indique qu'une suite géométrique de raison

$$\rho \equiv e^{r \Delta t}$$

est naturellement associée au problème aux limites (6) (7) (8) discrétisé par un pas de temps constant.

- Les données géométriques introduites ci-dessus conduisent à une grille cartésienne (θ^k, y_j) à pas constants en temps et à “pas géométriques” en espace, en suivant la relation (13). La condition pour un point discret “courant” (θ^k, y_j) d’appartenir au domaine Ω_T s’exprime, compte tenu de la relation (13), sous la forme

$$(\theta^k, y_j) \in \Omega_T \iff j \geq N - k.$$

- Les conditions aux limites sur la grille discrète sont très simples. On a d’une part à l’instant initial

$$v_j^0 = 0, \quad j \geq 0$$

et sur la courbe Γ :

$$v_{N-k}^k = \frac{1}{rT} (1 - y_{N-k}), \quad 0 \leq k \leq N.$$

On va préciser dans la suite de ce paragraphe un algorithme pour calculer un ensemble de valeurs $(v_j^{k+1})_{j \geq N-k-1}$ une fois connu le vecteur $(v_j^k)_{j \geq N-k}$ au pas de temps numéro k .

- On doit dans un premier temps **borner** l’ensemble des valeurs ponctuelles en espace, de manière à définir un ensemble fini de variables. On le fait en fixant un entier J qui indique le nombre de points de discrétisation à l’instant initial. L’ensemble des points admissibles en espace au pas de temps numéro k est donc paramétré par des entiers j qui vérifient la condition

$$N - k \leq j \leq N + J.$$

Par ailleurs, dans un soucis de simplicité de la mise en œuvre, on décide ici de garder une progression géométrique pour l’**ensemble** de la suite y_j des points en espace, qui vérifie donc la relation (13) pour tous les indices j tels que $0 \leq j \leq N + J$. Par conséquent, l’ordre du système linéaire (12) est **variable** en fonction de l’indice k du pas de temps. Au fur et à mesure que le temps discret avance, l’ordre du système linéaire à résoudre passe progressivement de J (à l’instant initial) à $N + J$ (à l’instant final N). A l’instant k , on a à résoudre un système linéaire d’ordre $J + k$.

- Compte tenu de la relation (10) valable dans le cas d’un espace continu, l’opérateur discret A^k agit sur les fonctions discrètes $(w_j)_{N-k \leq j \leq N+J}$ à l’aide d’un opérateur aux différences finies $D_{j m}^k$:

$$(14) \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \right)_j^k \simeq \sum_{m=N-k}^{N-k+J} D_{jm}^k w_m$$

qui doit être compatible avec les points existants sur la grille à l'instant k . Dans le cas général d'un indice j "courant", on choisit un opérateur aux différences finies **centré à cinq points** :

$$(15) \quad D_{jm}^k = \Delta_{jm}^c, \quad N-k+2 \leq j \leq N+J-2,$$

où Δ_{jm}^c précisé en Annexe 1 aux relations (A1) à (A7), est *a priori* non nul pour $j-2 \leq m \leq j+2$. Lorsqu'on atteint les bornes du domaine d'études cet opérateur aux différences n'est plus défini, et on doit en changer. Si nous constaterons bientôt que nous n'avons **pas** besoin de définir l'opérateur $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \right)_j^k$ pour $j = N-k$, nous ne disposons par contre dans le cas où $j = N-k+1$ que **d'un seul** point sur la gauche, où vit la condition à la limite. On pose donc

$$(16) \quad D_{N-k+1,m}^k = \Delta_{N-k+1,m}^d, \quad N-k \leq m \leq N-k+4$$

et l'expression algébrique des coefficients Δ_{jm}^d est donnée aux relations (A8) à (A13) de l'Annexe 1. On utilise encore cinq points de grille, et ce schéma décentré est non nul lorsque m varie de $N-k$ à $N-k+4$.

- Pour les valeurs "les plus à droite" de l'indice j , on se donne une classique condition de Neumann "artificielle"

$$(17) \quad \frac{\partial v}{\partial y}(y_{N+J}) = 0$$

qu'il convient de discrétiser. Ceci conduit au schéma au bord

$$(18) \quad D_{N+J,m}^k = \Delta_{N+J,m}^n, \quad N+J-3 \leq m \leq N+J,$$

dont les coefficients $\Delta_{N+J,m}^n$ sont non nuls pour quatre valeurs de l'entier m et sont précisés à l'Annexe 1 aux relations (A15) à (A19). Lorsque $j = N+J-1$, on peut considérer que la condition de Neumann (17) est encore "active" et l'on introduit un schéma "**ante Neumann**"

$$(19) \quad D_{N+J-1,m}^k = \Delta_{N+J-1,m}^{an}, \quad N+J-3 \leq m \leq N+J,$$

différent de zéro dans les mêmes conditions que (18) et détaillé algébriquement aux relations (A20) à (A25). On se souviendra dans la suite que l'expression (14) de la dérivée seconde discrète en espace prend en compte un nombre **fini** de cinq points au plus, avec des expressions qui dépendent du **couple** (k, j) .

