

Flux limite de paroi mobile

Si un fluide est limité par une structure lentement variable et qui se déplace peu dans l'espace, nous cherchons à prendre en compte ce mouvement sans modification des mailles du logiciel de simulation. Nous posons d'abord le problème dans le cadre élémentaire d'une seule dimension d'espace. Puis pour un maillage bidimensionnel cartésien de frontière mobile, nous montrons que les bilans en espace-temps des variables conservées peuvent se décrire par un "flux limite de paroi mobile" qui contient toute la dynamique. Dans le cas de petits mouvements suffisamment lents, nous proposons une linéarisation de ce flux et décrivons en détail une implémentation numérique possible.

1) Introduction.

- On cherche à modéliser numériquement l'écoulement de fluide parfait dans un domaine extérieur à un objet flexible limité par une paroi mobile Γ . Dans le cas d'une paroi rigide, le problème fluide est posé sous la forme d'un problème aux limites pour les équations d'Euler de la dynamique des gaz : équations d'Euler (stationnaires ?) dans le volume fluide Ω , condition limite de non pénétration du fluide dans la paroi sur cette portion Γ de frontière ($u \cdot n = 0$, où u est le champ de vitesse du fluide et n la normale à Γ extérieure au domaine Ω), condition d'écoulement uniforme à l'infini sur la partie Γ_∞ qui complète le bord $\partial\Omega$ ($\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_\infty$; voir la figure 1).

Rapport de recherche Aérospatiale Lanceurs, décembre 1998. Révision juillet 2003. Edition février 2011 ; 84 pages.

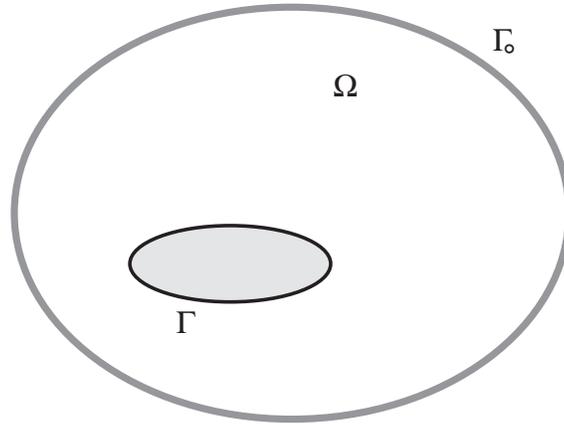


Figure 1 Ecoulement fluide en domaine extérieur.

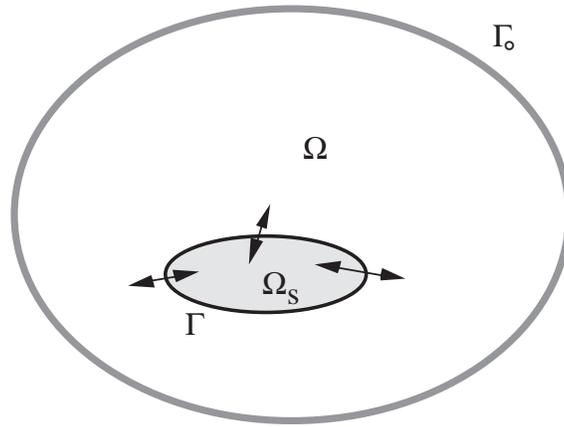


Figure 2 Problème couplé d'interaction fluide-structure ;
la frontière Γ est mobile.

- Dans le cas où la paroi est flexible, c'est en toute rigueur un problème d'interaction fluide-structure qu'il faut poser sur la réunion de la zone fluide Ω et de la zone solide Ω_S (de frontière commune Γ) (voir par exemple Morand et Ohayon [MO92]). Il convient toujours de poser un problème fluide dans le domaine Ω (avec condition limite fluide sur Γ_∞) mais également d'écrire les équations de l'élastodynamique dans le domaine solide Ω_S , avec comme condition limite imposée sur Γ la donnée des efforts locaux du fluide sur la structure ($\sigma \cdot n + p n = 0$ sur Γ où σ est le tenseur des contraintes solides, n la normale extérieure et p la pression du fluide sur la paroi Γ). De plus, les domaines Ω et Ω_S sont mobiles et l'interface Γ est en fait une fonction du temps (figure 2) sur laquelle on doit toujours écrire la non pénétration du fluide à la paroi ($u_S \cdot n = u \cdot n$, avec u_S égale à la vitesse du solide, sans changer les notations précédentes). Cette mobilité de l'interface constitue une difficulté majeure dans le traitement

numérique de ce problème : les logiciels de mécanique des fluides utilisent en général des maillages de référence fixes, (comme par exemple le logiciel Flu3c de Borrel *et al* [BMDGL88] que nous considérons ici comme code de référence) et il en est de même pour les codes de mécanique des structures comme Nastran [Mn86] ou Samcef [Sa92].

- Une approche possible pour résoudre ce problème lorsque le mouvement du solide est lent devant le temps de mise à l'équilibre du fluide (voir par exemple Destuynder [De94] pour une classification des problèmes d'interaction fluide-structure séparant clairement aéroélasticité et aéroacoustique), on découple les mouvements du fluide et de la structure à l'aide d'un algorithme de type "point fixe" (voir par exemple Piperno [Pi95]) : le mouvement de la paroi mobile Γ (champ u_S sur Γ) permet le calcul du fluide sur le domaine mobile $\Omega(t)$. Comme résultat de cette modélisation, on dispose du champ de pression paroi $p(t)$ qui est une condition limite pour le problème d'élastodynamique posé dans le domaine Ω_S (petites déformations), lequel permet la détermination du mouvement de la paroi mobile u_S . Et on recommence !

- Ce processus est *a priori* convergent lorsque la vitesse de la paroi u_S est faible devant la vitesse c des ondes dans le fluide ($|u_S| \ll c$ sur Γ) et lorsque l'extension géométrique des perturbations est faible, c'est-à-dire lorsque $\Omega(t)$ est "proche" du domaine fixe Ω . Pour fixer les idées, le mouvement d'un point de la paroi doit être tel que l'écart δ à la position nominale reste petit devant la taille d'une maille discrète ($|\delta| \ll \Delta x$). La résolution du problème fluide demande l'emploi d'un maillage (partiellement mobile) avec une méthode de type Euler-Lagrange Arbitraire (Ale ; voir par exemple la synthèse proposée par Anderson [An87]), ce qui est délicat mais fournit une solution satisfaisante (voir par exemple Ruffino et Coron [RC96]). Le lien entre l'approche dynamique avec suivi de la surface mobile et une formulation en domaine fixe avec une condition de transpiration a été proposée dans un cadre continu par Fanion, Fernandez et Le Tallec [FFL2k].

- Nous proposons ici une méthodologie qui permette, dans le cadre de la méthode numérique de volumes finis utilisée pour le code Flu3c, d'éviter d'effectuer un calcul sur un maillage mobile par l'emploi d'une condition limite équivalente, dite de "paroi mobile". Les travaux menés jusqu'ici et dont nous avons connaissance (voir par exemple Coron [Co97]) montrent que la mise en œuvre de la condition classique de transpiration (voir par exemple Mortchéléwicz [Mo89]) ne suffit pas à modéliser correctement l'effet de la paroi mobile pour le calcul de la pression. Nous rappelons au paragraphe 2 l'étude du cas non dimensionnel qui permet de traiter divers problèmes de calcul de pression avant de passer aux paragraphes 3 à 5 à un modèle bidimensionnel qui demande une

description géométrique précise, un calcul non banal de flux transverses et des développements algébriques importants.

2) Etude monodimensionnelle

• 2.1 • Volumes finis

• Nous étudions les équations d'Euler de la dynamique des gaz dans un domaine mobile $\Omega(t)$:

$$(2.1) \quad \Omega(t) =]0, X(t)[, \quad t \geq 0, \quad X(t) > 0$$

tel que le mouvement du point frontière $X(t)$ est donné et reste voisin d'un point fixe d'abscisse $L > 0$:

$$(2.2) \quad X(t) \simeq L \quad t \geq 0.$$

Dans le domaine d'espace-temps Ξ défini par :

$$(2.3) \quad \Xi = \bigcup_{t \geq 0} \Omega(t) \times \{t\}$$

nous cherchons un état fluide $W(x, t)$ fonction de l'espace x et du temps t :

$$(2.4) \quad 0 \leq x \leq X(t), \quad t \geq 0.$$

L'état $W(x, t)$ est le vecteur des variables conservées (écrit ici comme la transposée d'un vecteur ligne) :

$$(2.5) \quad W = (\rho, \rho u, \rho E)^t$$

où ρ est la densité du fluide, u sa vitesse et E son énergie totale spécifique liée à l'énergie interne spécifique e via la relation constitutive :

$$(2.6) \quad E = e + \frac{1}{2}u^2.$$

L'équation d'Euler s'écrit sous forme conservative

$$(2.7) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) = 0$$

et la fonction de flux $f(\bullet)$ suit la relation algébrique :

$$(2.8) \quad f(W) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u E + pu)^t$$

qui introduit la pression comme une fonction de W via l'énergie interne e et le rapport γ ($\gamma = 7/5$ pour l'air) des chaleurs spécifiques (voir par exemple le livre de Courant et Friedrichs [CF48]) :

$$(2.9) \quad p = (\gamma - 1) \rho e.$$

• Le système (2.7) doit être “fermé” via deux conditions aux limites en $x = 0$ et $x = X(t)$ et une condition initiale à $t = 0$ qu’on peut écrire :

$$(2.10) \quad W(\bullet, 0) = W_0.$$

La condition limite en $x = 0$ consiste à se donner un état fluide $W_\infty(t)$ via une condition faible d’entropie à la limite :

$$(2.11) \quad W(0, t) \in \mathcal{E}(W_\infty(t))$$

qui relie un ensemble d’états admissibles $\mathcal{E}(W_\infty(t))$ à un état $W(0, t)$ au bord du domaine d’étude (voir [DLf88] et [Du88]) ; dans le cas d’une étude linéarisé où $W(0, t)$ est voisin de $W_\infty(t)$, la condition d’entropie à la paroi limite (2.11) revient à écrire les “relations caractéristiques entrantes”, dont Kreiss [Kr70] a démontré qu’elles conduisent à un problème linéaire bien posé. La condition sur la paroi mobile est de type non pénétration ; la “normale extérieure” au domaine $\Omega(t)$ est ici simplement égale à 1 et il suffit d’écrire que la vitesse du fluide $u(X(t), t)$ sur la paroi mobile est égale à la vitesse (imposée) $\frac{dX}{dt}$ de ladite paroi :

$$(2.12) \quad u(X(t), t) = \frac{dX}{dt}, \quad t \geq 0.$$

• La discrétisation numérique du problème (2.7), (2.10), (2.11), (2.12) s’effectue avec l’une des nombreuses variantes de l’approche Muscl de van Leer [vL79] ; nous en donnons une version avec un schéma d’ordre 1 en temps et renvoyons le lecteur par exemple à [Du93] pour une proposition d’implémentation du schéma explicite de Heun. On fixe un pas d’espace Δx de sorte que :

$$(2.13) \quad I \Delta x = L, \quad I \text{ entier } \geq 1$$

et

$$(2.14) \quad |X(t) - L| \ll \Delta x$$

ce qui revient à exprimer que le mouvement $X(t)$ est d’extension spatiale tellement faible qu’une discrétisation usuelle des équations d’Euler le néglige géométriquement. Fixons les notations pour le maillage, qui ne sont pas les plus simples pour ce problème monodimensionnel, mais sont les plus naturelles à transposer au cas multidimensionnel. On pose :

$$(2.15) \quad x_{i+1/2} = i \Delta x \quad 0 \leq i \leq I$$

et

$$(2.16) \quad x_{I+1/2}(t) = X(t) \quad t \geq 0,$$

l'hypothèse (2.14) indique que la dernière maille reste quasiment de volume Δx lorsque t varie.

- La discrétisation en temps introduit classiquement un paramètre de discrétisation $\Delta t > 0$ (voir la figure 3) ; la vitesse moyenne de la paroi mobile entre les deux pas de temps $n\Delta t$ et $(n+1)\Delta t$ est notée $s^{n+1/2}$:

$$(2.17) \quad s^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \left(x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}^n \right).$$

Par convention, la notation en exposant n qui fixe les variables au temps $(n\Delta t)$. Cette vitesse $s^{n+1/2}$ est faible devant la vitesse de mise à l'équilibre dans le fluide, donc en particulier la vitesse du son dans la dernière maille :

$$(2.18) \quad |s^{n+1/2}| \ll c_I^n, c_I^{n+1}; \quad n \text{ entier } \geq 0$$

et la vitesse du son $c(W)$ satisfait à la relation :

$$(2.19) \quad c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}.$$

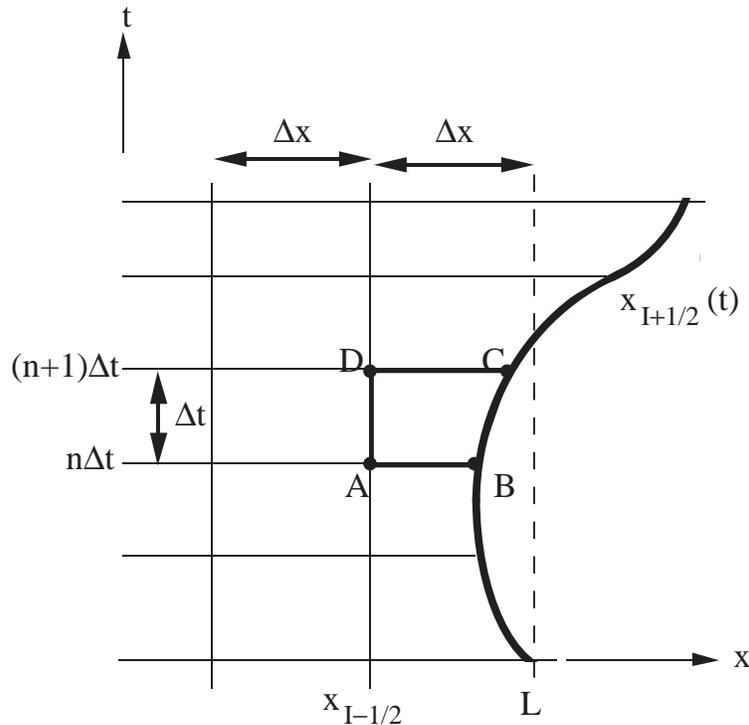


Figure 3 Discrétisation spatio-temporelle d'une paroi monodimensionnelle lentement variable.

- La méthode des volumes finis consiste à intégrer la loi de conservation (2.7) dans une boîte $]x_{I-1/2}, x_{I+1/2}[\times]n\Delta t, (n+1)\Delta t[$, à introduire comme inconnue de base la valeur moyenne W_i^n au temps $n\Delta t$:

$$(2.20) \quad W_i^n \simeq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W(x, n\Delta t) dx ; \quad 1 \leq i \leq I$$

et à chercher à exprimer le flux d'interface $f_{i+1/2}^{n+1/2}$ donné par l'expression :

$$(2.21) \quad f_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(W(x_{i+1/2}, t)) dt$$

à l'aide de l'ensemble de variables $\{W_l^n, 1 \leq l \leq I\}$ de façon à faire avancer d'un pas de temps Δt les variables conservées :

$$(2.22) \quad \frac{1}{\Delta t} [W_i^{n+1} - W_i^n] + \frac{1}{\Delta x} [f_{i+1/2}^{n+1/2} - f_{i-1/2}^{n+1/2}] = 0.$$

Pour les valeurs de i allant de 1 à $I-1$, le maillage est fixe et la relation (2.22) s'applique ; la condition limite de paroi mobile consiste à imposer à la relation (2.22) d'être encore vraie dans la dernière maille, alors que l'intégration de la loi de conservation doit se faire dans un domaine contenant une paroi mobile.

- La méthode Muscl propose de calculer d'abord une valeur interpolée $W_{i+1/2,-}^n$ à gauche de l'interface $x_{i+1/2}$ et une valeur interpolée $W_{i+1/2,+}^n$ à droite de cette interface avant de calculer le flux numérique $f_{i+1/2}^{n+1/2}$ à l'aide d'un "solveur" approché $\Psi(\bullet, \bullet)$ du problème de Riemann entre les valeurs extrapolées $W_{i+1/2,\pm}^n$ de part et d'autre de l'interface :

$$(2.23) \quad f_{i+1/2}^{n+1/2} = \Psi(W_{i+1/2,-}^n, W_{i+1/2,+}^n).$$

Dans le cas de la première maille ($i=1$), le flux entrant $f_{1/2}^{n+1/2}$ est évalué en utilisant la donnée fluide W_∞^n à l'instant $n\Delta t$:

$$(2.24) \quad f_{1/2}^{n+1/2} = \Psi(W_\infty^n, W_{1/2,+}^n), \quad n \geq 0.$$

- Pour être complet, rappelons que le logiciel industriel utilise comme flux numérique $\Psi(\bullet, \bullet)$ le flux-splitting de van Leer [vL82] (à ne pas confondre avec le schéma Muscl de van Leer !) défini par les relations suivantes :

$$(2.25) \quad \Psi(W_g, W_d) = f^+(W_g) + f^-(W_d).$$

Les flux partiels $f^\pm(\bullet)$ réalisent une décomposition de la fonction de flux $f(\bullet)$ donnée à la relation (2.8) :

$$(2.26) \quad f(W) = f^+(W) + f^-(W), \quad \forall W \in \mathbb{R}^3$$

et la fonction $f^+(\bullet)$ est paramétrée par le nombre de Mach $M = \frac{u}{c}$ de l'état W . On a :

$$(2.27) \quad f^+(W) = \begin{cases} 0 & \text{si } M \leq -1 \\ (f_m^+, f_x^+, f_e^+)^t & \text{si } |M| \leq 1 \\ f(W) & \text{si } M \geq 1 \end{cases}$$

avec les relations suivantes :

$$(2.28) \quad f_m^+(W) = \rho c \left(\frac{M+1}{2} \right)^2$$

$$(2.29) \quad f_x^+(W) = f_m^+(W) \frac{(\gamma-1)u + 2c}{\gamma}$$

$$(2.30) \quad f_e^+(W) = f_m^+(W) \frac{((\gamma-1)u + 2c)^2}{2(\gamma^2 - 1)}.$$

- Dans le cas particulier où la paroi est fixe (c'est-à-dire $X(t) \equiv L$, $x_{I+1/2}^n \equiv I\Delta x$), la relation (2.22) est encore valable et le flux paroi est donné encore à l'aide de la relation (2.22), mais l'état $W_{I+1/2,+}^n$ est en général choisi comme l'état "miroir" $\mu(W_{I+1/2,-}^n)$ de $W_{I+1/2,-}^n$ de façon à imposer un flux à la paroi de la forme "force de pression" :

$$(2.31) \quad f_{I+1/2}^{n+1/2} = (0, p_*^{n+1/2}(0), 0)^t, \quad n \geq 0.$$

Afin d'alléger les notations, notons u_*^n la vitesse extrapolée à la paroi :

$$(2.32) \quad u_*^n = u(W_{I+1/2,-}^n), \quad n \geq 0$$

et supposons le nombre de Mach de cet état extrapolé compris entre -1 et 1 . Rappelons, compte-tenu des relations (2.26) à (2.30) que pour $|M| \leq 1$, on a :

$$(2.33) \quad f_m^-(W) = -\rho c \left(\frac{M-1}{2} \right)^2$$

$$(2.34) \quad f_x^-(W) = f_m^-(W) \frac{(\gamma-1)u - 2c}{\gamma}$$

$$(2.35) \quad f_e^-(W) = f_m^-(W) \frac{((\gamma-1)u - 2c)^2}{2(\gamma^2 - 1)}.$$

Dans ces conditions, le choix d'un foncteur "miroir" $\mu(\bullet)$ est donné par :

$$(2.36) \quad \mu(W) = (\rho, -\rho u, \rho E)^t$$

qui assure que pour $|M(W)| \leq 1$, on a :

$$(2.37) \quad f^+(W) + f^-(\mu(W)) = \left(0, 2 f_m^+(W) \frac{(\gamma - 1)u + 2c}{\gamma}, 0\right)^t.$$

Nous avons démontré la

Proposition 2.1 Pression paroi à vitesse nulle.

Lorsque la vitesse $s^{n+1/2}$ de la paroi (définie à la relation (2.17)) est nulle, la pression $p_*^{n+1/2}(0)$ définie en (2.31) est calculée par l'expression :

$$(2.38) \quad p_*^{n+1/2}(0) = 2 f_m^+(W_{I+1/2,-}^n) \frac{(\gamma - 1)u_*^n + 2c_*^n}{\gamma} \quad \text{si } |M_*^n| \leq 1,$$

où u_*^n , c_*^n et $M_*^n = \frac{u_*^n}{c_*^n}$ sont respectivement la vitesse, la célérité du son et le nombre de Mach de l'état extrapolé $W_{I+1/2,-}^n$. Lorsque $u_*^n = 0$, la relation (2.38) exprime de deux façons différentes la pression p_*^n de l'état extrapolé.

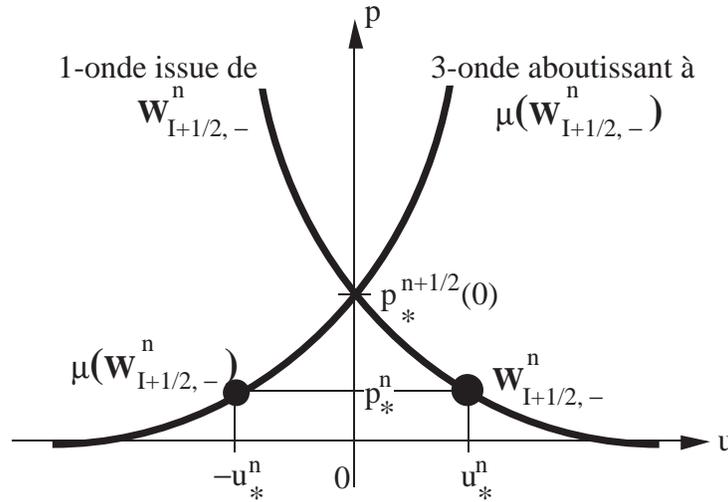


Figure 4 Problème de Riemann avec un état miroir.