- On pose maintenant

$$\mu_j^k = \frac{\sigma^2}{2} (y_j - \exp(-r\theta^k))^2,$$

on remarque que μ_{N-k}^k est toujours **nul** car le point discret correspondant (θ^k, y_{N-k}) appartient à la courbe Γ . Donc le coefficient correspondant de l'opérateur A^k est nul sur la courbe Γ et le calcul de $D_{N-k,m}^k$ est inutile, comme annoncé plus haut. On a finalement

$$(20) \quad (A^k \bullet w)_j^k = \mu_j^k \sum_{m=N-k}^{N-k+J} D_{j m}^k w_m, \quad N-k \leq j \leq N+J,$$

avec $D_{j m}^k$ précisé aux relations (15), (16), (18) et (19). Le calcul des nouvelles valeurs $(v_j^{k+1})_{N-k-1 \leq j \leq N+J}$ en fonction des anciennes $(v_j^k)_{N-k \leq j \leq N+J}$ demande de résoudre le système linéaire (12), avec A^k précisé en (20). Ce problème numérique et algorithmique a été implémenté avec le progiciel Octave [Ea92] puis en langage Fortran.

5) Interpolation des résultats numériques.

- Nous avons effectué plusieurs expérimentations numériques pour résoudre le problème (1)(2)(3) sous la forme (6)(7)(8) avec la méthode exposée plus haut. Nous utilisons toujours la valeurs maximale $T = 1$ et nous cherchons toujours la solution à l'abscisse $x = 1$ de manière à comparer nos résultats avec ceux de la littérature. Une première difficulté est de **donner un sens** numérique discret au nombre $u_N(T, 1)$ lorsqu'on utilise N pas de temps entre l'origine du temps et l'instant final T ! En effet, compte tenu du changement de variable (5), la "position" $x = 1$ (la valeur $x = 1$ pour le sous-jacent) correspond au temps $T = 1$ à un point intermédiaire entre deux points de grille y_j , lesquels sont imposés *via* (13) pour des raisons pratiques.

- Nous procédons de la manière suivante. Nous plaçons d'abord le point $x = 1$ entre deux points x_j et x_{j+1} satisfaisant la relation (5), avec $t = T = 1$ et $y = y_j$ issu de la relation (13) :

$$(21) \quad x_j \equiv \frac{1}{rT} (y_j e^{rT} - 1) \leq x = 1 < x_{j+1} \equiv \frac{1}{rT} (y_{j+1} e^{rT} - 1).$$

Puis nous évaluons la valeur $u_N(T, 1)$ à partir des valeurs calculées v_m avec la méthode des différences finies grâce à une interpolation de Lagrange affine, parabolique ou cubique. Dans le cas d'une interpolation affine, nous utilisons

les valeurs v_j et v_{j+1} ainsi que le coefficient d'interpolation naturel associé à la relation (21). Dans le cas d'une interpolation parabolique, nous utilisons le triplet $(j-1, j, j+1)$ ou bien le triplet $(j, j+1, j+2)$, ce qui conduit à **deux** nouvelles valeurs possibles du résultat. Si nous utilisons un polynôme de degré trois, trois quadruplets peuvent être utilisés : $(j-2, j-1, j, j+1)$ “à gauche”, $(j-1, j, j+1, j+2)$ “centré” ou $(j, j+1, j+2, j+3)$ “à droite”. Pour évaluer $u_N(T, 1)$ nous disposons donc d'au moins **six** valeurs numériques !

- Dans le cas particulier $r = 0,02$, $\sigma = 0,30$, $N = 50$ et $J = 50$, cette méthodologie conduit aux valeurs proposées dans le tableau suivant pour cent fois $u_N(1, 1)$, données à dessein avec un très grand nombre de décimales :

$r = 0.02$, $\sigma = 0.3$	$N = 50$, $J = 50$
interpolation affine	7.312310335105
parabolique “à gauche”	7.300752595160
parabolique “à droite”	7.300405369134
cubique “à gauche”	7.300513763176
cubique “centrée”	7.300579690285
cubique “à droite”	7.300500745686

Dans ce cas, on voit apparaître naturellement une **incertitude** sur le résultat numérique. Dans ce cas particulier, le calcul prédit une valeur du prix de 7,3 avec **deux** chiffres significatifs qui correspondent au nombre de chiffres identiques pour les six variantes du résultat précédent si on prend en compte l'interpolation affine. Si on met de côté l'interpolation affine (trop grossière ?), la valeur prédite sur ce maillage est de 7,300 avec quatre chiffres significatifs !

- Mais souvenons-nous qu'il ne s'agit **que** de déterminer la valeur **approchée** de $u_N(T, 1)$ de $u(T, 1)$ pour un maillage comprenant N pas de temps ; la valeur “exacte” de $u(T, 1)$ se découvre petit à petit au fur et à mesure que N croît et que les chiffres de la représentation décimale du nombre $u_N(T, 1)$ se stabilisent. Cette remarque étant faite, nous avons choisi dans notre exploitation des résultats numériques d'éliminer dans un premier temps la valeur fournie par l'interpolation affine, afin de faire apparaître un nombre maximum de chiffres significatifs, même s'ils sont infirmés par raffinement du maillage. Nous reprenons dans un second temps la valeur proposée par l'interpolation affine, en ne gardant

des chiffres qu'elle propose que ceux qui sont compatibles avec les interpolations de degré deux et trois.

6) Variation de la frontière aval.

- Le problème (6)(7)(8) est posé dans un domaine **non borné** pour les valeurs de y tendant vers $+\infty$. Sa discrétisation pour un domaine en y qui vérifie la condition

$$(22) \quad y \leq y_{N+J}$$

introduit une frontière "artificielle" au point y_{N+J} , ainsi qu'une condition de Neumann homogène

$$(23) \quad \frac{\partial v}{\partial y}(y_{N+J}) = 0$$

pour "fermer" correctement le problème (6)(7)(8)(22)(23) d'un point de vue mathématique (voir par exemple à ce propos le livre de Raviart et Thomas [RT83]). Si on cherche à calculer $u_N(T, 1)$ correctement, il importe que le choix de cette frontière soit **sans influence** sur le résultat numérique obtenu. En pratique, il faut régler au mieux le nombre de points J à l'instant $t = 0$ de manière à repousser le plus loin possible en aval la frontière artificielle, sans pour autant augmenter de manière disproportionnée les coûts de calcul.

	$r = 0.02$	$N = 50$	$\sigma = 0.30$
interpolation	$J = 5$	$J = 10$	$J = 15$
affine	8.122031123561	7.394950557745	7.312320707748
P2 gauche	8.106307672701	7.382434184793	7.300762559218
P2 droite	8.106269542223	7.382259016940	7.300415479810
P3 gauche	8.106197026532	7.382289745155	7.300523834893
P3 centré	8.106288685226	7.382346958106	7.300589727353
P3 droite	8.106189196397	7.382277604767	7.300510807426

- Nous avons effectué deux séries de simulations avec les mêmes valeurs du taux $r = 0,02$ et le même nombre de pas de temps $N = 50$, comme au paragraphe précédent. Par contre, nous avons fait varier la position de la frontière en aval et donné à l'entier J les valeurs suivantes : 5, 10, 15, 25, 50, 75, allant

de dix pour cent de nœuds excédents à cent cinquante pour cent ! Nous donnons ci-dessous l'ensemble des résultats obtenus pour la valeur de $100 u_N(1, 1)$ pour les six interpolations vues plus haut, lorsque la volatilité σ vaut 0,3.

	$r = 0.02$	$N = 50$	$\sigma = 0.30$
interpolation	$J = 25$	$J = 50$	$J = 75$
affine	7.312320707748	7.312310335105	7.312310335104
P2 gauche	7.300762559218	7.300752595160	7.300752595160
P2 droite	7.300415479810	7.300405369134	7.300405369133
P3 gauche	7.300523834893	7.300513763176	7.300513763175
P3 centré	7.300589727353	7.300579690285	7.300579690285
P3 droite	7.300510807426	7.300500745686	7.300500745686

- Nous constatons que les écarts sont minimales entre les deux derniers résultats. Ceci confirme que la valeur trouvée plus haut, à savoir 7,3 avec deux chiffres significatifs, ne dépend pas de la position de la frontière aval, si celle-ci est choisie assez éloignée. Nous avons recommencé les mêmes expériences numériques, toutes choses égales par ailleurs, avec $\sigma = 0,05$.

	$r = 0.02$	$N = 50$	$\sigma = 0.05$
interpolation	$J = 5$	$J = 10$	$J = 15$
affine	1.718686875213	1.718686922768	1.718686922768
P2 gauche	1.647683600701	1.647683592162	1.647683592162
P2 droite	1.663150545833	1.663150582571	1.663150582571
P3 gauche	1.638612457529	1.638612402815	1.638612402815
P3 centré	1.655385529728	1.655385543735	1.655385543735
P3 droite	1.648408787690	1.648408819256	1.648408819256

- Dans le cas d'une volatilité plus faible de 0,05, "la convergence en frontière aval" est atteinte dès que le nombre de mailles initiales est égal à trente pour cent du nombre de pas de temps, comme le montre le tableau ci-dessus. Toutefois, la valeur numérique de 1,6 n'est même pas connue en toute rigueur avec deux

chiffres significatifs si on accepte la valeur que prédit l'interpolation affine. Dans la suite de nos expériences numériques, nous avons systématiquement choisi $J = N$, même si ce choix est sous-optimal du point de vue du coût de calcul.

7) Synthèse des premières expériences numériques.

méthode	$r = 0.02$	$r = 0.02$	$r = 0.02$	$r = 0.02$
initiale	$\sigma = 0.30$	$\sigma = 0.30$	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.05$
N	P_1	P_2, P_3	P_1	P_2, P_3
50	7.3	7.300	1	1.6
100	7.306	7.30593	1.68	1.686
200	7.307	7.307235	1.694	1.6943
400	7.3075	7.307545	1.696	1.69638
800	7.3076	7.3076146	1.6970	1.696889
1600	7.30763	7.30762764	1.6970	1.697017
3200	7.30763	7.30762875	1.6970	1.6970483
6400	7.307628	7.30762796	1.69706	1.69705622

méthode	$r = 0.15$	$r = 0.15$	$r = 0.10$	$r = 0.10$
initiale	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.20$	$\sigma = 0.20$
N	P_1	P_2, P_3	P_1	P_2, P_3
50	6.8	6.79	7.0	7.031
100	6.79	6.794	7.0	7.0386
200	6.794	6.7942	7.04	7.0404
400	6.7943	6.79433	7.041	7.04093
800	6.7943	6.79435	7.041	7.041044
1600	6.79435	6.7943537	7.04107	7.0410705
3200	6.794355	6.79435471	7.04107	7.04107607
6400	6.794355	6.79435492	7.041077	7.041077001