Remarque 2.1

- Il faut faire attention au fait qu'en général, $p_*^{n+1/2}(0)$ n'est pas égale à p_*^n : la pression à la paroi $p_*^{n+1/2}(0)$ est *a priori* différente de la pression de l'état extrapolé $W_{I+1/2,-}^n$ car la vitesse u_*^n près de la paroi, lorsqu'elle est non nulle, introduit une sur-pression (ou une sous-pression). On renvoie à la figure 4 où l'on a représenté les ondes du problème de Riemann entre l'état extrapolé et son miroir.

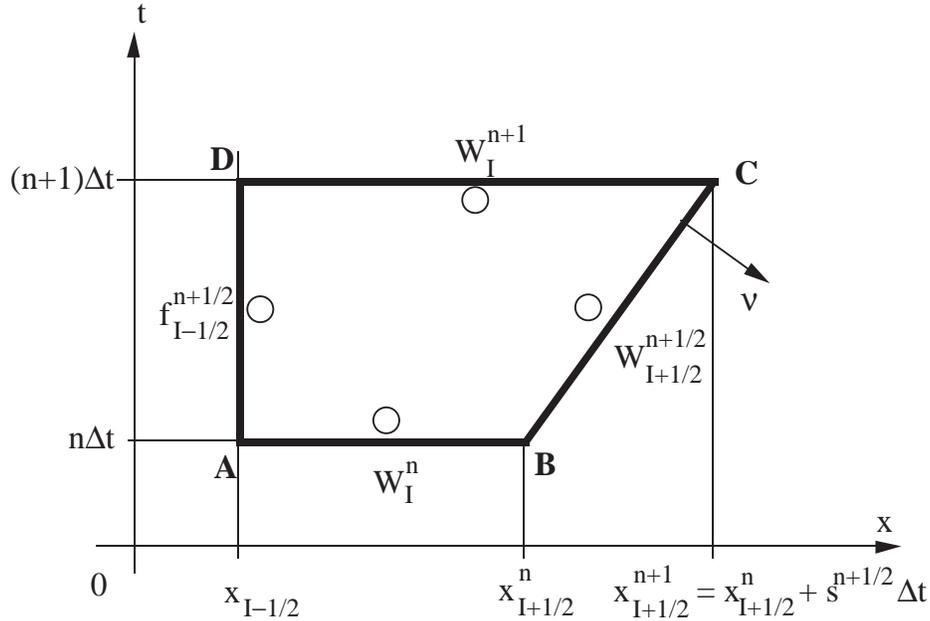


Figure 5 Volume de contrôle (ABCD) dans l'espace-temps.

• 2.2 • Bilan spatio-temporel

• Dans le cas où la paroi $X(t)$ est mobile, la loi de conservation (2.22) ne s'applique plus *a priori*, et en particulier, le flux à la paroi $f_{I+1/2}^{n+1/2}$ ne saurait être calculé à l'aide de la relation (2.31). La condition limite de paroi mobile est une réécriture de la loi de conservation (2.7) dans la boîte d'espace-temps ABCDA décrite à la figure 5, qui force la forme algébrique (2.22), quitte à définir un nouveau flux à la paroi, noté $F_{I+1/2}^{n+1/2}$ et appelé dans la suite "flux limite de paroi mobile". On a la

Proposition 2.2

Condition limite de paroi mobile monodimensionnelle.

Avec les notations utilisées plus haut, soit $W_{I+1/2}^{n+1/2}$ l'état de vitesse $s^{n+1/2}$ sur la 1-onde (de choc ou de détente) issue de l'état extrapolé $W_{I+1/2,-}^n$ (de vitesse u_*^n , pression p_*^n , densité ρ_*^n , vitesse du son c_*^n). Sa pression :

$$p_{I+1/2}^{n+1/2} \equiv p(W_{I+1/2}^{n+1/2})$$

est calculée par résolution du système d'équations suivant :

$$(2.39) \quad s^{n+1/2} - u_*^n + \frac{2}{\gamma - 1} c_*^n \left[\left(\frac{p_{I+1/2}^{n+1/2}}{p_*^n} \right) - 1 \right] = 0 \quad \text{si } s^{n+1/2} - u_*^n \geq 0$$

$$(2.40) \quad s^{n+1/2} - u_*^n + \frac{\sqrt{2} (p_{I+1/2}^{n+1/2} - p_*^n)}{\sqrt{\rho_*^n [(\gamma + 1) p_{I+1/2}^{n+1/2} + (\gamma - 1) p_*^n]}} = 0$$

si $s^{n+1/2} - u_*^n \leq 0$.

Si dans la méthode Muscl, on résout exactement le problème de Riemann, c'est-à-dire si la fonction $\Psi(\bullet, \bullet)$ de la relation (2.23) est calculée à l'aide du flux de Godunov, alors le flux $F_{I+1/2}^{n+1/2}$ relatif à la condition limite de paroi mobile est évalué grâce à l'expression algébrique suivante :

$$(2.41) \quad \left\{ \begin{aligned} F_{I+1/2}^{n+1/2} &= \frac{\Delta x}{\Delta x + x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}} \left\{ \left(0, p_{I+1/2}^{n+1/2}, p_{I+1/2}^{n+1/2} s^{n+1/2} \right)^t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}}{\Delta x} f_{I-1/2}^{n+1/2} + s^{n+1/2} W_I^n \right\}. \end{aligned} \right.$$

Remarque 2.2

- Lorsque $s^{n+1/2} = 0$, le préfacteur de l'accolade dans la relation (2.41) est égal à 1, les coefficients de $f_{I-1/2}^{n+1/2}$ et W_I^n sont nuls et la pression $p_{I+1/2}^{n+1/2}$ est exactement la pression de l'état de vitesse nulle dans la résolution de problème de Riemann entre $W_{I+1/2,-}^n$ et son miroir $\mu(W_{I+1/2,-}^n)$. Cette dernière est approchée par $p_*^{n+1/2}(0)$, calculée à la relation (2.38) si on remplace la résolution exacte du problème de Riemann par le flux de van Leer.

Preuve de la proposition 2.2.

- On intègre la loi de conservation (2.7) dans le volume d'espace-temps ABCDA décrit à la figure 5. La normale extérieure à ce domaine a la forme très générale $\nu = (\nu_x, \nu_t)$. On a donc :

$$(2.42) \quad \int_{\partial(ABCD A)} \{W \nu_t + f(W) \nu_x\} d\gamma = 0$$

et il suffit de détailler le calcul des quatre termes de cette intégrale de contour.

- On a d'abord, pour le segment "horizontal" AB :

$$(2.43) \quad \int_{AB} W \nu_t d\gamma = -(\Delta x + x_{I+1/2}^n - x_{I+1/2}) W_I^n$$

puisque $x_{I+1/2}^n - x_{I-1/2} = x_{I+1/2} - (x_{I+1/2} - \Delta x)$.

- Le segment BC de la frontière mobile a une direction normale ν qui satisfait aux relations :

$$(2.44) \quad \nu_x = \frac{1}{\sqrt{1 + (s^{n+1/2})^2}}$$

$$(2.45) \quad \nu_t = -\frac{s^{n+1/2}}{\sqrt{1 + (s^{n+1/2})^2}}$$

et la “longueur spatio-temporelle” est telle que :

$$(2.46) \quad \int_{BC} \nu_x d\gamma = \Delta t.$$

- On fait l’hypothèse que ce flux est calculé en utilisant un problème de Riemann partiel ([Du87], [DLf89] et [Du01]) ayant comme état à gauche $W_{I+1/2,-}^n$ de façon à couvrir dans l’espace-temps le secteur angulaire des vitesses v qui vérifient $v \leq s^{n+1/2}$. Si $u_*^n \leq s^{n+1/2}$, il se produit une détente à partir de l’état $W_{I+1/2,-}^n$ pour aboutir à un état $W_{I+1/2}^{n+1/2}$ de vitesse $s^{n+1/2}$ en $\frac{x}{t} = s^{n+1/2}$ et la relation (2.39) s’applique. Dans le cas contraire où $u_*^n \geq s^{n+1/2}$, on passe de $W_{I+1/2,-}^n$ à $W_{I+1/2}^{n+1/2}$ par une onde de choc et la relation (2.40) doit être utilisée. Pour plus de détail algébrique, on renvoie à [CF48]. Dans tous les cas, un état $W_{I+1/2}^{n+1/2}$ est présent avec la célérité $s^{n+1/2}$ et l’on a :

$$(2.47) \quad \int_{BC} \{W \nu_t + f(W) \nu_x\} d\gamma = \Delta t \left(f(W_{I+1/2}^{n+1/2}) - s^{n+1/2} W_{I+1/2}^{n+1/2} \right)$$

comme l’explicite quasiment la figure 5 à partir des relations (2.44) à (2.46).

- La forme particulière de la fonction de flux (2.8) et le fait que la vitesse de l’état $W_{I+1/2}^{n+1/2}$ est exactement égale à $s^{n+1/2}$ montrent que :

$$(2.48) \quad \int_{BC} \{W \nu_t + f(W) \nu_x\} d\gamma = \Delta t \left(0, p_{I+1/2}^{n+1/2}, p_{I+1/2}^{n+1/2} s^{n+1/2} \right)^t$$

où, comme annoncé, $p_{I+1/2}^{n+1/2}$ est la pression de l’état $W_{I+1/2}^{n+1/2}$ (voir la figure 6).

- On a ensuite facilement :

$$(2.49) \quad \int_{CD} W \nu_t d\gamma = (\Delta x + x_{I+1/2}^{n+1/2} - x_{I+1/2}) W_I^n$$

$$(2.50) \quad \int_{DA} f(W) \nu_x d\gamma = -\Delta t f_{I-1/2}^{n+1/2}$$

et ce dernier flux est évalué à l'aide du schéma (2.23), valable à l'intérieur du domaine d'étude.

• On regroupe les expressions (2.43), (2.48), (2.49) et (2.50) pour écrire la relation de conservation (2.42), et on divise par Δt . Il vient :

$$(2.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\Delta x} \left[(\Delta x + x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}) W_I^{n+1} \right. \\ \quad \left. - (\Delta x + x_{I+1/2}^n - x_{I+1/2}) W_I^n \right] \\ \quad \left. + \frac{1}{\Delta x} \left[\left(0, p_{I+1/2}^{n+1/2}, p_{I+1/2}^{n+1/2} s^{n+1/2} \right)^t - f_{I-1/2}^{n+1/2} \right] \right\} = 0.$$

Le rapprochement de (2.51) et de (2.22) permet d'introduire un flux de paroi mobile $F_{I+1/2}^{n+1/2}$ de façon à ce qu'une réécriture de (2.51) sous la forme (2.22) ne modifie en rien le résultat. Il vient, par soustraction de (2.51) et de (2.22)

multiplié par $1 + \frac{x_{I+1/2}^{n+1/2} - x_{I+1/2}}{\Delta x}$ c'est-à-dire par soustraction de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\Delta x + x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}}{\Delta x} \right) W_I^{n+1} - \left(\frac{\Delta x + x_{I+1/2}^n - x_{I+1/2}}{\Delta x} \right) W_I^n \right] + \\ & \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\Delta x + x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}}{\Delta x} \right) F_{I+1/2}^{n+1/2} - \left(\frac{\Delta x + x_{I+1/2}^n - x_{I+1/2}}{\Delta x} \right) f_{I-1/2}^{n+1/2} \right] \\ & \qquad \qquad \qquad = 0, \end{aligned}$$

la relation :

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\Delta t \Delta x} (x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}^n) W_I^n + \frac{\Delta x + x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}}{\Delta x^2} F_{I+1/2}^{n+1/2} \\ & \quad - \frac{1}{\Delta x} \left(0, p_{I+1/2}^{n+1/2}, p_{I+1/2}^{n+1/2} s^{n+1/2} \right)^t - \frac{1}{\Delta x^2} (x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}^n) f_{I-1/2}^{n+1/2} = 0, \end{aligned}$$

qui, à une opération algébrique simple près, s'identifie à la relation (2.41). La proposition 2.2 est établie. \square

Remarque 2.3

• Il faut noter que la relation (2.41) est vraie en toute généralité, sans hypothèse sur $s^{n+1/2}$, à condition de résoudre l'une des deux équations non-linéaires (2.39) ou (2.40). De même, il suffit que la condition de "non pénétration du maillage" :

$$(2.52) \quad x_{I+1/2}^n > x_{I-1/2} = x_{I+1/2} - \Delta x, \quad n \geq 0$$

soit réalisée pour que le calcul précédent soit légitime, sans utilisation de l'hypothèse (2.14).

- Le défaut de la relation (2.41) est que lorsque la vitesse de la paroi $s^{n+1/2}$ est identiquement nulle, la pression paroi est calculée par le flux de Godunov, alors que le savoir-faire numérique initial utilise le flux de van Leer et en particulier la relation (2.38). Nous allons donc adapter l'étude au cas du schéma numérique réellement utilisé au sein du logiciel industriel.

• 2.3 • Développement limité de la pression paroi

- Dans le cas où la vitesse $s^{n+1/2}$ de la paroi est faible devant la vitesse des ondes du problème (hypothèse (2.18)), on peut linéariser les équations (2.39) et (2.40) qui autorisent le calcul de la pression $p_{I+1/2}^{n+1/2}$ à la paroi. Nous avons la

Proposition 2.3 Calcul approché de la pression paroi.

Pour calculer le flux limite de paroi mobile $F_{I+1/2}^{n+1/2}$ à l'aide de la relation (2.41), on peut utiliser pour évaluer la pression paroi au premier ordre (par rapport à la vitesse $s^{n+1/2}$ de la paroi mobile) l'expression suivante :

$$(2.53) \quad p_{I+1/2}^{n+1/2} = p_*^{n+1/2}(0) - \rho_*^n c_*^n s^{n+1/2} \equiv p_*^{n+1/2}(s^{n+1/2})$$

au lieu des équations (2.39) et (2.40). Dans la relation (2.53), ρ_*^n et c_*^n désignent respectivement la densité et la célérité du son de l'état $W_{I+1/2,-}^n$ extrapolé à la paroi et $p_*^{n+1/2}(0)$ la pression paroi à vitesse nulle, étudiée à la proposition 2.1 et calculée pour le flux de van Leer à l'aide de la relation (2.38).

Preuve de la proposition 2.3.

- On fait l'hypothèse que le calcul de la pression paroi à vitesse nulle, donné théoriquement par (2.39) ou (2.40) avec $s^{n+1/2} = 0$, peut être approché par l'expression (2.38) issue de l'emploi du flux de van Leer. On utilise la relation (2.39) (ou bien (2.40) qui lui est équivalente pour ce qui suit car les courbes de choc et de détente ont mêmes éléments de contact jusqu'à l'ordre deux inclus, voir par exemple [CF48]) pour calculer la dérivée dp/ds de la pression paroi en fonction de la vitesse paroi ; il vient, en dérivant par rapport à la variable $s^{n+1/2}$ la relation (2.39) :

$$(2.54) \quad 1 + \frac{2}{\gamma - 1} c_*^n \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{1}{p_*^n} \left(\frac{dp}{ds} \right) (0) = 0$$

si on suppose les pressions p_*^n et $p_*^{n+1/2}(0)$ assez voisines, ce qui est légitime lorsque la vitesse u_*^n de l'état extrapolé $W_{I+1/2,-}^n$ est voisine de la vitesse $s^{n+1/2}$ de la paroi, elle-même infiniment petite compte tenu de l'hypothèse (2.18). On tire alors de la relation (2.54) :

$$(2.55) \quad \left(\frac{dp}{ds}\right)(0) = -\rho_*^n c_*^n$$

et la relation (2.53) résulte de (2.55) et de la formule de Taylor à l'ordre un. \square

Remarque 2.4

• Lorsque les vitesses u_*^n et $s^{n+1/2}$ sont des infiniment petits du même ordre, on peut également calculer $p_*^{n+1/2}(0)$ par développement limité de la relation (2.39) par rapport à $s^{n+1/2}$, compte tenu de l'expression :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)(0) = \rho_*^n c_*^n$$

qui fournit grâce à la formule de Taylor la pression à vitesse nulle :

$$(2.56) \quad p_*^{n+1/2}(0) = p_*^n + \rho_*^n c_*^n u_*^n .$$

De façon équivalente la pression à paroi mobile se calcule par :

$$(2.57) \quad p_{I+1/2}^{n+1/2} = p_*^n + \rho_*^n c_*^n (u_*^n - s^{n+1/2}) ,$$

relation qu'on peut obtenir directement à partir de (2.39) et de sa linéarisation à l'ordre 1 par rapport à la variable $u_*^n - s^{n+1/2}$.

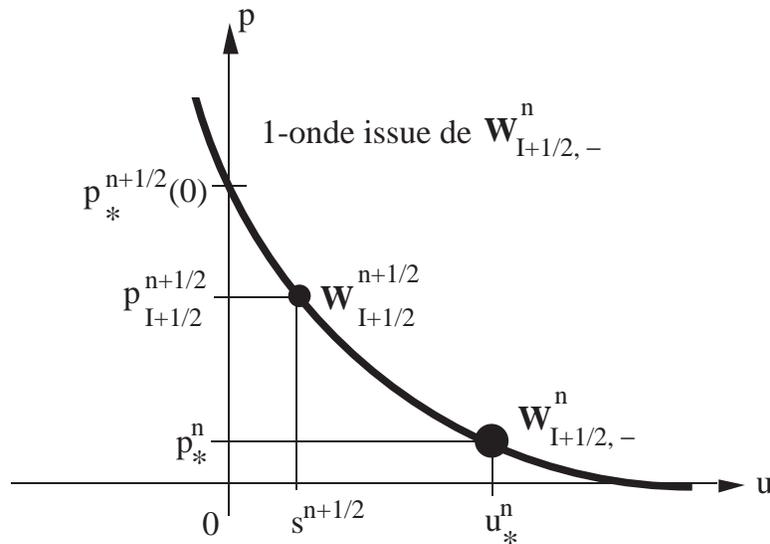


Figure 6 Problème de Riemann partiel à la frontière.

- La figure 6 illustre bien ces relations (2.53), (2.56) et (2.57) : si $u_*^n = s^{n+1/2}$, alors l'état extrapolé le long de la paroi a exactement la vitesse de la paroi et sa pression p_*^n s'identifie à la pression sur la paroi mobile.

• 2.4 • Expression approchée du flux paroi

- La condition limite de paroi mobile est conçue pour étudier des écoulements tels que d'une part le nœud de la paroi est mobile avec une faible vitesse devant celle des ondes présentes dans l'écoulement (hypothèse (2.18)) et d'autre part l'extension spatiale de la perturbation reste petite devant la taille Δx de la dernière maille (hypothèse (2.14)). On peut donc injecter cette double hypothèse de petite perturbation dans la relation (2.41) pour calculer le flux limite de paroi mobile, en tenant compte du travail déjà fait pour le calcul de la pression paroi proprement dite.

Proposition 2.4

Condition limite de paroi mobile linéarisée à une dimension d'espace.