- Nous avons effectué des simulations pour des maillages de plus en plus fins dans quatre cas, dont deux traités initialement par Rogers et Shi : $r = 0,02$ avec $\sigma = 0,30$ et $\sigma = 0,05$ de manière à comparer nos résultats avec ceux

de Lelièvre [Le2k]. Puis nous avons considéré $r = 0,15$ $\sigma = 0,05$ et nous utilisons comme référence le travail de Zvan, Forsyth et Vetzal [ZFV98]. Enfin, les résultats récents de Lapeyre et Témam [LT03] nous ont conduit à considérer le cas $r = 0,10$ et $\sigma = 0,20$. Pour chacun de ces cas, nous donnons dans le tableau qui suit les valeurs numériques prédites sur chaque maillage, en tenant compte des incertitudes étudiées plus haut.

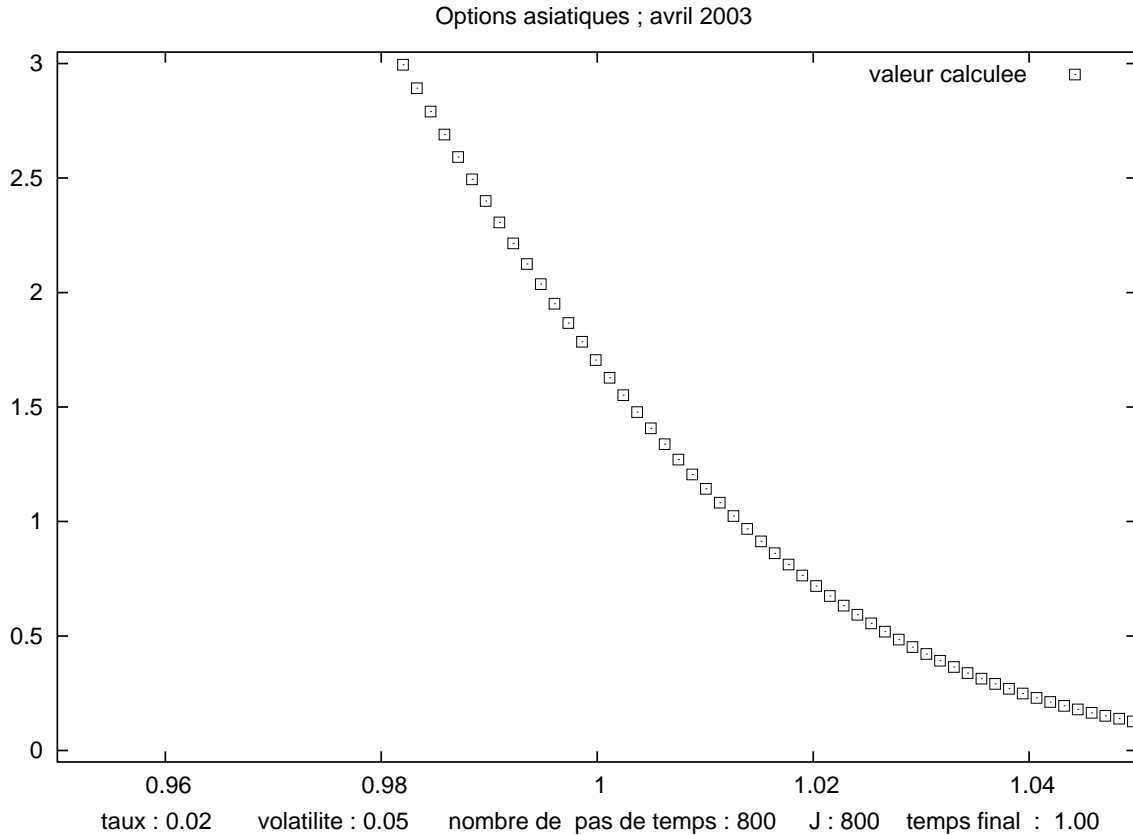


Figure 1 *Solution du modèle (6)(7)(8) pour un “sous-jacent” $x = 1$.*

- Compte tenu de la stabilité des dernières décimales après raffinement du maillage, on peut donc en conclure que nous savons calculer avec quatre chiffres significatifs au moins la solution de l’équation des options asiatiques. Nous illustrons ces résultats à l’aide de la figure 1.

8) Une variante mathématique.

- Nous avons proposé un schéma aux différences finies “d’ordre deux en temps et d’ordre trois en espace” pour prédire les valeurs numériques de l’équation des

options asiatiques. Toutefois, la mise en œuvre numérique développée jusqu'ici ne nous semble pas appropriée aux contraintes opérationnelles du temps réel puisque les simulations sur les maillages les plus fins nous semblent trop lentes. Nous nous proposons d'améliorer la méthode numérique introduite plus haut. Pour cela, nous remarquons que le problème (1) (2) (3) présente une **singularité du gradient** en $(t = 0, x = 0)$ dont nous n'avons pas tenu compte pour la discrétisation par différences finies. De plus, cette singularité du gradient est stationnaire au cours du temps si on néglige la diffusion comme on le voit en prenant $\sigma = 0$ au sein de la relation (6).

- Il est donc approprié de décomposer l'inconnue $v(\theta, y)$ du problème (6)(7)(8) sous la forme

$$(24) \quad v(\theta, y) \equiv g(y) + \varphi(\theta, y), \quad (\theta, y) \in \Omega_T$$

où la fonction $g(\bullet)$, donnée *via* la relation (8), est définie par

$$(25) \quad g(y) \equiv \begin{cases} \frac{1}{rT} (1 - y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & y \geq 1. \end{cases}$$

La fonction $g(\bullet)$ a une dérivée première **discontinue** en $y = 1$, donc on a, après un calcul facile sur les distributions (voir par exemple Schwartz [Sc65]) :

$$(26) \quad (A(\theta) \bullet g)(y) = \frac{\sigma^2}{2rT} (1 - e^{-r\theta})^2 \delta_1,$$

où δ_1 désigne la masse de Dirac au point $y = 1$. Nous pouvons prendre en compte de cette singularité "oubliée" dans l'approche précédente, en changeant de fonction inconnue à l'aide de la relation (24). La nouvelle fonction inconnue $\varphi(\bullet, \bullet)$ satisfait donc à un problème avec un second membre qui présente une singularité en espace et des conditions initiale et à la limite homogènes :

$$(27) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - A(\theta) \bullet \varphi = A(\theta) \bullet g$$

$$(28) \quad \varphi(\theta, y) = 0, \quad (\theta, y) \in \Gamma$$

$$(29) \quad \varphi(0, y) = 0, \quad y \geq 0.$$

Nous n'avons plus à prendre en compte de singularité du gradient dans la condition initiale et à la limite, reportée sur le second membre de l'équation dynamique (27).

- Le problème (24) (25) (26) (27) (28) (29) est mathématiquement équivalent à (6) (7) (8). Toutefois, la discrétisation que nous allons en faire ne l'est pas tout

à fait. Nous utilisons comme au paragraphe 3 un schéma de Crank-Nicolson, et l'équation d'évolution discrète prend maintenant la forme

$$(30) \quad \begin{cases} \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} A^{k+1} \right) \bullet \varphi^{k+1} = \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} A^k \right) \bullet \varphi^k + \\ + \frac{\sigma^2}{2} \left(\int_{\theta^k}^{\theta^{k+1}} (1 - e^{-r\theta})^2 d\theta \right) \delta_1 \end{cases}$$

avec des conditions aux limites **homogènes** (28)(29) pour la fonction $\varphi^k(\bullet)$.

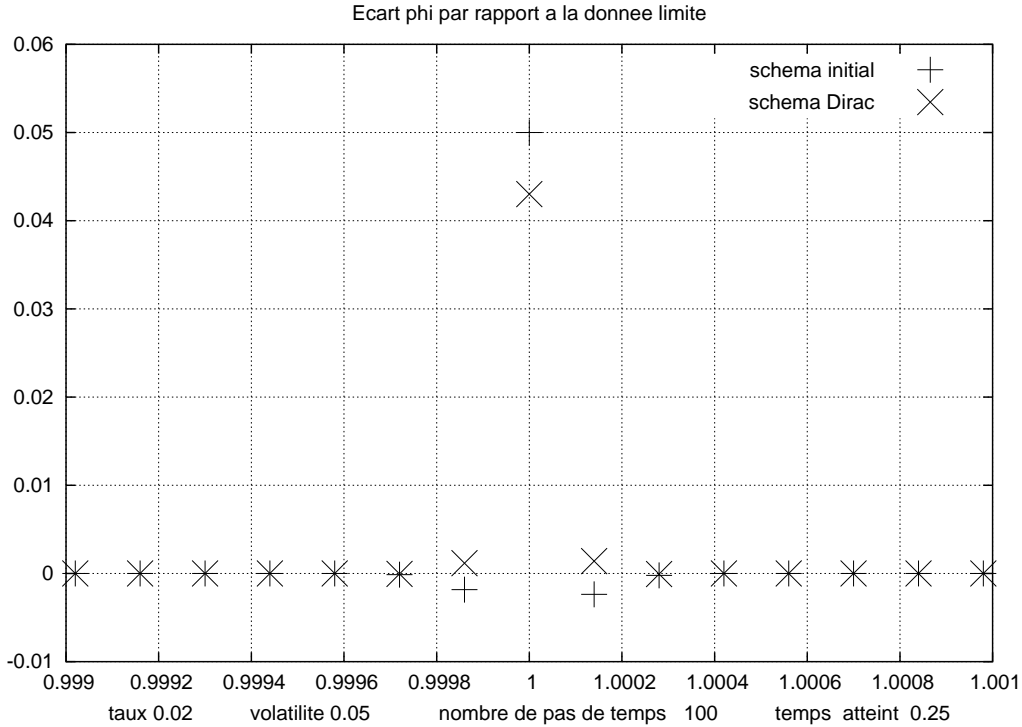


Figure 2 *Non monotonie des différences finies proposées initialement.*

- La discrétisation en espace de l'équation (30) est menée comme au paragraphe 4 pour l'opérateur A^k . Il suffit de préciser ici comment on discrétise la masse de Dirac δ_1 sur la grille des $(y_j)_{j \geq N-k}$ proposée à la relation (13). Nous remarquons à nouveau que $y_N = 1$ et nous proposons simplement, pour un pas de temps $\Delta t \equiv T/N$:

$$(\delta_1^N)_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq N \\ \frac{2}{y_{N+1} - y_{N-1}} & \text{si } j = N \end{cases}$$

de manière à satisfaire numériquement la relation formelle $\int \delta_1(y) dy = 1$. Nous nommons “Dirac” cette variante de la méthode des différences finies caractéristique.