Supposons la paroi mobile d'indice $I + 1/2$. Soit W_I^n l'état de la dernière maille à l'instant $n\Delta t$ considéré, ρ_*^n et c_*^n la densité et la célérité du son de l'état $W_{I+1/2,-}^n$ extrapolé à la paroi avec la méthode Muscl, $f_{I-1/2}^{n+1/2}$ le flux entre l'avant dernière maille (de numéro $I - 1$) et la dernière maille (de numéro I), $p_*^{n+1/2}(0)$ la pression paroi calculée par le schéma numérique lorsque celle-ci est immobile, $s^{n+1/2}$ la vitesse discrète du point paroi et $x_{I+1/2}^{n+1}$ sa position à l'instant $(n+1)\Delta t$. Sous les hypothèses précédentes, écrites une nouvelle fois, à savoir :

$$(2.58) \quad |x_{I+1/2}^{n+1} - L| \ll \Delta x$$

$$(2.59) \quad \left| s^{n+1/2} \equiv \frac{x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}^n}{\Delta t} \right| \ll c_*^n,$$

le flux limite de paroi mobile admet le développement limité suivant :

$$(2.60) \quad F_{I+1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} p_*^{n+1/2}(0) (0, 1, s^{n+1/2})^t + \\ + s^{n+1/2} [W_I^n + (0, -\rho_*^n c_*^n, 0)^t] + \\ + \frac{1}{\Delta x} (x_{I+1/2}^{n+1} - L) [f_{I-1/2}^{n+1/2} - (0, p_*^{n+1/2}(0), 0)^t] + \\ + O\left(\left(\frac{x_{I+1/2}^{n+1} - L}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{s^{n+1/2}}{c_*^n}\right)^2\right). \end{cases}$$

Preuve de la proposition 2.4

• On injecte les hypothèses (2.58), (2.59) et le développement de la pression paroi $p_{I+1/2}^{n+1/2}$ évaluée à la relation (2.53) au sein de l'expression (2.41). Ceci permet de calculer le flux $F_{I+1/2}^{n+1/2}$ en ne conservant que les termes d'ordres 0 ou 1 par rapport aux deux infiniment petits induits par (2.58) et (2.59), supposés du même ordre. Il vient :

$$F_{I+1/2}^{n+1/2} = \left(1 - \frac{x_{I+1/2}^{n+1/2} - x_{I+1/2}}{\Delta x}\right) (0, p_*^{n+1/2}(0) - p_*^n c_*^n s^{n+1/2}, p_*^{n+1/2}(0) s^{n+1/2})^t + \frac{x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}}{\Delta x} f_{I-1/2}^{n+1/2} + s^{n+1/2} W_I^n + \left\{ \text{ordre} \geq 2 \right\}$$

c'est à dire :

$$(2.61) \quad F_{I+1/2}^{n+1/2} = \left\{ \begin{array}{l} (0, p_*^{n+1/2}(0), 0)^t + \\ + s^{n+1/2} \left[W_I^n + (0, -\rho_*^n c_*^n, p_*^{n+1/2}(0) s^{n+1/2})^t \right] + \\ + \frac{1}{\Delta x} (x_{I+1/2}^{n+1} - L) \left[f_{I-1/2}^{n+1/2} - (0, p_*^{n+1/2}(0), 0)^t \right] + \\ + \left\{ \text{ordre} \geq 2 \right\}. \end{array} \right.$$

Cette expression (2.61) fait apparaître le terme d'ordre zéro (cas où la paroi mobile est fixe, c'est à dire $x_{I+1/2} \equiv L$), le terme d'ordre un par rapport à $s^{n+1/2}$ et enfin le terme d'ordre un par rapport à $\frac{1}{\Delta x} (x_{I+1/2}^{n+1} - L)$. Elle est identique à la relation (2.60), ce qui montre la propriété. \square

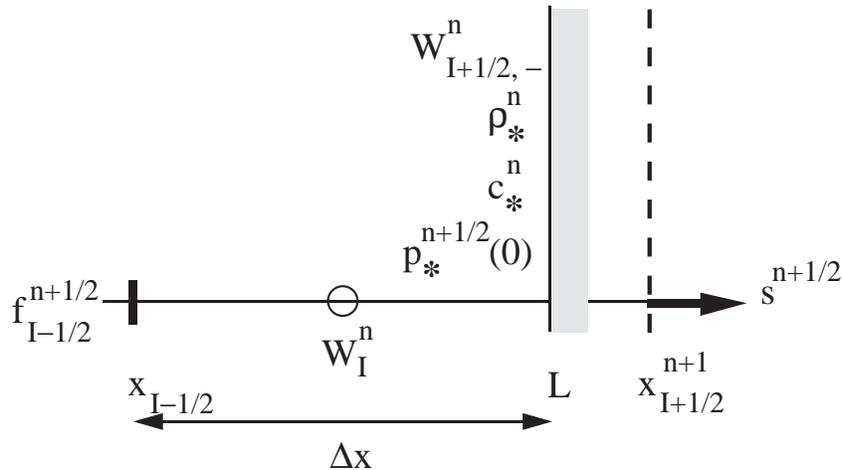


Figure 7 Variables utiles pour le calcul de la condition limite de paroi mobile linéarisée, à une dimension d'espace.

Remarque 2.5

• Les variables utiles pour le calcul de la relation (2.60) sont illustrées à la figure 7. Si on compare la relation (2.60) au savoir-faire décrit dans [RC96] [page 3], on constate que le troisième terme

$$\frac{1}{\Delta x} (x_{I+1/2}^{n+1} - L) \left(f_{I-1/2}^{n+1/2} - (0, p_*^{n+1/2}(0), 0)^t \right)$$

doit être introduit aux travaux antérieurs pour aboutir à notre expression (2.60). La méthodologie employée, fondée sur une intégration de la loi de conservation en espace-temps suivie d'un développement limité par rapport à la vitesse du nœud paroi et à son élongation par rapport à la position nominale, fait apparaître après linéarisation un nouveau terme dans le flux limite de paroi mobile.

3) Etude bidimensionnelle

• 3.1 • Géométrie discrète

• Le domaine d'étude $\Omega(t)$, mobile avec le temps t , est maintenant inclus dans le plan \mathbb{R}^2 . Nous le supposons composé d'une réunion de quadrangles $K_{i,j}$ avec $i \leq I$, $j \in \mathbb{Z}$; chaque quadrangle $K_{i,j}$ est délimité par des sommets $M_{l+1/2, m+1/2}$ ($l \leq I, m \in \mathbb{Z}$) :

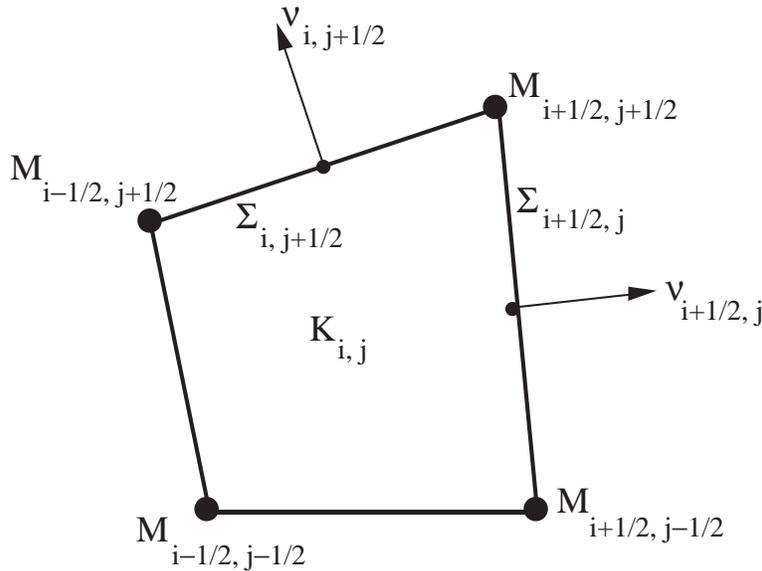


Figure 8 Quadrangle structuré $K_{i,j}$ avec les quatre sommets $M_{l-1/2, j-1/2}$, $M_{l+1/2, j-1/2}$, $M_{l+1/2, j+1/2}$ et $M_{l-1/2, j+1/2}$ dont il est l'enveloppe convexe et deux faces $\Sigma_{i+1/2, j}$ et $\Sigma_{i, j+1/2}$ parmi les quatre de la frontière $\partial K_{i,j}$.

$$(3.1) \quad \partial K_{i,j} = \begin{cases} [M_{i+1/2, j-1/2}, M_{i+1/2, j+1/2}] \cup \\ [M_{i+1/2, j+1/2}, M_{i-1/2, j+1/2}] \cup \\ [M_{i-1/2, j-1/2}, M_{i-1/2, j+1/2}] \cup \\ [M_{i-1/2, j-1/2}, M_{i+1/2, j-1/2}] \end{cases}$$

comme explicité à la figure 8. Nous supposons de plus que les sommets sur la frontière, de numéro avec un premier indice égal à $I+1/2$, sont mobiles au cours du temps, et nous posons :

$$(3.2) \quad M_{I+1/2, j+1/2}(t) = M_{I+1/2, j+1/2} + \delta_{j+1/2}(t), \quad j \in \mathbf{Z}$$

et avec des notations “évidentes”, illustrées figure 9 :

$$(3.3) \quad \partial K_{I,j}(t) = \begin{cases} \left\{ M_{I,j}(\theta, \xi, t) \equiv \theta \xi M_{i+1/2, j+1/2}(t) + \right. \\ \quad + (1-\theta) \xi M_{I-1/2, j+1/2} + \\ \quad + (1-\theta)(1-\xi) M_{I-1/2, j-1/2} + \\ \quad \left. + \theta(1-\xi) M_{I+1/2, j-1/2}, \quad \theta, \xi \in [0, 1] \right\}. \end{cases}$$

Nous avons :

$$(3.4) \quad \Omega(t) = \bigcup_{j \in \mathbf{Z}} \left\{ \left(\bigcup_{i \leq I-1} K_{i,j} \right) \cup K_{I,j}(t) \right\}$$

et le domaine $\Omega(t)$ a une frontière $\partial\Omega(t)$ composée de segments de droite :

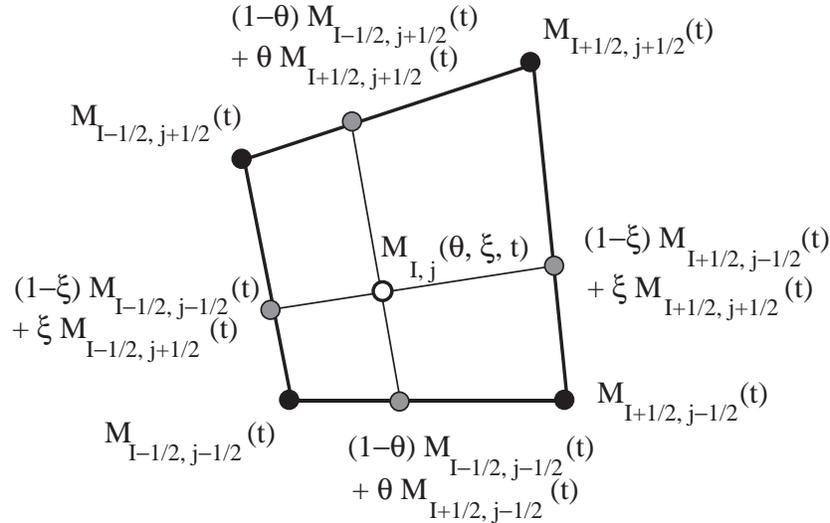


Figure 9 Paramétrage par le triplet (θ, ξ, ζ) des points du quadrangle mobile $K_{i,j}(t)$.

$$(3.5) \quad \partial\Omega(t) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} [M_{I+1/2, j-1/2}(t), M_{I+1/2, j+1/2}(t)]$$

qui par hypothèse reste voisine de la frontière de référence $\partial\Omega_0$, avec :

$$(3.6) \quad \partial\Omega_0 = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} [M_{I+1/2, j-1/2}, M_{I+1/2, j+1/2}],$$

comme illustré figure 10.

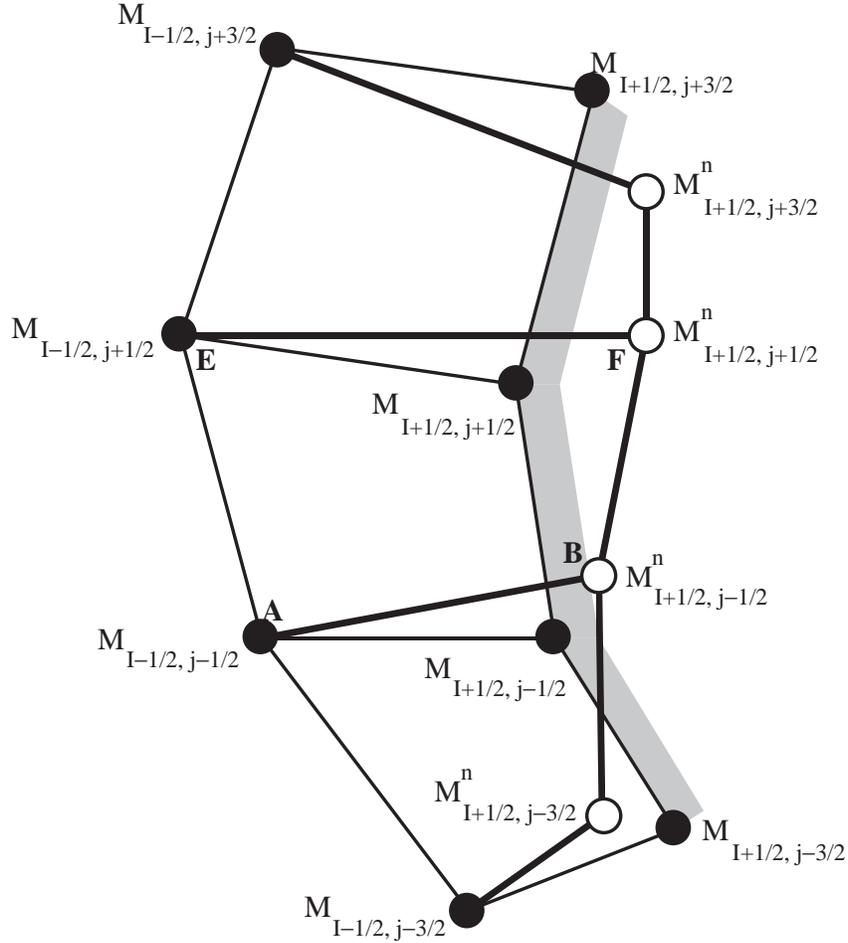


Figure 10 Paroi mobile d'indice $I + 1/2$, à deux dimensions d'espace ; les points d'indice supérieur n sont mobiles au cours du temps.

- La discrétisation temporelle introduit un pas de temps $\Delta t > 0$, des temps discrets t^n ,

$$(3.7) \quad t^n = n \Delta t, \quad n \geq 0$$

et on pose par convention : $M_{I+1/2, j+1/2}^n = M_{I+1/2, j+1/2}(n\Delta t)$

$$(3.8) \quad M_{I+1/2, j+1/2}^n = M_{I+1/2, j+1/2} + \delta_{j+1/2}^n, \quad n \geq 0, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

La vitesse du point d'indice $(I + 1/2, j + 1/2)$ entre deux instants $n\Delta t$ et $(n + 1)\Delta t$ est un vecteur $s_{j+1/2}^{n+1/2}$ calculé comme quotient aux différences finies :

$$(3.9) \quad s_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \{ M_{I+1/2, j+1/2}^{n+1} - M_{I+1/2, j+1/2}^n \} = \frac{1}{\Delta t} (\delta_{j+1/2}^{n+1} - \delta_{j+1/2}^n)$$

et entre les instants t^n et t^{n+1} la cellule $K_{I,j}(t)$ décrit un volume d'espace-temps $V_{I,j}^{n+1/2}$ qu'on peut définir par :

$$(3.10) \quad V_{I,j}^{n+1/2} = \left\{ \left\{ \left(\frac{(n+1)\Delta t - t}{\Delta t} K_{I,j}^n + \frac{t - n\Delta t}{\Delta t} K_{I,j}^{n+1}, t \right), \right. \right. \\ \left. \left. n\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t \right\}.$$

- La cellule $V_{I,j}^{n+1/2}$ appartient à un espace-temps tridimensionnel avec un espace bidimensionnel donc est topologiquement de forme cubique (Figure 11). Son bord $\partial V_{I,j}^{n+1/2}$ est composé de six faces d'espace-temps à deux dimensions spatiales : la paroi mobile CDFG, les deux faces latérales BCDA et GFEH, la paroi fixe ADHE de premier indice $I - 1/2$ qui fait face à la paroi mobile, la cellule $K_{I,j}^n = BAEF$ à l'instant $n\Delta t$ et la cellule $K_{I,j}^{n+1} = DCGH$ à l'instant $(n + 1)\Delta t$, comme le suggère la figure 11.

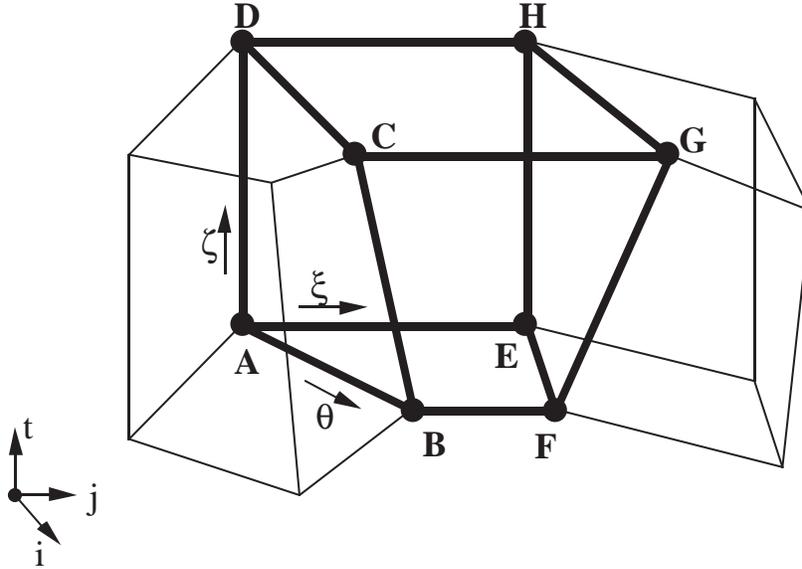


Figure 11 Cellule $V_{I,j}^{n+1/2}$ dans l'espace-temps. Son bord $\partial V_{I,j}^{n+1/2}$ est composé par les six faces CDFG, BCDA, GFEH, ADHE, BAEF et DCGH. Elle est paramétrée par les variables θ (direction i du maillage), ξ (direction j) et ζ (direction temporelle) toutes trois entre 0 et 1 grâce à une interpolation polynomiale transfinie de degré partiel inférieur ou égal à 1.

- Dans la suite de cette troisième section, nous notons $\Sigma_{i+1/2,j}$ (respectivement $\Sigma_{i,j+1/2}$) l'interface $[M_{i+1/2,j-1/2}, M_{i+1/2,j+1/2}]$ entre $K_{i,j}$ et $K_{i+1,j}$ (respectivement l'interface $[M_{i-1/2,j+1/2}, M_{i+1/2,j+1/2}]$ entre $K_{i,j}$ et $K_{i,j+1}$) :

$$(3.11) \quad \begin{cases} \Sigma_{i+1/2,j} = [M_{i+1/2,j-1/2}, M_{i+1/2,j+1/2}] = \partial K_{i,j} \cap \partial K_{i+1,j} \\ \Sigma_{i,j+1/2} = [M_{i-1/2,j+1/2}, M_{i+1/2,j+1/2}] = \partial K_{i,j} \cap \partial K_{i,j+1} \end{cases}.$$

La normale orientée dans le sens des indices croissants entre $K_{i,j}$ et $K_{i+1,j}$ est notée $\nu_{i+1/2,j}$; celle entre $K_{i,j}$ et $K_{i,j+1}$ est notée $\nu_{i,j+1/2}$. Elle est définie par intégration de la normale ν le long de l'interface $\Sigma_{i+1/2,j}$ ou de l'interface $\Sigma_{i,j+1/2}$. On a algébriquement :

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \nu_{i+1/2,j} &= \int_{\Sigma_{i+1/2,j}} \nu((1-\xi)M_{i+1/2,j-1/2}J + \xi M_{i+1/2,j+1/2}) d\gamma(\xi) \\ \nu_{i+1/2,j} &= \begin{pmatrix} y_{i+1/2,j+1/2} - y_{i+1/2,j-1/2} \\ - (x_{i+1/2,j+1/2} - x_{i+1/2,j-1/2}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où l'on a explicité les coordonnées planes du point courant :

$$(3.13) \quad M_{I+1/2,j+1/2} = (x_{i+1/2,j+1/2}, y_{i+1/2,j+1/2}).$$

De façon analogue, les relations permettant de calculer $\nu_{i,j+1/2}$ s'explicitent par :

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \nu_{i,j+1/2} &= \int_{\Sigma_{i,j+1/2}} \nu((1-\theta)M_{i-1/2,j+1/2}J + \theta M_{i+1/2,j+1/2}) d\gamma(\theta) \\ \nu_{i,j+1/2} &= \begin{pmatrix} - (y_{i+1/2,j+1/2} - y_{i-1/2,j+1/2}) \\ x_{i+1/2,j+1/2} - x_{i-1/2,j+1/2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

en remarquant que le signe a changé car la normale $\nu_{i+1/2,j}$ pointe à droite de $\Sigma_{i+1/2,j}$ alors que la normale $\nu_{i,j+1/2}$ pointe à gauche de $\Sigma_{i,j+1/2}$.

- Le volume $|K_{i,j}|$ de la cellule $K_{i,j}$ se calcule par intégration de la représentation proposée en (3.3). Nous introduisons d'abord la notation $\alpha \times \beta$ pour deux vecteurs de \mathbb{R}^2 notés $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y)$ et $\beta = (\beta_x, \beta_y)$:

$$(3.15) \quad \alpha \times \beta = \alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x.$$

C'est un nombre ($\alpha \times \beta \in \mathbb{R}$) qui permet d'exprimer simplement la surface du quadrangle (α, β) . Bien entendu, si α et β appartiennent à \mathbb{R}^3 , $\alpha \times \beta$ désigne toujours le produit vectoriel usuel.

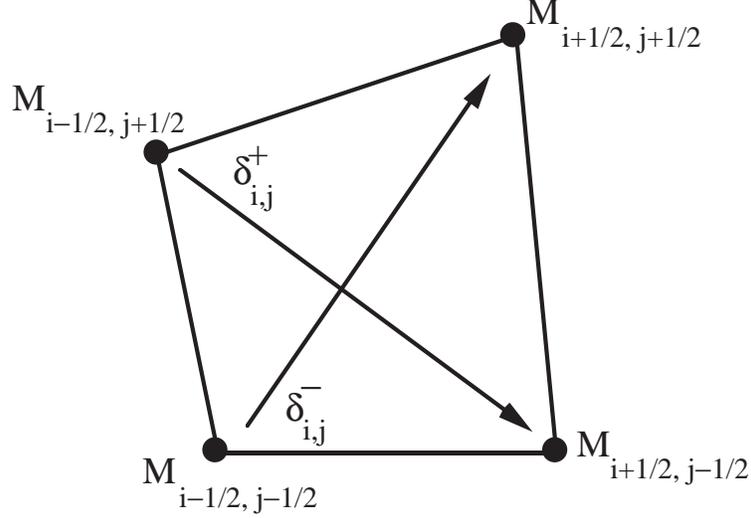


Figure 12 Le volume de la maille $K_{1,j}$ est calculé à l'aide de la relation $|K_{i,j}| = \frac{1}{2}(\delta_{i,j}^+ \times \delta_{i,j}^-)$

Proposition 3.1 **Volume de la cellule $K_{i,j}$.**

La cellule $K_{i,j}$ étant définie à la relation (3.3), on pose

$$(3.16) \quad \delta_{i,j}^+ = M_{i+1/2, j-1/2} - M_{i-1/2, j+1/2}$$

$$(3.17) \quad \delta_{i,j}^- = M_{i+1/2, j+1/2} - M_{i-1/2, j-1/2}$$

comme illustré à la figure 12. On a alors :

$$(3.18) \quad |K_{i,j}| = \frac{1}{2}(\delta_{i,j}^+ \times \delta_{i,j}^-)$$

si le quadrangle $K_{i,j}$ n'est pas une maille croisée.