9) Une seconde famille de résultats.

méthode	$r = 0.02$	$r = 0.02$	$r = 0.02$	$r = 0.02$
Dirac	$\sigma = 0.30$	$\sigma = 0.30$	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.05$
N	P_1	P_2, P_3	P_1	P_2, P_3
50	7	7.2	1.	1.6
100	7.30	7.30	1.6	1.69
200	7.3	7.30	1.697	1.697
400	7.3076	7.3076	1.697	1.6970
800	7.3076	7.3076238	1.697	1.697058
1600	7.30763	7.3076254	1.6971	1.697058
3200	7.30763	7.30762573	1.6971	1.6970588
6400	7.307626	7.307625575	1.69706	1.69705875

méthode	$r = 0.15$	$r = 0.15$	$r = 0.10$	$r = 0.10$
Dirac	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.20$	$\sigma = 0.20$
N	P_1	P_2, P_3	P_1	P_2, P_3
50	6.79	6.79	7.0	7.04
100	6.79	6.794	7.04	7.041
200	6.794	6.7944	7.04	7.04106
400	6.7944	6.79436	7.041	7.04107
800	6.7943	6.79435	7.0411	7.041076
1600	6.79435	6.794355	7.04108	7.04107645
3200	6.794355	6.7943549	7.041077	7.04107664
6400	6.794355	6.79435495	7.041077	7.041076689

- Nous présentons à la figure 2 un “instantané” d’une évolution typique de la variable φ introduite à la relation (24) avec les deux variantes de l’approche des différences finies couplée à la méthode des caractéristiques. Nous constatons qu’effectivement, la méthode initiale n’est **pas** monotone, défaut qui semble corrigé avec la variante qui utilise une masse de Dirac au point $y = 1$.
- On résume les expériences numériques effectuées avec le second schéma “Dirac” dans le tableau suivant, effectué avec les mêmes principes que ceux vus plus haut. L’ensemble de nos résultats numériques est disponible sur le réseau [Du03].
- Nous pouvons donc extraire des deux tableaux de résultats numériques ci-dessus ainsi que de ceux présentés au paragraphe 7 des valeurs prédites pour le prix de l’option asiatique. Nous proposons au tableau ci-dessous des valeurs avec un maximum de chiffres significatifs, maximum obtenu en éliminant des résultats l’interpolation affine et en ne gardant que les chiffres communs aux deux maillages les plus fins, avec 3200 et 6400 mailles temporelles respectivement. Ces résultats sont comparés dans le tableau qui suit avec les quatre références de la littérature. Nous constatons que la méthode initiale prédit un (ou deux) chiffres significatifs de moins que la variante Dirac.

r	σ	initiale	Dirac	auteur	référence
0.02	0.30	7.30763	7.307626	Lelièvre	7.308
0.02	0.05	1.69705	1.6970588	Lelièvre	1.697
0.15	0.05	6.794355	6.7943549	Zvan <i>et al</i>	6.793
0.10	0.20	7.04107	7.0410766	Témam	7.041

10) Conclusion et remerciements.

- Nous avons achevé avec succès le programme de travail qui était de calculer avec quatre chiffres significatifs au moins la solution de l’équation des options asiatiques. Nous avons utilisé la méthode des caractéristiques, un changement de variables qui impose de travailler dans un domaine **mobile** en fonction du temps, couplé avec des différences finies implicites en temps d’ordre deux et un maillage géométrique en espace avec un schéma numérique d’ordre formel égal à trois. La prise en compte de la singularité initiale du problème a été faite par un changement de fonction inconnue, possible sans changer de méthode

compte tenu de la **linéarité** de l'équation aux dérivées partielles à résoudre ; l'analyse numérique précise des résultats obtenus reste à élaborer. Il nous semble important d'améliorer dans le futur l'algorithmique proposée dans cette étude et on peut imaginer par exemple d'utiliser un schéma explicite en temps et/ou passer à un schéma temporel d'ordre plus élevé, trois ou quatre typiquement.

- L'auteur est heureux de saluer amicalement ici Bernard Lapeyre, toujours à l'écoute d'interactions nouvelles entre les diverses branches des mathématiques appliquées. Cette relation a permis plusieurs rencontres fructueuses avec Tony Lelièvre au laboratoire "Cermics" de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, échanges créatifs qui ont donné du rythme pour approfondir ce sujet de recherche.

11) Références.

- [BS73] F. Black, M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, vol. 81, p. 635-654, 1973.
- [Du03] F. Dubois. Logiciel "Asia9", laboratoire Ascii, <http://www.math.u-psud.fr/~fdubois/travaux/vrac/asiatiques03/asiatiques.m>, 2003.
- [Ea92] J.W. Eaton. The Octave free software, <http://www.octave.org>, 1992.
- [Hi56] F.B. Hildebrand. *Introduction to numerical analysis*, Dover, New York, 1956.
- [LL92] D. Lamberton, B. Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipses, Paris, 1992.
- [LT03] B. Lapeyre, E. Témam. Competitive Monte Carlo methods for the Pricing of Asian Options, *Journal of Computational Finance*, 2003.
- [Le2k] T. Lelièvre. Pricing des options asiatiques, *preprint*, <http://cermics.enpc.fr>, juin 2000.
- [Me73] R.C. Merton. Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Sciences*, vol. 4, p. 141-183, 1973.
- [RT83] PA. Raviart, J.M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, 1983.
- [RS95] L.C.G. Rogers, Z. Shi. The value of an asian option, *Journal of Applied Probability*, vol. 32, p. 1077-1088, 1995.
- [Sc65] L. Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Paris, 1965.