Preuve de la proposition 3.1.

• Compte-tenu de la représentation (3.3), le point courant $M(\theta, \xi)$ de $K_{i,j}$ est paramétré par la relation :

$$(3.19) \quad \begin{cases} M(\theta, \xi) = \theta \xi M_{i+1/2, j+1/2} + (1-\theta) \xi M_{i-1/2, j+1/2} + \\ \quad + (1-\theta)(1-\xi) M_{i-1/2, j-1/2} + \theta(1-\xi) M_{i+1/2, j-1/2} \end{cases}$$

ce qui entraîne :

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = \xi M_{i+1/2, j+1/2} - \xi M_{i-1/2, j+1/2} - (1-\xi) M_{i-1/2, j-1/2} + (1-\xi) M_{i+1/2, j-1/2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \xi} = \theta M_{i+1/2, j+1/2} + (1-\theta) M_{i-1/2, j+1/2} - (1-\theta) M_{i-1/2, j-1/2} - \theta M_{i+1/2, j-1/2}$$

donc $\frac{\partial M}{\partial \theta}$ ne dépend pas de θ et de même $\frac{\partial M}{\partial \xi}$ ne dépend pas de ξ . Nous avons par ailleurs :

$$\begin{aligned} |K_{i,j}| &= \int_{]0,1[\times]0,1[} \left| \frac{\partial M}{\partial \theta} \times \frac{\partial M}{\partial \xi} \right| d\theta d\xi \\ &= \int_{]0,1[\times]0,1[} \left(\frac{\partial M}{\partial \theta} \times \frac{\partial M}{\partial \xi} \right) d\theta d\xi && \text{si la maille n'est pas croisée} \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\partial M}{\partial \theta} d\xi \right) \times \left(\int_0^1 \frac{\partial M}{\partial \xi} d\theta \right) && \text{vu la remarque précédente} \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{i,j}^- + \delta_{i,j}^+) \times \frac{1}{2} (\delta_{i,j}^- - \delta_{i,j}^+) \\ &= \frac{1}{4} (\delta_{i,j}^+ \times \delta_{i,j}^- - \delta_{i,j}^- \times \delta_{i,j}^+) = \frac{1}{2} \delta_{i,j}^+ \times \delta_{i,j}^- \end{aligned}$$

ce qui montre la propriété. \square

- Dans la suite, nous notons $\tilde{\nu}$ la normale extérieure à la cellule d'espace-temps $V_{I,j}^{n+1/2}$. Compte-tenu des relations (3.3) et (3.10), un point $\tilde{M}(\theta, \xi, \zeta)$ de cette cellule est défini par le paramétrage suivant, qui sépare espace et temps $t = t^n + \zeta \Delta t$:

$$(3.20) \quad \tilde{M}(\theta, \xi, \zeta) = ((1-\zeta)M^n(\theta, \xi) + \zeta M^{n+1}(\theta, \xi), t^n + \zeta \Delta t)$$

avec $M^n(\theta, \xi)$ calculé comme à la relation (3.19), mais pour l'instant t^n :

$$(3.21) \quad \begin{cases} M^n(\theta, \xi) = \theta \xi M_{i+1/2, j+1/2}^n + (1-\theta) \xi M_{i-1/2, j+1/2}^n + \\ \quad + (1-\theta)(1-\xi) M_{i-1/2, j-1/2}^n + \theta(1-\xi) M_{i+1/2, j-1/2}^n. \end{cases}$$

La normale extérieure a donc trois composantes :

$$\tilde{\nu} = (\tilde{\nu}_x, \tilde{\nu}_y, \tilde{\nu}_t)$$

ou deux composantes, une spatiale $\tilde{\nu}_e \in \mathbb{R}^2$ et une temporelle $\tilde{\nu}_t$:

$$(3.22) \quad \tilde{\nu} = (\tilde{\nu}_e, \tilde{\nu}_t).$$

- Pour expliciter le membre de droite de (3.22), il est utile de préciser les notations pour les normales spatiales situées sur les parois mobiles CCFG, BCDA et GFEH. Il convient de faire attention au fait que la normale $\tilde{\nu}$ est orientée et pointe toujours vers l'extérieur du volume $V_{I,j}^{n+1/2}$ alors que les directions normales $\nu_{i+1/2, j}$ et $\nu_{i, j+1/2}$ suivent en espace les lignes d'indices croissants.

Nous explicitons donc dans la suite de ce paragraphe les expressions des six normales extérieures.

Proposition 3.2 Normales extérieures au volume $V_{I,j}^{n+1/2}$.

On pose, compte-tenu de (3.9), (3.12) et (3.14) :

$$(3.23) \quad s_j^{n+1/2} = \frac{1}{2} (s_{j-1/2}^{n+1/2} + s_{j+1/2}^{n+1/2}), \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$(3.24) \quad \nu_j^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\nu_{I+1/2,j}^n + \nu_{I+1/2,j}^{n+1}), \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$(3.25) \quad \nu_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\nu_{I,j+1/2}^n + \nu_{I,j+1/2}^{n+1}), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

L'intégrale sur leur facette respective des six normales extérieures au volume d'espace-temps $V_{I,j}^{n+1/2}$ est calculée à l'aide des expressions suivantes :

$$\int_{CBFG} \tilde{\nu} d\gamma = \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta$$

$$(3.26) \quad \int_{CBFG} \tilde{\nu} d\gamma = \Delta t \left(\nu_j^{n+1/2}, -\nu_j^{n+1/2} \bullet s_j^{n+1/2} \right)^t$$

$$\int_{BCDA} \tilde{\nu} d\gamma = \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (\theta, 0, \zeta) d\theta d\zeta$$

$$(3.27) \quad \int_{BCDA} \tilde{\nu} d\gamma = \Delta t \left(-\nu_{j-1/2}^{n+1/2}, \frac{1}{2} \nu_{j-1/2}^{n+1/2} \bullet s_{j-1/2}^{n+1/2} \right)^t$$

$$\int_{GFEH} \tilde{\nu} d\gamma = - \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (\theta, 1, \zeta) d\theta d\zeta$$

$$(3.28) \quad \int_{GFEH} \tilde{\nu} d\gamma = \Delta t \left(\nu_{j+1/2}^{n+1/2}, -\frac{1}{2} \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet s_{j+1/2}^{n+1/2} \right)^t$$

$$\int_{ADHE} \tilde{\nu} d\gamma = - \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (0, \xi, \zeta) d\xi d\zeta$$

$$(3.29) \quad \int_{ADHE} \tilde{\nu} d\gamma = -\Delta t \left(\nu_{I-1/2,j}, 0 \right)^t$$

$$\int_{BAEF} \tilde{\nu} d\gamma = - \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} (\theta, \xi, 0) d\theta d\xi$$

$$(3.30) \quad \int_{BAEF} \tilde{\nu} d\gamma = \left(0, - |K_{I,j}^n| \right)^t$$

$$(3.31) \quad \int_{DCGH} \tilde{v} d\gamma = \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \xi} (\theta, \xi, 1) d\theta d\xi$$

$$\int_{DCGH} \tilde{v} d\gamma = \left(0, |K_{I,j}^{n+1}| \right)^t.$$

Preuve de la proposition 3.2.

• Les relations (3.20) et (3.21) permettent le calcul des dérivées partielles utiles dans les définitions associées aux formules non numérotées. On a :

$$(3.32) \quad \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \theta} (\theta, \xi, \zeta) = \left(\begin{array}{l} \left((1 - \zeta) \left[\xi M_{I+1/2, j+1/2}^n - \xi M_{I-1/2, j+1/2}^n \right. \right. \\ \left. \left. - (1 - \xi) M_{I-1/2, j-1/2}^n + (1 - \xi) M_{I+1/2, j-1/2}^n \right] \right. \\ \left. + \zeta \left[\xi M_{I+1/2, j+1/2}^{n+1} - \xi M_{I-1/2, j+1/2}^{n+1} \right. \right. \\ \left. \left. - (1 - \xi) M_{I-1/2, j-1/2}^{n+1} + (1 - \xi) M_{I+1/2, j-1/2}^{n+1} \right] \right), 0 \end{array} \right)^t$$

$$(3.33) \quad \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \xi} (\theta, \xi, \zeta) = \left(\begin{array}{l} \left((1 - \zeta) \left[\theta M_{I+1/2, j+1/2}^n + (1 - \theta) M_{I-1/2, j+1/2}^n \right. \right. \\ \left. \left. - (1 - \theta) M_{I-1/2, j-1/2}^n - \theta M_{I+1/2, j-1/2}^n \right] \right. \\ \left. + \zeta \left[\theta M_{I+1/2, j+1/2}^{n+1} + (1 - \theta) M_{I-1/2, j+1/2}^{n+1} \right. \right. \\ \left. \left. - (1 - \theta) M_{I-1/2, j-1/2}^{n+1} - \theta M_{I+1/2, j-1/2}^{n+1} \right] \right), 0 \end{array} \right)^t$$

$$(3.34) \quad \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \zeta} (\theta, \xi, \zeta) = \left(\begin{array}{l} \left(-\xi \left[\theta M_{I+1/2, j+1/2}^n + (1 - \theta) M_{I-1/2, j+1/2}^n \right] \right. \\ \left. - (1 - \xi) \left[(1 - \theta) M_{I-1/2, j-1/2}^n + \theta M_{I+1/2, j-1/2}^n \right] \right. \\ \left. + \xi \left[\theta M_{I+1/2, j+1/2}^{n+1} + (1 - \theta) M_{I-1/2, j+1/2}^{n+1} \right] \right. \\ \left. + (1 - \xi) \left[(1 - \theta) M_{I-1/2, j-1/2}^{n+1} + \theta M_{I+1/2, j-1/2}^{n+1} \right] \right), \Delta t \end{array} \right)^t$$

- Les relations non numérotées résultent d'un examen approfondi de la figure 11 et de la remarque suivante, que nous développons pour la face CDFG. On a d'une part :

$$\tilde{\nu}(\xi, \zeta) = \frac{\frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta}}{\left| \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} \right|}$$

et d'autre part :

$$d\gamma(\xi, \zeta) = \left| \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} \right| d\xi d\zeta$$

donc le module du produit vectoriel disparaît de toutes les intégrales qu'il faut effectivement calculer.

- Nous terminons la preuve de la relation (3.26) en détaillant les divers calculs pour les six faces du bord du volume d'espace-temps $V_{I,j}^{n+1/2}$. La relation (3.26) s'obtient en faisant $\theta = 1$ au sein des relations (3.33) et (3.34) :

$$\begin{aligned} \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta &= \left(\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} d\zeta \right) \times \left(\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} d\xi \right) \\ &= \Delta t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \left(\nu_{I+1/2,j}^{n,y} + \nu_{I+1/2,j}^{n+1,y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\nu_{I+1/2,j}^{n,x} + \nu_{I+1/2,j}^{n+1,x} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(s_{j+1/2}^{n+1/2,x} + s_{j-1/2}^{n+1/2,x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(s_{j+1/2}^{n+1/2,y} + s_{j-1/2}^{n+1/2,y} \right) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \Delta t \begin{pmatrix} -\nu_j^{n+1/2,y} \\ \nu_j^{n+1/2,x} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s_j^{n+1/2,x} \\ s_j^{n+1/2,y} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \Delta t \left(\nu_j^{n+1/2,x}, \nu_j^{n+1/2,y}, -\nu_j^{n+1/2} \bullet s_j^{n+1/2} \right)^t \end{aligned}$$

ce qui établit complètement la relation (3.26).

- La relation (3.27) se montre de façon analogue ; on a :

$$\begin{aligned} \int_{BCDA} \tilde{\nu} d\gamma &= \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (\theta, 0, \zeta) d\theta d\zeta \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \theta} (\theta, 0, \zeta) d\zeta \right) \times \left(\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (\theta, 0, \zeta) d\theta \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \Delta t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\nu_{I, j-1/2}^{n, y} + \nu_{I, j-1/2}^{n+1, y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\nu_{I, j-1/2}^{n, x} + \nu_{I, j-1/2}^{n+1, x} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} s_{j-1/2}^{n+1/2, x} \\ \frac{1}{2} s_{j-1/2}^{n+1/2, y} \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \Delta t \left(-\nu_{j-1/2}^{n+1/2, x}, -\nu_{j-1/2}^{n+1/2, y}, \frac{1}{2} \nu_{j-1/2}^{n+1/2} \bullet s_{j-1/2}^{n+1/2} \right)^t
 \end{aligned}$$

et cette dernière expression algébrique est identique au membre de droite de la relation (3.27). La relation (3.28) fait appel aux mêmes techniques :

$$\begin{aligned}
 \int_{GFEH} \tilde{\nu} d\gamma &= - \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (\theta, 1, \zeta) d\theta d\zeta \\
 &= - \left(\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \theta} (\theta, 1, \zeta) d\zeta \right) \times \left(\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (\theta, 1, \zeta) d\theta \right) \\
 &= - \Delta t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\nu_{I, j+1/2}^{n, y} + \nu_{I, j+1/2}^{n+1, y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\nu_{I, j+1/2}^{n, x} + \nu_{I, j+1/2}^{n+1, x} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} s_{j+1/2}^{n+1/2, x} \\ \frac{1}{2} s_{j+1/2}^{n+1/2, y} \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \Delta t \left(\nu_{j+1/2}^{n+1/2, x}, \nu_{j+1/2}^{n+1/2, y}, -\frac{1}{2} \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet s_{j+1/2}^{n+1/2} \right)^t.
 \end{aligned}$$

• Le lecteur sérieux parvenu à ce stade de cette preuve ayant de toute façon sorti son crayon ou son logiciel Maple, la fin est quasi-automatique :

$$\begin{aligned}
 \int_{ADHE} \tilde{\nu} d\gamma &= - \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (0, \xi, \zeta) d\xi d\zeta \\
 &= - \left(\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} (0, \xi, \zeta) d\zeta \right) \times \left(\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (0, \xi, \zeta) d\xi \right) \\
 &= \Delta t \begin{pmatrix} \nu_{I-1/2, j}^y \\ -\nu_{I-1/2, j}^x \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= - \Delta t \left(\nu_{I-1/2, j}^x, \nu_{I-1/2, j}^y, 0 \right)^t
 \end{aligned}$$

ce qui établit (3.29),

$$\int_{BAEF} \tilde{\nu} d\gamma = - \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} (\theta, \xi, 0) d\theta d\xi$$

$$\begin{aligned}
 &= - \left(\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \theta}(\theta, \xi, 0) \, d\xi \right) \times \left(\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi}(\theta, \xi, 0) \, d\theta \right) \\
 &= \Delta t \left(0, - | K_{I,j}^n | \right)^t
 \end{aligned}$$

compte-tenu du calcul effectué lors de la preuve de la proposition 3.1 ; donc la relation (3.30) est démontrée. Enfin, et de manière analogue :

$$\begin{aligned}
 \int_{DCGH} \widetilde{v} \, d\gamma &= \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi}(\theta, \xi, 1) \, d\theta \, d\xi \\
 &= \Delta t \left(0, | K_{I,j}^{n+1} | \right)^t
 \end{aligned}$$

ce qui démontre la relation (3.31). La proposition 3.2 est établie. \square

• 3.2 • Volumes finis pour les équations d'Euler

• Nous disposons, suite au paragraphe précédent, d'un domaine spatial $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^2$ qui dépend du temps ; celui-ci (relation (3.4)) est la réunion des cellules quadrangulaires $K_{i,j}$ avec $i \leq I$ et $j \in \mathbb{Z}$. Le mouvement du domaine $\Omega(t)$ est réduit au mouvement de la famille des mailles $K_{I,j}$, et plus précisément des sommets $M_{I+1/2,j}$ comme l'indique par exemple la figure 10. A partir de cette discrétisation spatiale, une discrétisation temporelle (associée à un pas de temps $\Delta t > 0$ fixe pour simplifier l'exposé) permet de construire (relation (3.10)) des volumes espace-temps $V_{i,j}^{n+1/2}$ par interpolation temporelle entre les mailles $K_{i,j}$ (dont celles de premier numéro $i = I$, rappelons le, dépendent du temps) à l'aide du temps $t^n = n\Delta t$. Nous disposons donc, comme au chapitre 2 relatif à l'étude monodimensionnelle, d'un domaine d'espace-temps Ξ défini par :

$$(3.35) \quad \Xi = \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \left(\bigcup_{i \leq I-1} K_{i,j} \times [t^n, t^{n+1}] \right) \cup V_{I,j}^{n+1/2} \right\}.$$

• Les équations d'Euler de la dynamique des gaz consistent à écrire les lois de conservation fondamentales (masse, impulsion, énergie) de la mécanique des milieux continus ; les variables inconnues sont la densité $[\rho]$, la vitesse $[\tilde{u} = (u, v)]$ et l'énergie totale spécifique $[E]$; on pose

$$(3.36) \quad W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^t.$$

L'énergie interne spécifique e est définie par soustraction de l'énergie cinétique spécifique de l'énergie totale :

$$(3.37) \quad e = E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

et le milieu continu est ici un gaz parfait polytropique ; le tenseur des contraintes σ est diagonal :

$$(3.38) \quad \sigma = -pI$$

et la pression p est calculée à l'aide d'une équation d'état bien classique :

$$(3.39) \quad p = (\gamma - 1)\rho e$$

avec $\gamma = 7/5$ pour l'air considéré comme ensemble statistique activant trois degrés de liberté en translation et deux en rotation (molécule bi-atomique).

- L'écriture d'un bilan demande l'introduction des flux numériques (f, g) dans les deux directions de l'espace :

$$(3.40) \quad f(W) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uE + pu)^t$$

$$(3.41) \quad g(W) = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho vE + pv)^t.$$

Le système des équations d'Euler prend alors la forme conservative suivante :

$$(3.42) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[f(W)] + \frac{\partial}{\partial y}[g(W)] = 0 ;$$

il est utile pour la suite d'introduire le couple constitué par les deux flux :

$$(3.43) \quad \Phi(W) = (f(W), g(W)) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$$

et pour une direction spatiale $\nu = (\nu_x, \nu_y) \in \mathbb{R}^2$ le produit scalaire contracté

$$(3.44) \quad \Phi(W) \bullet \nu = f(W) \nu_x + g(W) \nu_y$$

qui appartient à \mathbb{R}^4 .

- Les conditions au bord du domaine Ξ sont de type condition limite et condition initiale. En ce qui concerne les conditions aux limites au bord spatial de Ξ , il suffit d'écrire la non-pénétration du fluide sur les parois mobiles $\Sigma_j^{n+1/2}$ ($j \in \mathbb{Z}, n \geq 0$) définies par les relations suivantes :

$$(3.45) \quad \Sigma_j^n = \left[M_{I+1/2, j-1/2}^n, M_{I+1/2, j+1/2}^n \right], \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0$$

$$(3.46) \quad \Sigma_j^{n+1/2} = \left\{ \left(\frac{(n+1)\Delta t - t}{\Delta t} \Sigma_j^n + \frac{t - n\Delta t}{\Delta t} \Sigma_j^{n+1}, t \right), \right. \\ \left. n\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t \right\}$$

le long desquelles la vitesse moyenne vaut $s_j^{n+1/2}$ et est calculée à la relation (3.23). La condition de non-pénétration à la paroi (analogue bidimensionnel de la relation (2.12)) s'écrit donc en moyenne sur la surface mobile $\Sigma_j^{n+1/2}$ très simplement :

$$(3.47) \quad \frac{1}{|\Sigma_j^{n+1/2}|} \int_{\Sigma_j^{n+1/2}} \tilde{u} \bullet \nu_j^{n+1/2} d\gamma = s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0$$

en utilisant la normale moyenne $\nu_j^{n+1/2}$ le long de $\Sigma_j^{n+1/2}$ (voir la relation (3.24)).

- Notons que l'emploi d'indices non bornés pour la géométrie spatiale ($i \leq I, j \in \mathbb{Z}$) évite de poser ici le problème classique de la condition fluide. La condition initiale ne pose pas de problème particulier et la relation (2.10) reste valable.

- La méthode des volumes finis introduit comme inconnue de base le champ $W_{i,j}^n$ des valeurs moyennes des variables conservées (3.36) dans la maille spatiale $K_{i,j}^n$:

$$(3.48) \quad W_{i,j}^n = \frac{1}{|K_{i,j}^{n+1/2}|} \int_{K_j^{n+1/2}} W(x, t^n) dx.$$

Le schéma numérique consiste à intégrer la loi de conservation (3.42) dans la cellule d'espace-temps $V_{i,j}^{n+1/2}$, définie de manière générale par les relations :

$$(3.49) \quad V_{i,j}^{n+1/2} = \begin{cases} K_{i,j} \times [t^n, t^{n+1}], & i \leq I-1, \quad j \in \mathbb{Z} \\ V_{I,j}^{n+1/2} & , j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

On a donc :

$$(3.50) \quad \int_{\partial V_{i,j}^{n+1/2}} \left(W \tilde{\nu}_t + f(W) \tilde{\nu}_x + g(W) \tilde{\nu}_y \right) (x, t) d\gamma(x, t) = 0.$$

Le bord de $V_{i,j}^{n+1/2}$ est constitué de facettes $\Sigma_{i+1/2,j}^{n+1/2}$ et $\Sigma_{i,j+1/2}^{n+1/2}$ en plus des volumes spatiaux $K_{i,j}$. Elles sont définies par :

$$(3.51) \quad \Sigma_{i+1/2,j}^{n+1/2} = \begin{cases} \Sigma_{i+1/2,j} \times [t^n, t^{n+1}], & i \leq I-1, \quad j \in \mathbb{Z} \\ \Sigma_j^{n+1/2} \quad (c.f.(3.45)), & i = I, \quad j \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(3.52) \quad \Sigma_{i,j+1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} \Sigma_{i,j+1/2} \times [t^n, t^{n+1}], & i \leq I-1, \quad j \in \mathbb{Z} \\ \Sigma_{j+1/2}^{n+1/2}, & i = I, \quad j \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

avec pour les facettes transversales :

$$(3.53) \quad \Sigma_{j+1/2}^n = \left[M_{I-1/2, j+1/2}^n, M_{I+1/2, j+1/2}^n \right], \quad j \in \mathbf{Z}, \quad n \geq 0$$

$$(3.54) \quad \Sigma_{j+1/2}^{n+1/2} = \left\{ \left(\zeta \Sigma_{j+1/2}^n + (1 - \zeta) \Sigma_{j+1/2}^{n+1}, t^n + \zeta \Delta t \right), 0 \leq \zeta \leq 1 \right\}.$$

Avec des notation naturelles pour les directions normales, à savoir :

$$(3.55) \quad \nu_{i+1/2, j}^{n+1/2} = \begin{cases} \nu_{i+1/2, j} & (c.f.(3.12)), \quad i \leq I - 1, \quad j \in \mathbf{Z} \\ \nu_j^{n+1/2} & (c.f.(3.24)), \quad i = I, \quad j \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

$$(3.56) \quad \nu_{i, j+1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} \nu_{i, j+1/2} & (c.f.(3.14)), \quad i \leq I - 1, \quad j \in \mathbf{Z} \\ \nu_{j+1/2}^{n+1/2} & (c.f.(3.25)), \quad i = I, \quad j \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

les flux normaux $(\Phi \bullet \nu)$ dans les deux directions du maillage ont une définition très simple :

$$(3.57) \quad (\Phi \bullet \nu)_{i+1/2, j}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Sigma_{i+1/2, j}^{n+1/2}} \Phi(W(x, t)) \bullet \nu_{i+1/2, j}^{n+1/2} d\gamma(x) dt$$

$$(3.58) \quad (\Phi \bullet \nu)_{i, j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Sigma_{i, j+1/2}^{n+1/2}} \Phi(W(x, t)) \bullet \nu_{i, j+1/2}^{n+1/2} d\gamma(x) dt.$$

- Nous développons maintenant l'intégrale de bord de la relation (3.50). Il vient :

$$(3.59) \quad \int_{\partial V_{i, j}^{n+1/2}} d\sigma(x, t) \equiv \begin{cases} \int_{K_{i, j}^{n+1}} dx - \int_{K_{i, j}^n} dx + \\ + \int_{\Sigma_{i+1/2, j}^{n+1/2}} d\gamma - \int_{\Sigma_{i-1/2, j}^{n+1/2}} d\gamma \\ + \int_{\Sigma_{i, j+1/2}^{n+1/2}} d\gamma - \int_{\Sigma_{i, j-1/2}^{n+1/2}} d\gamma \end{cases}$$

et appliquant l'opérateur (3.59) à la quantité sous le signe "somme" du membre de gauche de (3.50), à savoir $(W \tilde{\nu}_t + f(W) \tilde{\nu}_x + g(W) \tilde{\nu}_y)(x, t)$, il vient, compte-tenu des définitions (3.48), (3.57) et (3.58), dans le cas où les mailles sont fixes ($i \leq I - i$)

$$(3.60) \quad \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} \left(W_{i, j}^{n+1} - W_{i, j}^n \right) + \frac{1}{|K_{i, j}|} \left[(\Phi \bullet \nu)_{i+1/2, j}^{n+1/2} - (\Phi \bullet \nu)_{i-1/2, j}^{n+1/2} + \right. \\ \left. + (\Phi \bullet \nu)_{i, j+1/2}^{n+1/2} - (\Phi \bullet \nu)_{i, j-1/2}^{n+1/2} \right] = 0, \quad i \leq I - 1, \quad j \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Dans le cas d'une maille mobile ($i = I$), l'écriture de la loi de conservation (3.50) est un peu plus compliquée car les facettes $\Sigma_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ et $\Sigma_{I, j+1/2}^{n+1/2}$ ont une normale extérieure $\tilde{\nu}$ qui a une composante temporelle $\tilde{\nu}_t$ (relation (3.22)) non-triviale. Nous détaillons dans la proposition suivante l'algèbre relative à ces différents termes.

Proposition 3.3 **Flux au bord du volume mobile** $V_{I, j}^{n+1/2}$.

Etant donnée une famille $\{W_{l, m}^n, l \leq I, m \in \mathbf{Z}\}$ fixée d'états fluides, on suppose que le schéma numérique de volumes finis permet l'évaluation d'états interpolés $W_{i+1/2, j}^{n+1/2}$ et $W_{i, j+1/2}^{n+1/2}$ sur les facettes $\Sigma_{i+1/2, j}^{n+1/2}$ et $\Sigma_{i, j+1/2}^{n+1/2}$ comme fonction de ces seules variables, prenant en compte également les données aux limites ($i = I$). On a alors les quatre relations suivantes :

$$(3.61) \quad \begin{cases} \int_{\Sigma_{I+1/2, j}^{n+1/2}} (W \tilde{\nu}_t + f(W) \tilde{\nu}_x + g(W) \tilde{\nu}_y)(x, t) \, d\gamma = \\ = \Delta t \left[(\Phi \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2} - \left(s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2} \right) W_{I+1/2, j}^{n+1/2} \right] \end{cases}$$

$$(3.62) \quad \int_{\Sigma_{I-1/2, j}^{n+1/2}} (W \tilde{\nu}_t + f(W) \tilde{\nu}_x + g(W) \tilde{\nu}_y)(x, t) \, d\gamma = -\Delta t (\Phi \bullet \nu)_{I-1/2, j}^{n+1/2}$$

$$(3.63) \quad \begin{cases} \int_{\Sigma_{I, j+1/2}^{n+1/2}} (W \tilde{\nu}_t + f(W) \tilde{\nu}_x + g(W) \tilde{\nu}_y)(x, t) \, d\gamma = \\ = \Delta t \left[(\Phi \bullet \nu)_{I, j+1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2} \left(s_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right) W_{I, j+1/2}^{n+1/2} \right] \end{cases}$$

$$(3.64) \quad \begin{cases} \int_{\Sigma_{I, j-1/2}^{n+1/2}} (W \tilde{\nu}_t + f(W) \tilde{\nu}_x + g(W) \tilde{\nu}_y)(x, t) \, d\gamma = \\ = \Delta t \left[-(\Phi \bullet \nu)_{I, j-1/2}^{n+1/2} + \frac{1}{2} \left(s_{j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j-1/2}^{n+1/2} \right) W_{I, j-1/2}^{n+1/2} \right]. \end{cases}$$

Preuve de la proposition 3.3.

- Nous montrons d'abord la relation (3.61) en détail. Nous avons :

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_{I+1/2, j}^{n+1/2}} (W \tilde{\nu}_t + f(W) \tilde{\nu}_x + g(W) \tilde{\nu}_y)(x, t) \, d\gamma = \\ & = -\Delta t W_{I+1/2, j}^{n+1/2} \left(s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2} \right) + \Delta t \left[f \left(W_{I+1/2, j}^{n+1/2} \right) \nu_j^{n+1/2, x} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + g \left(W_{I+1/2, j}^{n+1/2} \right) \nu_j^{n+1/2, y} \right] \quad \text{compte tenu de (3.26)} \\
 = & \Delta t \left[(\Phi \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2} - \left(s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2} \right) W_{I+1/2, j}^{n+1/2} \right]
 \end{aligned}$$

compte tenu de (3.43) et (3.44), ce qui montre la première identité.

- Les autres relations résultent du calcul des intégrales des normales extérieures (relations (3.27) à (3.29)) mené à la proposition 3.2 et de l'orientation relative de la normale extérieure $\tilde{\nu}$ au volume mobile $V_{I, j}^{n+1/2}$ d'une part et des normales $\nu_{i+1/2, j}$ et $\nu_{i, j+1/2}$ qui courent le long des lignes de maillage d'autre part. \square

Remarque 3.1

- Dans le cas de la maille mobile $K_{I, j}$, c'est-à-dire du volume dans l'espace-temps $V_{I, j}^{n+1/2}$, l'équation de bilan (3.50) prend la forme suivante, compte-tenu de la définition (3.48), du calcul (3.59) et des relations (3.61) à (3.64) que nous venons d'établir :

$$(3.65) \quad \left\{ \begin{aligned}
 & \frac{1}{\Delta t} \left(|K_{I, j}^{n+1}| W_{I, j}^{n+1} - |K_{I, j}^n| W_{I, j}^n \right) + \\
 & + \left[(\Phi \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2} - \left(s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2} \right) W_{I+1/2, j}^{n+1/2} \right] \\
 & - (\Phi \bullet \nu)_{I-1/2, j}^{n+1/2} \\
 & + \left[(\Phi \bullet \nu)_{I, j+1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2} \left(s_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right) W_{I, j+1/2}^{n+1/2} \right] \\
 & - \left[(\Phi \bullet \nu)_{I, j-1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2} \left(s_{j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j-1/2}^{n+1/2} \right) W_{I, j-1/2}^{n+1/2} \right] = 0.
 \end{aligned} \right.$$

- Lorsque le volume $K_{I, j}(t)$ est une perturbation d'un volume $K_{I, j}$ de référence, c'est-à-dire lorsque les points mobiles $M_{I+1/2, j+1/2}(t)$ restent voisins de sommets fixes $M_{I+1/2, j+1/2}$, la définition $(F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ du flux limite de paroi mobile consiste à rendre **identiques** les relations (3.65) et (3.60) avec $i = I$. Ceci est possible car l'expression $[\phi \bullet \nu - (s \bullet \nu) W]_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ ne fait intervenir qu'une pression paroi $p_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ facilement calculable, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 3.4 Flux sur la paroi mobile et pression paroi.

On se place dans les mêmes hypothèses que pour la proposition précédente : le schéma numérique de volumes finis est associé à un calcul préalable d'états aux interfaces de la forme $W_{i+1/2, j}^{n+1/2}$ et $W_{i, j+1/2}^{n+1/2}$. Si l'état $W_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ sur la paroi mobile $\Sigma_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ satisfait la condition limite (3.47) de non pénétration à la paroi et admet une pression notée $p_{I+1/2, j}^{n+1/2}$, alors le flux $(\Phi \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ sur la paroi mobile est calculé par l'expression suivante :

$$(3.66) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\Phi \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2} = \left(s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2} \right) W_{I+1/2, j}^{n+1/2} + \\ + \left(0, p_{I+1/2, j}^{n+1/2} \nu_j^{n+1/2}, p_{I+1/2, j}^{n+1/2} \left(s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2} \right) \right)^t \end{array} \right.$$

Preuve de la proposition 3.4.

- Le flux normal à la paroi, compte-tenu de (3.40), (3.41) et (3.44) s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi \bullet \nu &= \begin{pmatrix} \rho \tilde{u} \bullet \nu \\ (\rho \tilde{u} \bullet \nu) u + p \nu^x \\ (\rho \tilde{u} \bullet \nu) v + p \nu^y \\ (\rho \tilde{u} \bullet \nu) E + p (\tilde{u} \bullet \nu) \end{pmatrix} \\ &= (\tilde{u} \bullet \nu) \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ p \nu \\ p (\tilde{u} \bullet \nu) \end{pmatrix} \\ &= \left(s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2} \right) W_{I+1/2, j}^{n+1/2} + \begin{pmatrix} 0 \\ p_{I+1/2, j}^{n+1/2} \nu_j^{n+1/2} \\ p_{I+1/2, j}^{n+1/2} \left(s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2} \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

compte-tenu de la relation (3.47), ce qui établit complètement la relation (3.66) et la proposition. \square

Proposition et définition 3.5 Flux limite de paroi mobile.

Sous les mêmes hypothèses que pour les propositions précédentes, on définit par $(F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ l'expression algébrique qui permet de remplacer l'écriture de la loi de bilan (3.65) sur maillage mobile par une expression algébrique de type (3.60) relative à un maillage fixe :

$$(3.67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta t} \left(W_{I,j}^{n+1} - W_{I,j}^n \right) + \\ + \frac{1}{|K_{I,j}|} \left[(F \bullet \nu)_{I+1/2,j}^{n+1/2} - (\Phi \bullet \nu)_{I-1/2,j}^{n+1/2} + \right. \\ \left. + (\Phi \bullet \nu)_{I,j+1/2}^{n+1/2} - (\Phi \bullet \nu)_{I,j-1/2}^{n+1/2} \right] = 0, \\ i = I, \quad j \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Le flux limite de paroi mobile $(F \bullet \nu)_{I+1/2,j}^{n+1/2}$ est donc défini par l'expression suivante :

$$(3.68) \quad \left\{ \begin{array}{l} (F \bullet \nu)_{I+1/2,j}^{n+1/2} = \frac{|K_{I,j}|}{|K_{I,j}^{n+1}|} \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} 0 \\ p_{I+1/2,j}^{n+1/2} \nu_j^{n+1/2} \\ p_{I+1/2,j}^{n+1/2} (s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2}) \end{array} \right) + \\ + \frac{|K_{I,j}^{n+1}|}{\Delta t} \left(1 - \frac{|K_{I,j}^n|}{|K_{I,j}^{n+1}|} \right) W_{I+1/2,j}^{n+1/2} + \\ + \left(\frac{|K_{I,j}^{n+1}|}{|K_{I,j}|} - 1 \right) (\Phi \bullet \nu)_{I-1/2,j}^{n+1/2} \\ + \left[\left((\Phi \bullet \nu) - \frac{1}{2}(s \bullet \nu)W \right)_{I,j+1/2}^{n+1/2} - \frac{|K_{I,j}^{n+1}|}{|K_{I,j}|} (\Phi \bullet \nu)_{I,j+1/2}^{n+1/2} \right] \\ - \left[\left((\Phi \bullet \nu) - \frac{1}{2}(s \bullet \nu)W \right)_{I,j-1/2}^{n+1/2} - \frac{|K_{I,j}^{n+1}|}{|K_{I,j}|} (\Phi \bullet \nu)_{I,j-1/2}^{n+1/2} \right] \end{array} \right\}. \end{array} \right.$$

Remarque 3.2

• On veillera à ne pas confondre d'une part l'expression (3.66) qui représente le flux sur la paroi mobile et d'autre part l'expression (3.68), nommée ici flux limite de paroi mobile. Cette confusion possible consiste à ne **pas** écrire la loi de conservation (3.65) qui représente le bilan physique dans le domaine mobile $V_{I,j}^{n+1/2}$ mais le schéma usuel (3.60), non valable en toute rigueur dans cette région d'espace-temps si on ne modifie convenablement le flux sur la paroi mobile. Une difficulté vient du fait que ces deux objets portent *a priori* le même nom $(\Phi \bullet \nu)_{I+1/2,j}^{n+1/2}$. Rappelons que le flux limite de paroi mobile $(F \bullet \nu)_{I+1/2,j}^{n+1/2}$ tel que défini ici est simplement un artifice algébrique pour donner à la loi de conservation en domaine mobile les apparences d'un bilan en maillage fixe [Du98].

Preuve de la proposition 3.5.

- On explicite le flux limite de paroi mobile $(F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ en le tirant de la relation (3.67) ; il vient :

$$(3.69) \quad \left\{ \begin{aligned} (F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2} &= -\frac{|K_{I, j}|}{\Delta t} \left(W_{I, j}^{n+1} - W_{I, j}^n \right) + (\Phi \bullet \nu)_{I-1/2, j}^{n+1/2} \\ &\quad - (\Phi \bullet \nu)_{I, j+1/2}^{n+1/2} + (\Phi \bullet \nu)_{I, j-1/2}^{n+1/2} \end{aligned} \right.$$

puis on remplace l'état $W_{I, j}^{n+1}$ par sa valeur tirée de l'expression (3.65), c'est-à-dire, compte-tenu de la relation (3.66) :

$$(3.70) \quad \left\{ \begin{aligned} W_{I, j}^{n+1} &= \frac{|K_{I, j}^n|}{|K_{I, j}^{n+1}|} W_{I, j}^n + \frac{\Delta t}{|K_{I, j}^{n+1}|} \left\{ - \begin{pmatrix} 0 \\ p_{I+1/2, j}^{n+1/2} \nu_j^{n+1/2} \\ p_{I+1/2, j}^{n+1/2} (s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2}) \end{pmatrix} \right. \\ &\quad + (\Phi \bullet \nu)_{I-1/2, j}^{n+1/2} - \left[(\Phi \bullet \nu) - \frac{1}{2}(s \bullet \nu)W \right]_{I, j+1/2}^{n+1/2} \\ &\quad \left. + \left[(\Phi \bullet \nu) - \frac{1}{2}(s \bullet \nu)W \right]_{I, j+1/2}^{n+1/2} \right\}. \end{aligned} \right.$$

On reporte l'expression (3.70) au sein de la relation (3.69). Il vient :

$$\left\{ \begin{aligned} (F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2} &= \frac{|K_{I, j}|}{\Delta t} \left(1 - \frac{|K_{I, j}^n|}{|K_{I, j}^{n+1}|} \right) W_{I, j}^n + \\ &\quad + \frac{|K_{I, j}|}{|K_{I, j}^{n+1}|} \begin{pmatrix} 0 \\ p_{I+1/2, j}^{n+1/2} \nu_j^{n+1/2} \\ p_{I+1/2, j}^{n+1/2} (s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2}) \end{pmatrix} + \\ &\quad + \left(1 - \frac{|K_{I, j}|}{|K_{I, j}^{n+1}|} \right) (\Phi \bullet \nu)_{I-1/2, j}^{n+1/2} \\ &\quad + \frac{|K_{I, j}|}{|K_{I, j}^{n+1}|} \left[(\Phi \bullet \nu) - \frac{1}{2}(s \bullet \nu)W \right]_{I, j+1/2}^{n+1/2} - (\Phi \bullet \nu)_{I, j+1/2}^{n+1/2} \\ &\quad - \frac{|K_{I, j}|}{|K_{I, j}^{n+1}|} \left[(\Phi \bullet \nu) - \frac{1}{2}(s \bullet \nu)W \right]_{I, j-1/2}^{n+1/2} + (\Phi \bullet \nu)_{I, j-1/2}^{n+1/2}. \end{aligned} \right.$$

Cette relation est, à la présentation algébrique près, identique à la relation (3.68), ce qui montre la proposition 3.5. \square

4) Développements algébriques

• 4.1 • Introduction

• La relation (3.68) définit le flux limite de paroi mobile et permet un calcul *a priori* exact du bilan de masse, d'impulsion et d'énergie dans une maille $K_{I,j}$ ($j \in \mathbb{Z}$) variable dans le temps par l'intermédiaire de ses sommets $M_{I+1/2, j+1/2}$ ($j \in \mathbb{Z}$), tout en n'utilisant près de la paroi mobile que le schéma (3.67) valable *a priori* au point courant seulement. Nous détaillons dans ce qui suit l'expression algébrique de diverses grandeurs en vue du développement limité de l'expression (3.68), sous les hypothèses de points $M_{I+1/2, j+1/2}$ lentement variables au cours du temps c'est à dire dont la vitesse $s_{j+1/2}^{n+1/2}$ est petite devant la vitesse locale du son.

$$(4.1) \quad \left| s_{j+1/2}^{n+1/2} \right| \ll c_{I,j}, c_{I,j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

et tels que l'élongation $\delta_{j+1/2}^n$ définie par

$$(4.2) \quad M_{I+1/2, j+1/2}^n = M_{I+1/2, j+1/2} + \delta_{j+1/2}^n, \quad j \in \mathbb{Z}$$

reste petite devant les distances typiques au sein de la maille $K_{I,j}$ ($j \in \mathbb{Z}$) :

$$(4.3) \quad \left| \delta_{j+1/2}^n \right| \ll \left| \delta_{I,j}^+ \right|, \left| \delta_{I,j}^- \right|, \left| \delta_{I,j+1}^+ \right|, \left| \delta_{I,j+1}^- \right|, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

• Nous devons donc évaluer en fonction de ces deux (!) infiniment petits le volume $|K_{I,j}|$ de la maille à la paroi au temps $n \Delta t$, la normale spatiale $\nu_j^{n+1/2}$ le long de la paroi mobile et la normale spatiale $\nu_{I, j+1/2}^{n+1/2}$ le long de la facette transversale d'indice $(I, j + 1/2)$; ces données sont utiles pour développer ensuite les champs physiques tels que la pression paroi $p_{I+1/2, j}^{n+1/2}$, le flux numérique $(\Phi \bullet \nu)_{I, j+1/2}^{n+1/2}$ le long des faces transversales $\Sigma_{I, j+1/2}^{n+1/2}$ et le flux dynamique $\left[(\Phi \bullet \nu) - \frac{s \bullet \nu}{2} W \right]_{I, j+1/2}^{n+1/2}$ le long de ces mêmes faces. Nous détaillons dans la suite le calcul de chacun de ces termes au premier ordre de précision par rapport à $s_{j+1/2}^{n+1/2}$ et $\delta_{l+1/2}^{n+1/2}$ avant de les regrouper pour expliciter une expression approchée du flux limite de paroi mobile $(F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ (relation (3.68)).

• 4.2 • Volume mobile

Proposition 4.1

Développement limité du volume de la maille mobile.

Le volume $|K_{I,j}|$ de la maille mobile $K_{I,j}$ à l'instant $n \Delta t$ est développé au premier ordre par l'expression suivante :

$$(4.4) \quad |K_{I,j}^n| = |K_{I,j}| + \frac{1}{2} \left(\delta_{I,j}^+ \times \delta_{j+1/2}^n - \delta_{I,j}^- \times \delta_{j-1/2}^n \right) + (\text{ordre} \geq 2)$$

où $\delta_{I,j}^+$ et $\delta_{I,j}^-$ ont été définis aux relations (3.16) et (3.17), $\delta_{j+1/2}^n$ à la relation (4.2) et le produit vectoriel de deux vecteurs de \mathbb{R}^2 énoncé en (3.15).