- [Ve01] J. Večer. New pricing of asian options, *preprint, Research Center for Financial Engineering, Kyoto University*, mai 2001.
- [ZFV98] R. Zvan, P.A. Forsyth, K. Vetzal. Robust Numerical Methods for PDE Models of Asian Options, *Journal of Computational Finance*, vol. 1, p. 39-78, 1998.

Annexe 1.

Différences finies sur un maillage non uniforme.

- On désigne par j le numéro du point courant. On suppose ici les abscisses y_m définies autant que de besoin, ainsi que les valeurs ponctuelles u_m du champ $u(\bullet)$, pour les indices m tels que $j - 3 \leq m \leq j + 3$ typiquement. On cherche à exprimer la dérivée partielle discrète $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y_j)$ au j° sommet “au mieux” en fonction des données par une **combinaison linéaire** de la valeur ponctuelle u_j et de ses voisines u_m .
- Une approximation **centrée** à cinq points se présente sous la forme d’un schéma numérique du type

$$(A1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y_j) \simeq \sum_{m=j-2}^{j+2} \Delta_{j,m}^c u_m.$$

Pour trouver les cinq coefficients $\Delta_{j,m}^c$, on exprime que la relation (A1) est **exacte** pour les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à quatre. On pose

$$(A2) \quad y_{k,l} \equiv y_l - y_k$$

et après un calcul élémentaire, on obtient :

$$(A3) \quad \Delta_{j,j-2}^c = 2 \frac{y_{j,j+1} y_{j,j+2} + y_{j,j+2} y_{j,j-1} + y_{j,j-1} y_{j,j+1}}{y_{j-2,j-1} y_{j-2,j} y_{j-2,j+1} y_{j-2,j+2}}$$

$$(A4) \quad \Delta_{j,j-1}^c = -2 \frac{y_{j,j+1} y_{j,j+2} + y_{j,j+2} y_{j,j-2} + y_{j,j-2} y_{j,j+1}}{y_{j-2,j-1} y_{j-1,j} y_{j-1,j+1} y_{j-1,j+2}}$$

$$(A5) \quad \Delta_{j,j}^c = 2 \frac{\left(y_{j,j-2} y_{j,j-1} + y_{j,j+1} y_{j,j+2} + \right. \\ \left. + (y_{j,j-2} + y_{j,j-1}) (y_{j,j+1} + y_{j,j+2}) \right)}{y_{j-2,j} y_{j-1,j} y_{j,j+1} y_{j,j+2}}$$

$$(A6) \quad \Delta_{j,j+1}^c = -2 \frac{y_{j,j-1} y_{j,j+2} + y_{j,j+2} y_{j,j-2} + y_{j,j-2} y_{j,j-1}}{y_{j-2,j+1} y_{j-1,j+1} y_{j,j+1} y_{j+1,j+2}}$$

$$(A7) \quad \Delta_{j,j+2}^c = 2 \frac{y_{j,j-1} y_{j,j+1} + y_{j,j+1} y_{j,j-2} + y_{j,j-2} y_{j,j-1}}{y_{j-2,j+2} y_{j-1,j+2} y_{j,j+2} y_{j+1,j+2}}.$$

- L'approximation **décentrée** à droite à cinq points dont nous avons besoin s'écrit

$$(A8) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y_j) \simeq \sum_{m=j-1}^{j+3} \Delta_{j,m}^d u_m.$$

On calcule les coefficients $\Delta_{j,m}^d$ de la combinaison linéaire (A8) comme dans le cas précédent, ce qui conduit aux valeurs littérales suivantes :

$$(A9) \quad \Delta_{j,j-1}^d = 2 \frac{y_{j,j+1} y_{j,j+2} + y_{j,j+2} y_{j,j+3} + y_{j,j+3} y_{j,j+1}}{y_{j-1,j} y_{j-1,j+1} y_{j-1,j+2} y_{j-1,j+3}}$$

$$(A10) \quad \Delta_{j,j}^d = -2 \frac{\left(y_{j,j-1} y_{j,j+3} + y_{j,j+1} y_{j,j+2} + \right. \\ \left. + (y_{j,j-1} + y_{j,j+3})(y_{j,j+3} + y_{j,j+2}) \right)}{y_{j-1,j} y_{j,j+1} y_{j,j+2} y_{j,j+3}}$$

$$(A11) \quad \Delta_{j,j+1}^d = 2 \frac{y_{j,j-1} y_{j,j+2} + y_{j,j+2} y_{j,j+3} + y_{j,j+3} y_{j,j-1}}{y_{j-1,j+1} y_{j,j+1} y_{j+1,j+2} y_{j+1,j+3}}$$

$$(A12) \quad \Delta_{j,j+2}^d = -2 \frac{y_{j,j-1} y_{j,j+1} + y_{j,j+1} y_{j,j+3} + y_{j,j+3} y_{j,j-1}}{y_{j-1,j+2} y_{j,j+2} y_{j+1,j+2} y_{j+2,j+3}}$$

$$(A13) \quad \Delta_{j,j+3}^d = 2 \frac{y_{j,j-1} y_{j,j+1} + y_{j,j+1} y_{j,j+2} + y_{j,j+2} y_{j,j-1}}{y_{j-1,j+3} y_{j,j+3} y_{j+1,j+3} y_{j+2,j+3}}.$$