• Remarque 4.1

• Compte tenu du calcul (4.4), on établit que le terme $\frac{1}{\Delta t} \left(1 - \frac{|K_{I,j}^n|}{|K_{I,j}^{n+1}|} \right)$ en facteur devant $W_{I,j}^n$ dans la relation (3.68) est donné par le développement qui suit :

$$(4.5) \quad \frac{1}{\Delta t} \left(1 - \frac{|K_{I,j}^n|}{|K_{I,j}^{n+1}|} \right) = \frac{1}{2|K_{I,j}|} \left[\delta_{I,j}^+ \times s_{j+1/2}^{n+1/2} - \delta_{I,j}^- \times s_{j-1/2}^{n+1/2} \right] + \text{ordre} \geq 2.$$

Preuve de la proposition 4.1 et de la remarque 4.1.

• On part de l'expression (3.18) (proposition 3.1) qui permet le calcul du volume $|K_{I,j}|$ et on remplace les bras $\delta_{I,j}^+$ et $\delta_{I,j}^-$ par leur valeur à l'instant courant. Il vient :

$$\begin{aligned} |K_{I,j}^n| &= \frac{1}{2} \left(M_{I+1/2,j-1/2}^n - M_{I-1/2,j+1/2}^n \right) \times \left(M_{I+1/2,j+1/2}^n - M_{I-1/2,j-1/2}^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\delta_{j-1/2}^n + \delta_{I,j}^+ \right) \times \left(\delta_{j+1/2}^n + \delta_{I,j}^- \right) \\ &= |K_{I,j}| + \frac{1}{2} \left(\delta_{I,j}^+ \times \delta_{j+1/2}^n \right) - \left(\delta_{I,j}^- \times \delta_{j-1/2}^n \right) + \frac{1}{2} \delta_{j-1/2}^n \times \delta_{j+1/2}^n \end{aligned}$$

ce qui montre la relation (4.4) compte tenu de l'hypothèse (4.3).

• La relation (4.5) s'établit de façon analogue ; on a :

$$\begin{aligned} \frac{|K_{I,j}^n|}{|K_{I,j}^{n+1}|} &= \frac{1 + \frac{1}{2|K_{I,j}|} \left(\delta_{I,j}^+ \times \delta_{j+1/2}^n - \delta_{I,j}^- \times \delta_{j-1/2}^n \right) + \text{ordre} \geq 2}{1 + \frac{1}{2|K_{I,j}|} \left(\delta_{I,j}^+ \times \delta_{j+1/2}^{n+1} - \delta_{I,j}^- \times \delta_{j-1/2}^{n+1} \right) + \text{ordre} \geq 2} \\ &= 1 + \frac{1}{2|K_{I,j}|} \left[\delta_{I,j}^+ \times \left(\delta_{j+1/2}^n - \delta_{j+1/2}^{n+1} \right) - \delta_{I,j}^- \times \left(\delta_{j-1/2}^n - \delta_{j-1/2}^{n+1} \right) \right] + \text{ordre} \geq 2 \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{\Delta t}{2|K_{I,j}|} \left[\delta_{I,j}^+ \times s_{j+1/2}^{n+1/2} - \delta_{I,j}^- \times s_{j-1/2}^{n+1/2} \right] + \text{ordre} \geq 2$$

et cette relation démontre le développement (4.5). \square

Proposition 4.2 Vecteur normal le long de la face transversale.

La normale $\nu_{j+1/2}^{n+1/2}$ le long de la face transversale $\Sigma_{j+1/2}^{n+1/2}$ a par définition un module égal à la longueur $|\Sigma_{j+1/2}^{n+1/2}|$ de cette face. Son expression algébrique est donnée par les relations suivantes :

$$(4.6) \quad \delta_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\delta_{j+1/2}^n + \delta_{j+1/2}^{n+1})$$

$$(4.7) \quad \nu_{j+1/2}^{n+1/2} = \nu_{I,j+1/2} + (k \times \delta_{j+1/2}^{n+1/2}),$$

où k est le vecteur de \mathbb{R}^3 qui pointe normalement au plan du domaine Ω ($k = (0, 0, 1)^t$) et \times désigne le produit vectoriel habituel.

Preuve de la proposition 4.2.

- On part de la relation (3.14) qui prend ici la forme :

$$\begin{aligned} \nu_{I,j+1/2}^n &= \left(- \left(y_{I+1/2,j+1/2}^n - y_{I-1/2,j+1/2}^n \right), \left(x_{I+1/2,j+1/2}^n - x_{I-1/2,j+1/2}^n \right) \right)^t \\ &= \nu_{I,j+1/2} + \left(-\delta_{j+1/2,y}^n, \delta_{j+1/2,x}^n \right)^t \\ &= \nu_{I,j+1/2} + (k \times \delta_{j+1/2}^n) \end{aligned}$$

et la fin résulte de la relation (3.24) qui permet de faire la demi-somme entre les instants t^n et t^{n+1} . \square

Proposition 4.3 Vecteur normal le long de la paroi mobile.

La normale $\nu_j^{n+1/2}$ le long de la face de paroi mobile $\Sigma_j^{n+1/2}$ a par définition un module égal à la longueur $|\Sigma_j^{n+1/2}|$ de cette face. Son développement est calculé grâce aux relations suivantes :

$$(4.8) \quad \epsilon_j^{n+1/2} = \delta_{j+1/2}^{n+1/2} - \delta_{j-1/2}^{n+1/2}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0$$

$$(4.9) \quad \nu_j^{n+1/2} = \nu_{I+1/2,j} + \left(\epsilon_j^{n+1/2} \times k \right), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0$$

avec les mêmes notations que pour la proposition précédente. Si on introduit la normale unitaire fixe ou mobile avec le symbole “tilda”, c’est à dire

$$(4.10) \quad \tilde{\nu} = \frac{\nu}{|\nu|}, \quad \nu = \nu_{I+1/2, j} \text{ ou } \nu = \nu_j^{n+1/2},$$

on a alors à l'ordre 1 de précision :

$$(4.11) \quad \tilde{\nu}_j^{n+1/2} = \left(1 - \frac{\nu_{I+1/2, j}}{|\nu_{I+1/2, j}|^2} \times \epsilon_j^{n+1/2} \right) \tilde{\nu}_{I+1/2, j} + \left(\frac{\epsilon_j^{n+1/2}}{|\nu_{I+1/2, j}|} \times k \right)$$

comme illustré Figure 13.

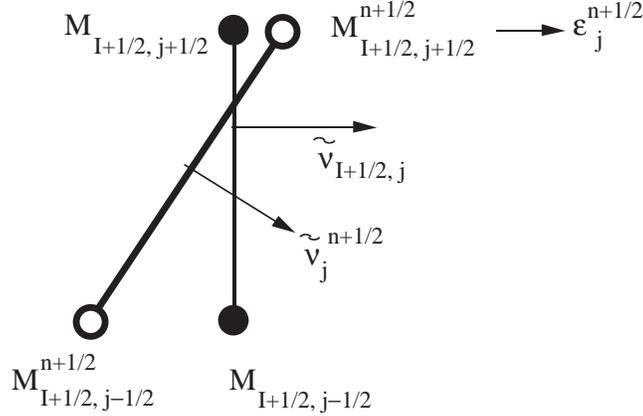


Figure 13 L'écart sur les normales unitaires dans le mouvement des points de la paroi contient un terme colinéaire à la normale unitaire et un second terme orthogonal à la différence $\epsilon_j^{n+1/2}$ des perturbations entre les deux points de la facette $\Sigma_{I, j+1/2}$ (relation (4.11)).

Preuve de la proposition 4.3.

- De même qu'à la proposition précédente, la relation (3.12) prend ici la forme :

$$\begin{aligned} \nu_{I+1/2, j}^{n+1/2} &= \left(y_{I+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - y_{I+1/2, j-1/2}^{n+1/2}, -x_{I+1/2, j+1/2}^{n+1/2} + x_{I+1/2, j-1/2}^{n+1/2} \right)^t \\ &= \nu_{I+1/2, j} + \left(\delta_{j+1/2, y}^{n+1/2} - \delta_{j-1/2, y}^{n+1/2}, -\delta_{j+1/2, x}^{n+1/2} + \delta_{j-1/2, x}^{n+1/2} \right)^t \\ &= \nu_{I+1/2, j} + \left(\epsilon_{j, y}^{n+1/2}, -\epsilon_{j, x}^{n+1/2} \right)^t \\ &= \nu_{I+1/2, j} + \left(\epsilon_j^{n+1/2} \times k \right), \end{aligned}$$

ce qui établit la relation (4.9).

- Le calcul de la normale unitaire demande d'évaluer au préalable le module de l'expression (4.9). On a :

$$\left| \nu_j^{n+1/2} \right|^2 = \left| \nu_{I+1/2, j} \right|^2 + 2 \left(\nu_{I+1/2, j} \times \epsilon_j^{n+1/2} \right) + (\text{ordre} \geq 2)$$

donc

$$\frac{1}{|\nu_j^{n+1/2}|} = \frac{1}{|\nu_{I+1/2,j}|} \left(1 - \frac{\nu_{I+1/2,j}}{|\nu_{I+1/2,j}|^2} \times \epsilon_j^{n+1/2} \right) + (\text{ordre} \geq 2)$$

et la relation (4.11) résulte du produit de cette dernière relation par l'expression (4.9). \square

• 4.3 • Décomposition de flux

• L'évaluation de la pression paroi $p_{I+1/2,j}^{n+1/2}$ demande d'entrer dans le détail de la méthode numérique "Muscl" [vL79]. Rappelons qu'à partir des états $\{W_{k,l}^n, k \leq I, l \in \mathbb{Z}\}$, la méthode Muscl propose de calculer des états extrapolés au bord des différentes faces ; nous notons $W_{i,j+1/2,-}^n$ et $W_{i,j+1/2,+}^n$ les deux états de part et d'autre de la face $\Sigma_{i,j+1/2}$ alors que $W_{i+1/2,j,-}^n$ et $W_{i+1/2,j,+}^n$ désignent les deux états de part et d'autre de la face $\Sigma_{i+1/2,j}$; nous renvoyons à la figure 14 pour une illustration de ce point. Les flux $(\Phi \bullet \nu)_{i,j+1/2}^{n+1/2}$ et $(\Phi \bullet \nu)_{i+1/2,j}^{n+1/2}$ sont calculés en utilisant une résolution approchée du problème de Riemann entre les états $W_{i,j+1/2,-}^n$ et $W_{i,j+1/2,+}^n$ le long de la normale $\nu_{i,j+1/2}^{n+1/2}$ d'une part, entre les états $W_{i+1/2,j,-}^n$ et $W_{i+1/2,j,+}^n$ le long de la normale $\nu_{i+1/2,j}^{n+1/2}$ d'autre part. Comme pour la relation (2.24), nous avons donc :

$$(4.12) \quad (\Phi \bullet \nu)_{i,j+1/2}^{n+1/2} = \Psi \left(W_{i,j+1/2,-}^n, \nu_{i,j+1/2}^{n+1/2}, W_{i,j+1/2,+}^n \right)$$

$$(4.13) \quad (\Phi \bullet \nu)_{i+1/2,j}^{n+1/2} = \Psi \left(W_{i+1/2,j,-}^n, \nu_{i+1/2,j}^{n+1/2}, W_{i+1/2,j,+}^n \right)$$

et le choix du flux splitting de van Leer pour évaluer la fonction $\Psi(W_g, \nu, W_d)$ est explicité dans le sous-paragraphe suivant.

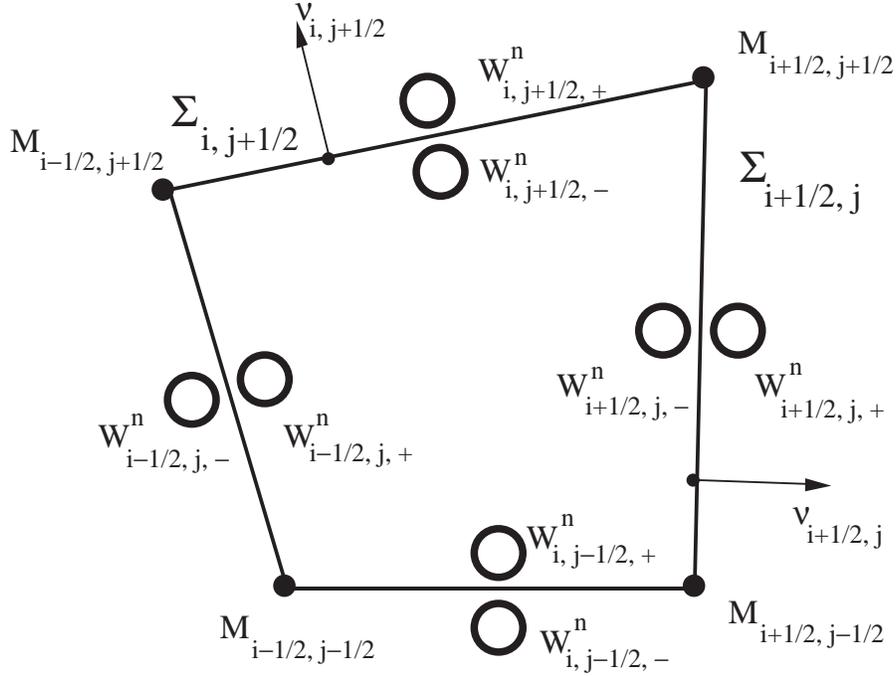


Figure 14 Ensemble des états extrapolés pour le calcul des flux $(\Phi \cdot \nu)_{i, j \pm 1/2}$ et $(\Phi \cdot \nu)_{i \pm 1/2, j}$ autour du volume $K_{i, j}$.

- Le calcul du flux de van Leer à deux dimensions d'espace (relations (4.12) et (4.13)) prend la forme simple

$$(4.14) \quad \Psi(W_g, \nu, W_d) = \Phi^+(W_g) \cdot \nu + \Phi^-(W_d) \cdot \nu$$

et compte tenu de la définition (3.44), on a, pour

$$(4.15) \quad W = \left(\rho, \rho u, \rho v, \rho E \equiv \rho \left(e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right) \right)^t$$

$$(4.16) \quad M_\nu = \frac{u \nu_x + v \nu_y}{c |\nu|}, \quad p = (\gamma - 1) \rho e, \quad c^2 = \frac{\gamma p}{\rho},$$

la relation suivante

$$(4.17) \quad \Phi^+(W) \cdot \nu = \begin{cases} 0 & \text{si } M_\nu \leq -1 \\ \Phi(W) \cdot \nu & \text{si } M_\nu \geq 1. \end{cases}$$

Lorsque $|M_\nu| \leq 1$, l'extension bidimensionnelle des relations (2.28) à (2.30) s'écrit :

$$(4.18) \quad \Phi^+(W) \cdot \nu = |\nu| \left(f_m^+(W, \nu), f_x^+(W, \nu), f_y^+(W, \nu), f_e^+(W, \nu) \right)^t$$

avec

$$(4.19) \quad f_m^+(W, \nu) = \rho c \left(\frac{M_\nu + 1}{2} \right)^2$$

$$(4.20) \quad f_n^+(W, \nu) = f_m^+(W, \nu) \frac{(\gamma - 1) \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} + 2c}{\gamma}$$

$$(4.21) \quad f_\tau^+(W, \nu) = f_m^+(W, \nu) (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau})$$

$$(4.22) \quad f_e^+(W, \nu) = f_m^+(W, \nu) \frac{((\gamma - 1) \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} + 2c)^2}{2(\gamma^2 - 1)}$$

$$(4.23) \quad \begin{cases} \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} = \frac{1J}{|\nu|} (u\nu_x + v\nu_y) & \equiv u \cos \theta + v \sin \theta \\ \tilde{u} \bullet \tilde{\tau} = \frac{1J}{|\nu|} (-u\nu_y + v\nu_x) & \equiv -u \sin \theta + v \cos \theta \end{cases}$$

$$(4.24) \quad f_x^+(W, \nu) = f_n^+(W, \nu) \cos \theta - f_\tau^+(W, \nu) \sin \theta$$

$$(4.25) \quad f_y^+(W, \nu) = f_n^+(W, \nu) \sin \theta + f_\tau^+(W, \nu) \cos \theta.$$

De même, le flux “négatif” $\Phi^-(W) \bullet \nu$ est une généralisation naturelle des relations (2.33) à (2.35). Il vient :

$$(4.26) \quad \Phi^-(W) \bullet \nu = \begin{cases} \Phi(W) \bullet \nu & \text{si } M_\nu \leq -1 \\ |\nu| \left(f_m^-(W, \nu), f_x^-(W, \nu), f_y^-(W, \nu), f_e^-(W, \nu) \right)^t & \text{si } |M_\nu| \leq 1 \\ 0 & \text{si } M_\nu \geq 1 \end{cases}$$

avec, compte tenu de (4.23), les relations

$$(4.27) \quad f_m^-(W, \nu) = -\rho c \left(\frac{M_\nu - 1}{2} \right)^2$$

$$(4.28) \quad f_n^-(W, \nu) = f_m^-(W, \nu) \frac{(\gamma - 1) \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} - 2c}{\gamma}$$

$$(4.29) \quad f_\tau^-(W, \nu) = f_m^-(W, \nu) (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau})$$

$$(4.30) \quad f_e^-(W, \nu) = f_m^-(W, \nu) \frac{((\gamma - 1) \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} - 2c)^2}{2(\gamma^2 - 1)}$$

$$(4.31) \quad f_x^-(W, \nu) = f_n^-(W, \nu) \cos \theta - f_\tau^-(W, \nu) \sin \theta$$

$$(4.32) \quad f_y^-(W, \nu) = f_n^-(W, \nu) \sin \theta + f_\tau^-(W, \nu) \cos \theta.$$

qui permettent de généraliser la relation (2.26) sous la forme

$$(4.33) \quad \Phi(W) \bullet \nu = \Phi^+(W) \bullet \nu + \Phi^-(W) \bullet \nu, \quad \forall W, \quad \forall \nu.$$

• 4.4 • Pression paroi.

• La pression à la paroi s'obtient par une approche analogue au cas monodimensionnel ; on évalue d'abord la pression à vitesse nulle $p_{\star,j}^{n+1/2}(0)$, avec une notation quasiment analogue à celle du cas monodimensionnel, puis on la corrige avec d'une part l'effet dû à la vitesse de la paroi et d'autre part l'effet dû à la variation du vecteur normal. La pression paroi à vitesse nulle se calcule en utilisant dans le problème de Riemann relatif à la face $\Sigma_{I+1/2,j}$ la donnée à gauche égale à $W_{i+1/2,j,-}^n$ et pour donnée à droite son état miroir :

$$(4.34) \quad W_{i+1/2,j,+}^n = \mu\left(W_{i+1/2,j,-}^n\right)$$

qui a même thermodynamique que l'état $W_{i+1/2,j,-}^n$, même vitesse tangentielle $\tilde{u}_{\star,j} \bullet \tilde{\tau}$ mais une vitesse normale $\tilde{u}_{\star,j} \bullet \tilde{\nu}$ opposée. Nous avons :

$$(4.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho\left(\mu(W_{i+1/2,j,-}^n)\right) = \rho_{\star,j}^n \equiv \rho(W_{i+1/2,j,-}^n) \\ \tilde{u}\left(\mu(W_{i+1/2,j,-}^n)\right) \bullet \tilde{\nu} = -\tilde{u}_{\star,j}^n \bullet \frac{\nu_{I+1/2,j}}{|\nu_{I+1/2,j}|} \\ \tilde{u}\left(\mu(W_{i+1/2,j,-}^n)\right) \bullet \tilde{\tau} = \tilde{u}_{\star,j}^n \bullet \left(k \times \frac{\nu_{I+1/2,j}}{|\nu_{I+1/2,j}|}\right) = \tilde{u}_{\star,j}^n \bullet \tilde{\tau} \\ (\rho E)\left(\mu(W_{i+1/2,j,-}^n)\right) = (\rho E)(W_{i+1/2,j,-}^n) \end{array} \right.$$

de sorte que le flux décomposé entre $W_{i+1/2,j,-}^n$ et son miroir $\mu(W_{i+1/2,j,-}^n)$ est toujours de la forme

$$(4.36) \quad (\Phi \bullet \nu)_{I+1/2,j}^{n+1/2} = (0, p_{\star,j}^{n+1/2}(0) \nu_{I+1/2,j}, 0)^t, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0$$

avec

$$(4.37) \quad p_{\star,j}^{n+1/2}(0) = 2 f_m^+ \left(W_{i+1/2,j,-}^n, \nu_{I+1/2,j} \right) \frac{(\gamma - 1) (\tilde{u}_{\star,j}^n \bullet \tilde{\nu}) + 2c_{\star,j}^n}{\gamma}$$

lorsque le nombre de Mach normal $M_{\nu,\star,j}^n$ défini par les relations

$$(4.38) \quad \tilde{\nu}_{I+1/2,j} = \frac{\nu_{I+1/2,j}}{|\nu_{I+1/2,j}|}$$

$$(4.39) \quad M_{\nu,\star,j}^n = \frac{\tilde{u}_{\star,j}^n \bullet \tilde{\nu}_{I+1/2,j}}{c_{\star,j}^n}$$

est inférieur ou égal à 1 en module.

Proposition 4.4 Pression paroi à vitesse nulle.