- Afin de prendre en compte une condition à la limite de **Neumann** homogène “à droite” du domaine d'étude, c'est à dire du type

$$(A14) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(y_j) = 0,$$

avec y_j supposé être un sommet à la limite cette fois, on utilise une approximation à quatre points de la forme

$$(A15) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y_j) \simeq \sum_{m=j-3}^j \Delta_{j,m}^n u_m.$$

Pour trouver les quatre coefficients $\Delta_{j,m}^n$, on exprime, compte tenu de (A14), que la relation (A15) est **exacte** pour les fonctions polynomiales qui prennent les valeurs 1 , $(y - y_j)^2$, $(y - y_j)^3$ et $(y - y_j)^4$. Le schéma numérique (A15) reste de ce fait d'ordre trois et prend explicitement en compte la condition limite (A14). Les calculs ne présentent pas de difficulté particulière et l'on a :

$$(A16) \quad \Delta_{j,j-3}^n = 2 \frac{y_{j-2,j} y_{j-1,j}}{y_{j-3,j-2} y_{j-3,j-1} (y_{j-3,j})^2}$$

$$(A17) \quad \Delta_{j,j-2}^n = -2 \frac{y_{j-3,j} y_{j-1,j}}{y_{j-3,j-2} y_{j-2,j-1} (y_{j-2,j})^2}$$

$$(A18) \quad \Delta_{j,j-1}^n = 2 \frac{y_{j-3,j} y_{j-2,j}}{y_{j-3,j-1} y_{j-2,j-1} (y_{j-1,j})^2}$$

$$(A19) \quad \Delta_{j,j}^n = -2 \frac{\left(\begin{array}{l} y_{j-3,j}^2 y_{j-2,j}^2 + y_{j-2,j}^2 y_{j-1,j}^2 + y_{j-1,j}^2 y_{j-3,j}^2 + \\ + y_{j-3,j} y_{j-2,j} y_{j-1,j} (y_{j-3,j} + y_{j-2,j} + y_{j-1,j}) \end{array} \right)}{(y_{j-3,j})^2 (y_{j-2,j})^2 (y_{j-1,j})^2}.$$

• Enfin, toujours dans ce dernier cas d'une condition limite de Neumann homogène "à droite" du domaine d'étude, le calcul de l'"ante dernier" point du maillage demande de prendre aussi en compte la condition (A14). Si j désigne l'indice de ce point "courant", alors la condition limite (A14) s'écrit

$$(A20) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(y_{j+1}) = 0,$$

avec y_{j+1} supposé à la limite cette fois. Avec une approximation à quatre points de la forme

$$(A21) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y_j) \simeq \sum_{m=j-2}^{j+1} \Delta_{j,m}^{an} u_m,$$

on trouve les coefficients $\Delta_{j,m}^{an}$ en exprimant que la relation (A21) est **exacte** pour les fonctions polynomiales 1 , $(y - y_{j+1})^2$, $(y - y_{j+1})^3$ et $(y - y_{j+1})^4$. Le schéma numérique (A21) est toujours du troisième ordre et prend en compte la condition limite sous la forme (A20) maintenant. On obtient après quelques lignes de calcul les coefficients qui suivent :

$$(A22) \quad \Delta_{j,j-2}^{an} = -2 \frac{y_{j,j+1} (3y_{j+1,j} - 2y_{j+1,j-1})}{y_{j-2,j-1} y_{j-2,j} (y_{j-2,j+1})^2}$$

$$(A23) \quad \Delta_{j,j-1}^{an} = 2 \frac{y_{j,j+1} (3y_{j+1,j} - 2y_{j+1,j-2})}{y_{j-2,j-1} y_{j-1,j} (y_{j-1,j+1})^2}$$

$$(A24) \quad \Delta_{j,j}^{an} = -2 \frac{\left(\begin{array}{l} 6(y_{j+1,j})^2 - 3(y_{j+1,j-2} + y_{j+1,j-1})y_{j+1,j} + \\ + y_{j+1,j-2} y_{j+1,j-1} \end{array} \right)}{y_{j-2,j} y_{j-1,j} (y_{j,j+1})^2}$$

$$(A25) \quad \Delta_{j,j+1}^{an} = -2 \frac{N(\delta)}{(y_{j-2,j+1})^2 (y_{j-1,j+1})^2 (y_{j,j+1})^2}$$

avec

$$\begin{aligned} N(\delta) = & 3(y_{j+1,j-2} + y_{j+1,j-1})(y_{j+1,j})^3 + (y_{j+1,j-2} y_{j+1,j-1})^2 + \\ & + (y_{j+1,j-2} y_{j+1,j-1} - 2(y_{j+1,j-2}^2 + y_{j+1,j-1}^2))(y_{j+1,j})^2 \\ & - 2 y_{j+1,j-2} y_{j+1,j-1} y_{j+1,j} (y_{j+1,j-2} + y_{j+1,j-1}). \end{aligned}$$