Lorsque l'élément de surface discrète $\Sigma_{I+1/2, j}$ est immobile dans sa position initiale (i.e. $s_{j+1/2}^{n+1/2} = s_{j-1/2}^{n+1/2} = 0$, $\delta_{j+1/2}^n = \delta_{j-1/2}^n = 0$), le flux $(\Phi \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ définit, grâce à la relation (4.36), une pression paroi $p_{\star, j}^{n+1/2}(0)$ qui se calcule à partir du nombre de Mach normal $M_{\nu, \star, j}^n$, de la célérité du son $c_{\star, j}^n$ et de la vitesse normale $\tilde{u}_{\star, j}^n \bullet \tilde{\nu}$ de l'état extrapolé $W_{i+1/2, j, -}^n$ près de la paroi, à l'aide de la relation (4.37) lorsque $|M_{\nu, \star, j}^n| \leq 1$.

Preuve de la proposition 4.4.

- Elle a essentiellement été faite ci-dessus ; comme la vitesse normale $\tilde{u}_{\star, j}^n \bullet \tilde{\nu}$ change de signe, on a

$$f_m^+(W_{i+1/2, j, -}^n) + f_m^-(\mu(W_{i+1/2, j, -}^n)) = 0$$

donc les flux de masse et d'énergie totaux sont nuls compte tenu de la relation (4.14). Le flux d'impulsion tangentiel global est nul également, compte tenu de (4.21), (4.29), (4.35) et de la relation précédente. Le flux d'impulsion normal de l'état miroir, compte tenu de (4.28) et (4.35) est exactement égal au flux d'impulsion normal de l'état extrapolé $W_{i+1/2, j, -}^n$, ce qu'exprime finalement la relation (4.37), compte tenu de (4.20) et de la rotation d'angle θ (4.24)(4.25) qui permet de le calculer. La proposition est établie. \square

Proposition 4.5 Calcul approché de la pression paroi.

La pression $p_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ présente dans la relation (3.68) qui définit le flux limite de paroi mobile $(F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ admet au premier ordre de précision par rapport à la vitesse $s_j^{n+1/2}$ de l'interface mobile et par rapport aux écarts $\delta_{j-1/2}^{n+1/2}$ et $\delta_{j+1/2}^{n+1/2}$ le développement limité suivant :

$$(4.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{I+1/2, j}^{n+1/2} = p_{\star, j}^{n+1/2}(0) - \rho_{\star, j}^n c_{\star, j}^n (s_j^{n+1/2} \bullet \tilde{\nu}_j^{n+1/2}) + \\ + \frac{[3(\gamma - 1)(\tilde{u}_{\star, j}^n \bullet \tilde{\nu}) + (\gamma + 3)c_{\star, j}^n][p_{\star, j}^{n+1/2}(0)]}{[(\tilde{u}_{\star, j}^n \bullet \tilde{\nu}) + c_{\star, j}^n][(\gamma - 1)(\tilde{u}_{\star, j}^n \bullet \tilde{\nu}) + 2c_{\star, j}^n]} (\tilde{u}_{\star, j}^n \bullet \delta \tilde{\nu}_j^{n+1/2}) \\ + (\text{ordre} \geq 2) \end{array} \right.$$

où

$$= -\left(\frac{\nu}{|\nu|^2} \times \epsilon\right) (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) + \left(\tilde{u} \times \frac{\epsilon}{|\nu|}\right) + \text{ordre} \geq 2$$

et, aux notations près, la relation (4.41) est établie. \square

• 4.5 • Flux transversal.

• La relation (3.68) qui permet de définir le flux limite de paroi mobile fait apparaître un flux transversal $(\Phi \bullet \nu)_{I, j+1/2}^{n+1/2}$ qu'il convient de calculer ainsi qu'une expression dynamique issue de ce flux, à savoir

$$(4.43) \quad \Psi\left(\frac{1}{2}(s \bullet \nu)_{j+1/2}^{n+1/2}\right) \equiv (\Phi \bullet \nu)_{I, j+1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2}(s \bullet \nu)_{j+1/2}^{n+1/2} W_{I, j+1/2}^{n+1/2}.$$

Il faut préciser que dans l'expression (4.43), l'état $W_{I, j+1/2}^{n+1/2}$ est un état vivant sur la direction d'espace-temps de vitesse normale égale à $\frac{1}{2}(s \bullet \tilde{\nu})_{j+1/2}^{n+1/2}$ dans la résolution du problème de Riemann (voir la figure 15) et le flux $(\Phi \bullet \nu)_{I, j+1/2}^{n+1/2}$ est à prendre le long de cette même direction d'espace-temps de vitesse normale $\frac{1}{2}(s \bullet \nu)_{j+1/2}^{n+1/2}$.

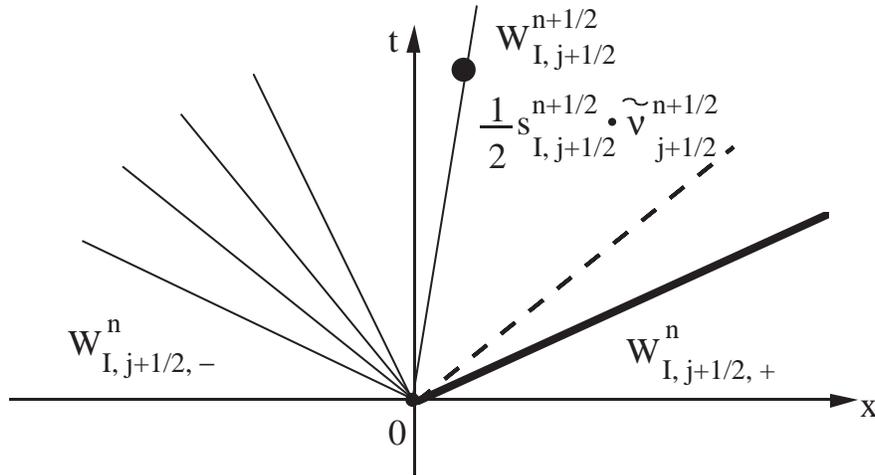


Figure 15 Dans le problème de Riemann entre les états fluides $W_{I, j+1/2, -}^n$ et $W_{I, j+1/2, +}^n$, il faut évaluer le flux (4.43) au point de vitesse normale $\frac{1}{2}(s \bullet \tilde{\nu})_j^{n+1/2}$.

- La décomposition de flux de van Leer a les inconvénients de ses avantages ; l’expression (4.14) qui permet le calcul approché de la solution du problème de Riemann est simple mais il est impossible, dans l’état actuel de nos connaissances et malgré une tentative infructueuse menée lors de cette étude (mai 1997), de proposer une décomposition “naturelle” de l’expression $\Psi(s \bullet \nu)$ de la relation (4.14) qui permette de retrouver les relations (4.17) à (4.33) lorsque $s \bullet \nu = 0$. Nous optons donc pour la **modélisation numérique** qui suit, approche qui étend ce qui a été proposé plus haut pour le champ de pression.
- Nous nous plaçons d’abord à une dimension d’espace et supposons le problème de Riemann entre W_g et W_d résolu exactement grâce au schéma de Godunov. Alors l’expression (4.43) a un développement qui s’exprime simplement en fonction du flux numérique (à vitesse nulle), de la vitesse de mobilité infiniment petite s et de l’état $W(0)$ présent à l’interface lors de la résolution exacte de ce problème autosemblable. La proposition qui suit précise ce point.

Proposition 4.6 Flux numérique à vitesse variable.

Soient W_g et W_d deux états monodimensionnels (relation (2.5)), $V(W_g, \xi, W_d)$ la solution entropique autosemblable du problème de Riemann entre W_g et W_d . Alors on a les deux résultats suivants : (i) le flux du schéma de Godunov $\Psi(W_g, W_d)$ est calculé simplement par la relation

$$(4.44) \quad \Psi(W_g, W_d) = f(V(W_g, 0, W_d))$$

où $f(\bullet)$ est définie à la relation (2.8), (ii) pour $\xi \in \mathbb{R}$ infiniment petit, l’expression $\Psi(W_g, \xi, W_d)$ définie comme en (4.43) par la relation

$$(4.45) \quad \Psi(W_g, \xi, W_d) \equiv f(V(W_g, \xi, W_d)) - \xi V(W_g, \xi, W_d)$$

admet le développement suivant :

$$(4.46) \quad \Psi(W_g, \xi, W_d) = \Psi(W_g, W_d) - \xi V(W_g, 0, W_d) + \text{ordre}(\xi^2).$$

Preuve de la proposition 4.6.

- Nous supposons le lecteur familier de la résolution du problème de Riemann pour la dynamique des gaz et renvoyons dans le cas contraire à l’ouvrage de Courant et Friedrichs [CF48]. La figure 16 illustre une configuration typique pour le problème de Riemann : l’espace-temps $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$ est divisé en secteurs angulaires où la variable $\xi = \frac{x}{t}$ permet de paramétrer l’état $V(W_g, \xi, W_d)$ solution entropique du problème de tube à choc. Dans ce cas de figure, quatre valeurs de ξ sont critiques : la valeur $\xi = \lambda_1(W_g)$ qui permet de “commencer” la 1-onde de détente, la valeur $\xi = \lambda_1(W_1^*)$ du premier

état intermédiaire qui termine cette 1-onde et débute la plage du premier état intermédiaire, la valeur $\xi = u^*$ où u^* est la valeur commune des vitesses de W_1^* et W_2^* et enfin la valeur $\xi = \sigma_3$ de la célérité d'un 3-choc entre le second état intermédiaire W_2^* et l'état de droite W_d de ce problème. Nous avons donc (dans ce cas de figure au moins) :

$$(4.47) \quad \Psi(W_g, \xi, W_d) = \begin{cases} f(W_g) - \xi W_g, & \xi < \lambda_1(W_g) \\ f(V(W_g, \xi, W_d)) - \xi V(W_g, \xi, W_d), & \lambda_1(W_g) < \xi < \lambda_1(W_1^*) \\ f(W_1^*) - \xi W_1^*, & \lambda_1(W_1^*) < \xi < u^* \\ f(W_2^*) - \xi W_2^*, & u^* < \xi < \sigma_3 \\ f(W_d) - \xi W_d, & \xi > \sigma_3. \end{cases}$$

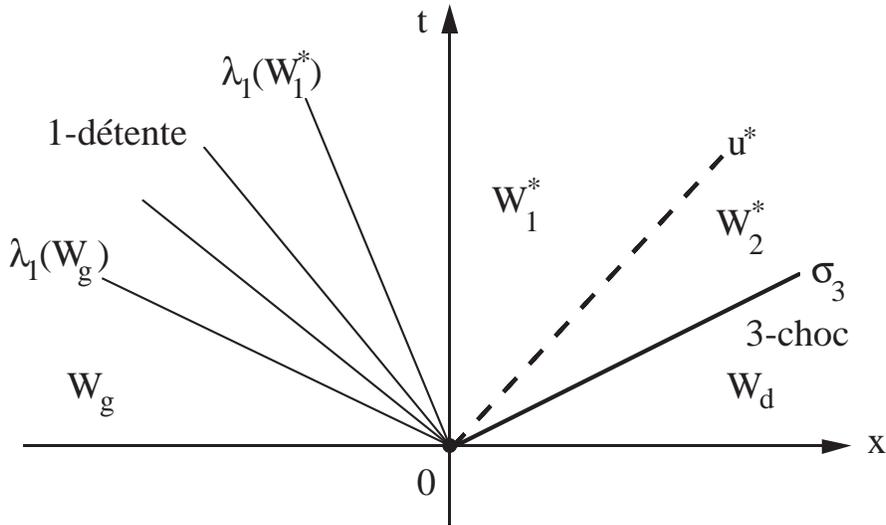


Figure 16 Solution typique du problème de Riemann.

- Dans la 1-onde de détente ($\lambda_1(W_g) < \xi < \lambda_1(W_1^*)$), la fonction $\xi \mapsto \Psi(W_g, \xi, W_d)$ est dérivable et on a :

$$(4.48) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \Psi(W_g, \xi, W_d) = -V(W_g, \xi, W_d).$$

En effet, le long de cette onde de détente, l'état $V(W_g, \xi, W_d)$ vérifie :

$$(4.49) \quad \left[df(V(W_g, \xi, W_d)) - \xi \right] \frac{\partial V}{\partial \xi}(W_g, \xi, W_d) = 0$$

et la propriété (4.48) résulte d'une dérivation par rapport à ξ de la relation (4.45) et de la relation (4.49). Si la 1-onde de détente contient le point d'origine

$\xi = 0$, la relation (4.46) résulte alors du développement de Taylor à l'ordre 1 de $\Psi(W_g, \xi, W_d)$ et de la relation (4.48).

- Pour un état constant V , l'expression (4.45) est une simple fonction affine de ξ (*c.f.* (4.47)) et si c'est le cas autour de $\xi = 0$, alors le développement (4.46) est en fait exact.

- Pour la 3-onde de choc (avec $\xi = \sigma_3$) ou la 2-discontinuité de contact ($\xi = u^*$), on a deux états constants W_- et W_+ de part et d'autre de la discontinuité et la relation de Rankine-Hugoniot s'exprime sous la forme

$$(4.50) \quad f(W_+) - f(W_-) = \sigma(W_+ - W_-)$$

qui entraîne clairement la continuité de la fonction $\Psi(W_g, \bullet, W_d)$ au voisinage de $\xi = \sigma$:

$$(4.51) \quad \Psi(W_g, \xi = \sigma - 0, W_d) = \Psi(W_g, \xi = \sigma + 0, W_d).$$

Compte tenu de l'expression affine de $\Psi(W_g, \bullet, W_d)$ au voisinage de $\xi = \sigma$:

$$(4.52) \quad \Psi(W_g, \xi, W_d) = \begin{cases} \Psi(W_g, \sigma, W_d) - (\xi - \sigma)W_- , & \xi < \sigma \\ \Psi(W_g, \sigma, W_d) - (\xi - \sigma)W_+ , & \xi > \sigma , \end{cases}$$

nous concluons que le développement (4.46) est valable si $\sigma = 0$, à cette réserve près que la dérivée de $\Psi(W_g, \bullet, W_d)$ ayant un saut, l'état $V(W_g, 0, W_d)$ dépend du signe avec lequel ξ tend vers zéro. La propriété en résulte. \square

- La proposition 4.6 permet de calculer le flux de paroi transversal (4.43) lorsqu'on utilise le schéma de Godunov. Le premier terme de la relation (4.46), noté dans la suite $(\Phi_{I, j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2})$ correspond au flux classique lorsque la vitesse est nulle (ce qui n'exclut pas une modification de la direction normale !) et le second permet d'utiliser un état $V_{I, j+1/2}^{n+1/2}$ présent à l'interface (de vitesse nulle) dans le problème de Riemann, au lieu de l'état $W_{I, j+1/2}^{n+1/2}$ présent sur une direction d'espace-temps de célérité non nulle. Nous avons donc :

$$(4.53) \quad \left\{ \Psi\left(\frac{1}{2}(s \bullet \nu)_{j+1/2}^{n+1/2}\right) = (\Phi_{I, j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2}) - \frac{1}{2}(s \bullet \nu)_{j+1/2}^{n+1/2} V_{I, j+1/2}^{n+1/2} + (\text{ordre} \geq 2) \right.$$

- Le développement limité se poursuit clairement : il faut d'une part développer le premier terme, flux de van Leer qui approche le schéma de Godunov lorsque la normale $\nu_{j+1/2}^{n+1/2}$ est issue de la normale fixe $\nu_{I, j+1/2}$ par la relation (4.7). Ce calcul est possible car le flux de van Leer est une fonction dérivable ; nous le présentons au paragraphe suivant. Il faut d'autre part évaluer le second

- Nous commençons par évaluer la variation $\delta\tilde{\nu}$ de la normale unitaire lorsque la normale non unitaire ν de mesure égale à celle de la facette $\Sigma_{I,j+1/2}$ varie de $\delta\nu$.

Proposition 4.7 Variation de la normale unitaire.

Lorsque la normale ν varie de $\delta\nu$, la normale unitaire $\tilde{\nu}$ définie par

$$(4.56) \quad \tilde{\nu} = \frac{\nu}{|\nu|}$$

varie de $\delta\tilde{\nu}$, avec

$$(4.57) \quad \delta\tilde{\nu} = \frac{1}{|\nu|} \delta\nu - \frac{1}{|\nu|^3} (\nu, \delta\nu) \nu.$$

Dans le cas de la relation (4.7) où $\delta\nu$ s'écrit $\delta\nu_{j+1/2}^{n+1/2} = k \times \delta_{j+1/2}^{n+1/2}$, on a simplement

$$(4.58) \quad \delta\tilde{\nu}_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{(\nu_{I,j+1/2} \bullet \delta_{j+1/2}^{n+1/2})}{|\nu|^3} (k \times \nu_{I,j+1/2}).$$

Preuve de la proposition 4.7.

- La relation (4.57) est une simple dérivation de (4.56), compte tenu de la définition de la norme $|\nu|$ en fonction du produit scalaire (ν, ν) . Lorsque $\delta\nu = k \times \delta_{j+1/2}^{n+1/2}$, on a alors

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\nu} &= \frac{1}{|\nu|^3} \left[(\nu_x^2 + \nu_y^2) \begin{pmatrix} -\delta_y \\ \delta_x \end{pmatrix} - (-\nu_x \delta_y + \nu_y \delta_x) \begin{pmatrix} \nu_x \\ \nu_y \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{|\nu|^3} \begin{pmatrix} -\nu_y^2 \delta_y - \nu_x \nu_y \delta_x \\ \nu_x^2 \delta_x + \nu_x \nu_y \delta_y \end{pmatrix} \\ &= \frac{(\nu \bullet \delta_{j+1/2}^{n+1/2})}{|\nu|^3} \begin{pmatrix} -\nu_y \\ \nu_x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui montre la relation (4.58). □

Proposition 4.8 Sensibilité de la contribution positive du flux.

Soit W un état (relation (4.15)) pour la résolution des équations d'Euler de la dynamique des gaz, ν une direction normale de l'espace et $\tilde{\nu} = \nu / |\nu|$ la direction unitaire associée. On suppose que le nombre de Mach normal M_ν défini à la relation (4.16) est plus petit que 1 en module :

$$(4.59) \quad \left| M_\nu \equiv \frac{\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}}{c} \right| \leq 1.$$

Alors le flux $\Phi^+(W) \bullet \nu$, défini aux relations (4.18) à (4.25) admet le développement suivant :

$$(4.60) \quad \delta(\Phi^+(W) \bullet \nu) = (\delta\Phi_m^+, \delta\Phi_x^+, \delta\Phi_y^+, \delta\Phi_e^+)^t$$

avec

$$(4.61) \quad \delta\Phi_m^+ = \frac{2}{1+M_\nu} f_m^+(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \times \tilde{u}}{c |\nu|} (\tilde{\nu} \bullet \delta)$$

$$(4.62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\Phi_x^+ = \left[\left(v - \frac{1}{\gamma} (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) \tilde{\nu}_x \right) f_m^+(W, \nu) + \right. \\ \left. + \frac{2}{1+M_\nu} \frac{(\tilde{u} \bullet \tilde{\tau})}{c} f_x^+(W, \nu) - f_y^+(W, \nu) \right] \frac{(\tilde{\nu} \bullet \delta)}{|\nu|} \end{array} \right.$$

$$(4.63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\Phi_y^+ = \left[- \left(u + \frac{1}{\gamma} (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) \tilde{\nu}_y \right) f_m^+(W, \nu) + \right. \\ \left. + f_x^+(W, \nu) + \frac{2}{1+M_\nu} \frac{(\tilde{u} \bullet \tilde{\tau})}{c} f_y^+(W, \nu) \right] \frac{(\tilde{\nu} \bullet \delta)}{|\nu|} \end{array} \right.$$

$$(4.64) \quad \delta\Phi_e^+ = \left[\frac{\gamma}{\gamma+1} f_n^+(W, \nu) + \frac{2}{(\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) + c} f_e^+(W, \nu) \right] (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) \frac{(\tilde{\nu} \bullet \delta)}{|\nu|}$$

lorsque, toutes choses égales par ailleurs, la normale ν subit une variation $\delta\nu$ donnée par

$$(4.65) \quad \delta\nu = k \times \delta.$$

Preuve de la proposition 4.8.

• Compte tenu de la relation (4.58) et de la forme algébrique particulière des flux $f_m^+(W, \nu)$, $f_x^+(W, \nu)$, $f_y^+(W, \nu)$ et $f_e^+(W, \nu)$ à dériver (relations (4.19) à (4.25)), on commence par dériver le nombre de Mach normal. On a :

$$\begin{aligned} \delta M_\nu &= \frac{1}{c} \delta(\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) = \frac{1}{c} \tilde{u} \bullet \delta\tilde{\nu} \\ &= \frac{1}{c |\nu|^3} (\nu \bullet \delta) (\tilde{u} \bullet (k \times \nu)) \quad \text{compte tenu de (4.58)} \\ &= \frac{\nu \times \tilde{u}}{c |\nu|^3} (\nu \bullet \delta) = \frac{\tilde{\nu} \times \tilde{u}}{c |\nu|} (\tilde{\nu} \bullet \delta) \end{aligned}$$

$$(4.66) \quad \delta M_\nu = \frac{1}{c |\nu|} (\tilde{\nu} \times \tilde{u}) (\tilde{\nu} \bullet \delta) = \frac{1}{c |\nu|} (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) (\tilde{\nu} \bullet \delta).$$

• Il suffit ensuite de dériver l'expression (4.19) par rapport au nombre de Mach normal :

$$\delta\Phi_m^+ = 2\rho c \frac{(1+M_\nu)}{4} \delta M_\nu = 2f_m^+(W, \nu) \frac{\delta M_\nu}{1+M_\nu}$$

ce qui montre la relation (4.61).

• On dérive ensuite le flux d'impulsion normal $f_n^+(W, \nu)$ calculé à la relation (4.20) ; il vient

$$\begin{aligned} \delta f_n^+(W, \nu) &= \delta\Phi_m^+ \frac{(\gamma-1)(\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) + 2c}{\gamma} + f_m^+(W, \nu) \frac{\gamma-1}{\gamma} \delta(\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) \\ &= \left[\frac{2}{1+M_\nu} f_m^+(W, \nu) \frac{(\gamma-1)(\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) + 2c}{\gamma} + f_m^+(W, \nu) \frac{\gamma-1}{\gamma} c \right] \delta M_\nu \end{aligned}$$

$$(4.67) \quad \delta f_n^+(W, \nu) = \left[\frac{2}{1+M_\nu} f_n^+(W, \nu) + \frac{\gamma-1}{\gamma} c f_m^+(W, \nu) \right] \delta M_\nu$$

$$(4.68) \quad \delta f_n^+(W, \nu) = \frac{1}{\gamma(1+M_\nu)} \left[3(\gamma-1)(\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) + (\gamma+3)c \right] f_m^+(W, \nu) \delta M_\nu.$$

• Il est également utile de maîtriser la dérivée de la vitesse tangentielle $\tilde{u} \bullet \tilde{\tau} = \tilde{\nu} \times \tilde{u}$:

$$\delta(\tilde{\nu} \times \tilde{u}) = (\delta\tilde{\nu}) \times \tilde{u} = \frac{\nu \bullet \delta}{|\nu|^3} (k \times \nu) \times \tilde{u} = -\frac{\nu \bullet \delta}{|\nu|^3} (\tilde{u} \bullet \nu)$$

$$(4.69) \quad \delta(\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) = \delta(\tilde{\nu} \times \tilde{u}) = -\frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}).$$

La dérivée du flux d'impulsion tangentiel (relation (4.21)) est donc simple :

$$\begin{aligned} \delta f_\tau^+(W, \nu) &= \delta\Phi_m^+ (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) + f_m^+(W, \nu) \delta(\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) \\ &= f_m^+(W, \nu) \left[\frac{2(\tilde{u} \bullet \tilde{\tau})}{1+M_\nu} \delta M_\nu - \frac{\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}}{|\nu|} (\tilde{\nu} \bullet \delta) \right] \\ (4.70) \quad \delta f_\tau^+(W, \nu) &= \frac{2}{1+M_\nu} f_\tau^+(W, \nu) \delta M_\nu - f_m^+(W, \nu) \frac{\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}}{|\nu|} (\tilde{\nu} \bullet \delta). \end{aligned}$$

• On combine ensuite les relations (4.67) et (4.70) pour dériver, à l'aide de (4.25) et (4.26), les deux composantes cartésiennes du flux d'impulsion. Il vient :

$$\begin{aligned} \delta\Phi_x^+ &= \delta(f_n^+(W, \nu) \tilde{\nu}_x - f_\tau^+(W, \nu) \tilde{\nu}_y) \\ &= (\delta f_n^+(W, \nu)) \tilde{\nu}_x + f_n^+(W, \nu) (\delta\tilde{\nu}_x) - (\delta f_\tau^+(W, \nu)) \tilde{\nu}_y - f_\tau^+(W, \nu) (\delta\tilde{\nu}_y). \end{aligned}$$

Compte tenu de (4.58), on a

$$(4.71) \quad \delta\tilde{\nu}_x = -\frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} \tilde{\nu}_y \quad ; \quad \delta\tilde{\nu}_y = \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} \tilde{\nu}_x$$

et le calcul se déroule, suite à (4.61), (4.67), (4.70), (4.71), (4.23), (4.24) et (4.25) :

$$\begin{aligned}
 \delta \Phi_x^+ &= \left[\frac{2}{1+M_\nu} f_n^+(W, \nu) + \frac{\gamma-1}{\gamma} c f_m^+(W, \nu) \right] \delta M_\nu \cos \theta \\
 &\quad + f_n^+(W, \nu) \left(-\frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \sin \theta \right) - f_\tau^+(W, \nu) \left(\frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \cos \theta \right) \\
 &\quad - \left[\frac{2}{1+M_\nu} f_\tau^+(W, \nu) \delta M_\nu - f_m^+(W, \nu) \frac{\tilde{u} \cdot \tilde{\nu}}{|\nu|} (\tilde{\nu} \cdot \delta) \right] \sin \theta \\
 &= \frac{2}{1+M_\nu} f_x^+(W, \nu) \delta M_\nu - f_y^+(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \\
 &\quad + f_m^+(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} (\tilde{u} \cdot \tilde{\tau}) \cos \theta + (\tilde{u} \cdot \tilde{\nu}) \sin \theta \right) \\
 &= \frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \left[\frac{2}{1+M_\nu} f_x^+(W, \nu) \frac{\tilde{u} \cdot \tilde{\tau}}{c} - f_y^+(W, \nu) + f_m^+(W, \nu) \left(v - \frac{\tilde{u} \cdot \tilde{\tau}}{\gamma} \tilde{\nu}_x \right) \right]
 \end{aligned}$$

ce qui établit la relation (4.62). On procède de même pour la seconde composante :

$$\begin{aligned}
 \delta \Phi_y^+ &= \delta (f_n^+(W, \nu) \tilde{\nu}_y + f_\tau^+(W, \nu) \tilde{\nu}_x) \\
 &= (\delta f_n^+(W, \nu)) \tilde{\nu}_y + f_n^+(W, \nu) (\delta \tilde{\nu}_y) + (\delta f_\tau^+(W, \nu)) \tilde{\nu}_x + f_\tau^+(W, \nu) (\delta \tilde{\nu}_x) . \\
 &= \left[\frac{2}{1+M_\nu} f_n^+(W, \nu) + \frac{\gamma-1}{\gamma} c f_m^+(W, \nu) \right] \delta M_\nu \sin \theta \\
 &\quad + f_n^+(W, \nu) \left(\frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \cos \theta \right) - f_\tau^+(W, \nu) \left(\frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \sin \theta \right) \\
 &\quad + \left[\frac{2}{1+M_\nu} f_\tau^+(W, \nu) \delta M_\nu - f_m^+(W, \nu) \frac{\tilde{u} \cdot \tilde{\nu}}{|\nu|} (\tilde{\nu} \cdot \delta) \right] \cos \theta \\
 &= \frac{2}{1+M_\nu} f_y^+(W, \nu) \frac{\tilde{u} \cdot \tilde{\tau}}{c} \frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} + f_x^+(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \\
 &\quad + f_m^+(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} (\tilde{u} \cdot \tilde{\tau}) \sin \theta - (\tilde{u} \cdot \tilde{\nu}) \cos \theta \right) \\
 &= \frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \left[f_x^+(W, \nu) + \frac{2}{1+M_\nu} f_y^+(W, \nu) \frac{\tilde{u} \cdot \tilde{\tau}}{c} - f_m^+(W, \nu) \left(u + \frac{\tilde{u} \cdot \tilde{\tau}}{\gamma} \sin \theta \right) \right]
 \end{aligned}$$

et la relation (4.63) en découle.

- La dérivation du flux d'énergie positive est menée par dérivation de la relation (4.22). il vient :

$$\begin{aligned}
 \delta \Phi_e^+ &= \delta f_m^+(W, \nu) \frac{((\gamma - 1) \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} + 2c)^2}{2(\gamma^2 - 1)} + \\
 &\quad + f_m^+(W, \nu) \frac{2(\gamma - 1) ((\gamma - 1) \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} + 2c)}{2(\gamma^2 - 1)} \delta(\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) \\
 &= \frac{2}{1 + M_\nu} f_e^+(W, \nu) \frac{\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}}{c} \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} + \frac{\gamma}{\gamma + 1} f_n^+(W, \nu) (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|}
 \end{aligned}$$

et l'établissement de la relation (4.64) achève la preuve de la proposition 4.8. \square

Proposition 4.9 Sensibilité de la contribution négative du flux.

Sous les mêmes hypothèses qu'à la proposition 4.8, le flux $\Phi^-(W) \bullet \nu$ défini aux relations (4.27) à (4.32) admet, lorsque la direction normale ν subit une variation $\delta\nu$ de la forme (4.65), c'est à dire $\delta\nu = k \times \delta$, le développement au premier ordre suivant :

$$(4.72) \quad \delta(\Phi^-(W) \bullet \nu) = (\delta\Phi_m^-, \delta\Phi_x^-, \delta\Phi_y^-, \delta\Phi_e^-)^t$$

avec

$$(4.73) \quad \delta\Phi_m^- = \frac{2}{M_\nu - 1} f_m^-(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \times \tilde{u}}{c |\nu|} (\tilde{\nu} \bullet \delta)$$

$$(4.74) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\Phi_x^- = \left[\left(v - \frac{1}{\gamma} (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) \tilde{\nu}_x \right) f_m^-(W, \nu) + \right. \\ \left. + \frac{2}{M_\nu - 1} \frac{(\tilde{u} \bullet \tilde{\tau})}{c} f_x^-(W, \nu) - f_y^-(W, \nu) \right] \frac{(\tilde{\nu} \bullet \delta)}{|\nu|} \end{array} \right.$$

$$(4.75) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\Phi_y^- = \left[- \left(u + \frac{1}{\gamma} (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) \tilde{\nu}_y \right) f_m^-(W, \nu) + \right. \\ \left. + f_x^-(W, \nu) + \frac{2}{M_\nu - 1} \frac{(\tilde{u} \bullet \tilde{\tau})}{c} f_y^-(W, \nu) \right] \frac{(\tilde{\nu} \bullet \delta)}{|\nu|} \end{array} \right.$$

$$(4.76) \quad \delta\Phi_e^- = \left[\frac{\gamma}{\gamma + 1} f_n^-(W, \nu) + \frac{2}{(\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) - c} f_e^-(W, \nu) \right] (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) \frac{(\tilde{\nu} \bullet \delta)}{|\nu|} .$$

Preuve de la proposition 4.9.

- On commence par dériver la relation (4.27) relative au flux de masse :

$$\begin{aligned}
 \delta\Phi_m^- &= \delta \left[-\rho c \left(\frac{M_\nu - 1}{2} \right)^2 \right] \\
 &= (-\rho c) \frac{1}{4} 2(M_\nu - 1) \delta M_\nu
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{M_\nu - 1} f_m^-(W, \nu) \delta M_\nu$$

ce qui établit la relation (4.73).

- On dérive ensuite le flux d'impulsion normale (relation (4.28)) et le flux d'impulsion tangentielle (relation (4.29)) ; on obtient :

$$\begin{aligned} \delta f_n^-(W, \nu) &= \delta \Phi_m^- \frac{(\gamma - 1) \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} - 2c}{\gamma} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} f_m^-(W, \nu) \delta(\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) \\ &= \frac{2}{M_\nu - 1} f_n^-(W, \nu) \delta M_\nu + \frac{\gamma - 1}{\gamma} c f_m^-(W, \nu) \delta M_\nu \\ (4.77) \quad \delta f_n^-(W, \nu) &= \left[\frac{2}{M_\nu - 1} f_n^-(W, \nu) + \frac{\gamma - 1}{\gamma} c f_m^-(W, \nu) \right] \delta M_\nu \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \delta f_\tau^-(W, \nu) &= \delta \Phi_m^- (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) + f_m^-(W, \nu) \delta(\tilde{\nu} \times \tilde{u}) \\ (4.78) \quad \delta f_\tau^-(W, \nu) &= \frac{2}{M_\nu - 1} f_\tau^-(W, \nu) \delta M_\nu - f_m^-(W, \nu) (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|}. \end{aligned}$$

- Jointes à (4.31), (4.32) et (4.71), on déduit des relations (4.77) et (4.78) la dérivée des deux composantes cartésiennes du flux d'impulsion. Pour l'axe des x ,

$$\begin{aligned} \delta \Phi_x^- &= \delta f_n^-(W, \nu) \cos \theta - f_n^-(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} \sin \theta \\ &\quad - \delta f_\tau^-(W, \nu) \sin \theta - f_\tau^-(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} \cos \theta \\ &= \left[\frac{2}{M_\nu - 1} f_n^-(W, \nu) + \frac{\gamma - 1}{\gamma} c f_m^-(W, \nu) \right] \delta M_\nu \cos \theta - f_y^-(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} \\ &\quad - \left[\frac{2}{M_\nu - 1} f_\tau^-(W, \nu) \delta M_\nu - f_m^-(W, \nu) (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} \right] \sin \theta \\ &= \frac{2}{M_\nu - 1} f_x^-(W, \nu) \delta M_\nu - f_y^-(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} \\ &\quad + f_m^-(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) \cos \theta + (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) \sin \theta \right] \end{aligned}$$

et la relation (4.74) s'en déduit. Pour l'axe des y ,

$$\delta \Phi_y^- = \delta f_n^-(W, \nu) \sin \theta + f_n^-(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} \cos \theta$$

$$\begin{aligned}
 & + \delta f_{\tau}^{-}(W, \nu) \cos \theta - f_{\tau}^{-}(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} \sin \theta \\
 = & \left[\frac{2}{M_{\nu} - 1} f_n^{-}(W, \nu) + \frac{\gamma - 1}{\gamma} c f_m^{-}(W, \nu) \right] \delta M_{\nu} \sin \theta + f_x^{-}(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} \\
 & + \left[\frac{2}{M_{\nu} - 1} f_{\tau}^{-}(W, \nu) \delta M_{\nu} - f_m^{-}(W, \nu) (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} \right] \cos \theta \\
 = & \frac{2}{M_{\nu} - 1} f_y^{-}(W, \nu) \delta M_{\nu} + f_x^{-}(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} \\
 & + f_m^{-}(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) \sin \theta - (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) \cos \theta \right]
 \end{aligned}$$

et la relation (4.75) est établie.

- La dérivation du flux d'énergie négative se mène sans difficulté ; on a :

$$\begin{aligned}
 \delta \Phi_e^{-} & = \delta \Phi_m^{-} \frac{((\gamma - 1) (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) - 2c)^2}{2(\gamma^2 - 1)} + \\
 & \quad + f_m^{-}(W, \nu) \frac{2(\gamma - 1)}{2(\gamma^2 - 1)} ((\gamma - 1) (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) - 2c) c \delta M_{\nu} \\
 & = \frac{2}{M_{\nu} - 1} f_e^{-}(W, \nu) \delta M_{\nu} + \frac{\gamma c}{\gamma + 1} f_n^{-}(W, \nu) \delta M_{\nu}
 \end{aligned}$$

et la relation (4.76) résulte alors simplement de (4.66), ce qui termine d'établir la proposition 9. \square

• 4.7 • Moyenne de Roe bidimensionnelle.

- Le paragraphe 4.5 relatif à l'étude du flux transversal (4.3) nous a montré qu'on peut le développer au second ordre sous la forme (4.53). Au paragraphe 4.6 qui vient de s'achever, nous avons explicité l'outillage technique qui permet de développer le premier terme du membre de droite de la relation (4.53), c'est à dire $(\Phi_{I, j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2})$ lorsque la normale $\nu_{I, j+1/2}^{n+1/2}$ est une perturbation du premier ordre de la normale "fixe" $\nu_{I, j+1/2}$ donnée à l'aide de la relation (4.7). Il convient maintenant de s'intéresser au second terme du membre de droite de la relation (4.53), lequel se présente déjà sous la forme d'une perturbation du premier ordre et peut donc être approchée par la relation (4.54). Le problème qui reste à résoudre est de calculer la moyenne de Roe, notée $V_{I, j+1/2}^{R, n}$ sur

l'interface $\Sigma_{I,j+1/2}$ transverse à la paroi mobile, entre les états $W_{I,j+1/2,-}^n$ et $W_{I,j+1/2,+}^n$ de part et d'autre de cette interface (voir la figure 13 pour une explicitation de la géométrie).

• Pour éviter des notations trop lourdes dans le corps de ce paragraphe, nous cherchons donc à évaluer la moyenne de Roe entre deux états W_g ($\equiv W_{I,j+1/2,-}^n$ ici) et W_d ($W_d = W_{I,j+1/2,+}^n$ dans notre cas de figure) séparés par une interface de normale unitaire $\tilde{\nu}$ ($\tilde{\nu} = \frac{\nu_{I,j+1/2}}{|\nu_{I,j+1/2}|}$ pour le calcul de $V_{I,j+1/2}^{R,n}$). Nous posons donc :

$$(4.79) \quad V_{I,j+1/2}^{R,n} = R\left(W_{I,j+1/2,-}^n, \tilde{\nu}_{I,j+1/2}, W_{I,j+1/2,+}^n\right)$$

et nous explicitons à la proposition suivante le calcul de la moyenne de Roe bidimensionnelle $R(W_g, \tilde{\nu}, W_d)$ entre deux états W_g et W_d séparés par une normale unitaire $\tilde{\nu}$.

Proposition 4.10 Moyenne de Roe bidimensionnelle.

• Soient W_g et W_d deux états fluides à quatre composantes scalaires (explicitées génériquement à la relation (4.15)) et $\tilde{\nu}$ une normale unitaire fixée. On définit l'état d'interface $W^*(W_g, W_d)$ à l'aide de sa densité ρ^* , de sa vitesse $\tilde{u} = (u^*, v^*)$ et de son enthalpie totale H^* , calculés par les (célèbres) relations de moyenne [Roe81] :

$$(4.80) \quad H_b = \frac{1}{\gamma - 1} (c_b)^2 + \frac{1}{2}(u_b^2 + v_b^2), \quad b = g \text{ ou } d$$

$$(4.81) \quad \rho^* = \sqrt{\rho_g \rho_d}$$

$$(4.82) \quad u^* = \frac{\sqrt{\rho_g} u_g + \sqrt{\rho_d} u_d}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}}$$

$$(4.83) \quad v^* = \frac{\sqrt{\rho_g} v_g + \sqrt{\rho_d} v_d}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}}$$

$$(4.84) \quad H^* = \frac{\sqrt{\rho_g} H_g + \sqrt{\rho_d} H_d}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}}.$$

• La matrice de Roe $A(W^*(W_g, W_d), \tilde{\nu})$ est calculée en posant $W = W^*(W_g, W_d)$ dans l'expression de la matrice jacobienne $A(W, \tilde{\nu})$ des équations (3.42) de la dynamique des gaz. La matrice $A(W, \tilde{\nu})$ est définie par la relation suivante

$$(4.85) \quad A(W, \tilde{\nu}) = df(W) \tilde{\nu}_x + dg(W) \tilde{\nu}_y$$

à partir des flux $f(\bullet)$ et $g(\bullet)$ et qui a une expression explicitée ci-dessous :

$$(4.86) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(W, \tilde{\nu}) = \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & \tilde{\nu}_x & \tilde{\nu}_y & 0 \\ (\gamma-1)H\tilde{\nu}_x - c^2\tilde{\nu}_x & (2-\gamma)u\tilde{\nu}_x & -(\gamma-1)v\tilde{\nu}_x & (\gamma-1)\tilde{\nu}_x \\ -u(\tilde{u}\bullet\tilde{\nu}) & +(\tilde{u}\bullet\tilde{\nu}) & +u\tilde{\nu}_y & \\ (\gamma-1)H\tilde{\nu}_y - c^2\tilde{\nu}_y & v\tilde{\nu}_x & (2-\gamma)v\tilde{\nu}_y & (\gamma-1)\tilde{\nu}_y \\ -v(\tilde{u}\bullet\tilde{\nu}) & -(\gamma-1)u\tilde{\nu}_y & +(\tilde{u}\bullet\tilde{\nu}) & \\ (\gamma-\frac{2}{\gamma})H(\tilde{u}\bullet\tilde{\nu}) & H\tilde{\nu}_x & H\tilde{\nu}_y & \gamma(\tilde{u}\bullet\tilde{\nu}) \\ -c^2(\tilde{u}\bullet\tilde{\nu}) & -(\gamma-1)u(\tilde{u}\bullet\tilde{\nu}) & -(\gamma-1)v(\tilde{u}\bullet\tilde{\nu}) & \end{array} \right) \end{array} \right. .$$

• La famille de matrices $A(W^*(W_g, W_d), \tilde{\nu})$ vérifie les relations constitutives de Roe :

$$(4.87) \quad df(W_d) - df(W_g) = df(W^*(W_g, W_d)) \bullet (W_d - W_g)$$

$$(4.88) \quad dg(W_d) - dg(W_g) = dg(W^*(W_g, W_d)) \bullet (W_d - W_g)$$

et par linéarité toute relation de la forme

$$(4.89) \quad \Phi(W_d) \bullet \tilde{\nu} - \Phi(W_g) \bullet \tilde{\nu} = A(W^*(W_g, W_d), \tilde{\nu}) \bullet (W_d - W_g).$$

• L'état $R(W_g, \tilde{\nu}, W_d)$ est par définition la solution stationnaire du problème de Riemann linéarisé de matrice $A(W^*(W_g, W_d), \tilde{\nu})$. Son expression est paramétrée par les valeurs propres de cette matrice, à savoir les "trois" ondes de célérité $\lambda_j(W^*, \tilde{\nu})$ ($j = 1$ à $4!$) qui s'explicitent ainsi :

$$(4.90) \quad \lambda_1(W^*, \tilde{\nu}) = \tilde{u}\bullet\tilde{\nu} - c^*$$

$$(4.91) \quad \lambda_2(W^*, \tilde{\nu}) = \lambda_3(W^*, \tilde{\nu}) = \tilde{u}\bullet\tilde{\nu}$$

$$(4.92) \quad \lambda_4(W^*, \tilde{\nu}) = \tilde{u}\bullet\tilde{\nu} + c^*$$

où c^* est calculée en cohérence avec les relations (4.80) à (4.84) :

$$(4.93) \quad \frac{1}{\gamma-1} (c^*)^2 = H^* - \frac{1}{2} [(u^*)^2 + (v^*)^2].$$

On a :

$$(4.94) \quad \left\{ \begin{array}{l} R(W_g, \tilde{\nu}, W_d) = \\ \left\{ \begin{array}{l} W_g \\ W_g + \frac{1}{2(c^*)^2} \left[(p_d - \rho^* c^* \tilde{u}_d \bullet \tilde{\nu}) - (p_g - \rho^* c^* \tilde{u}_g \bullet \tilde{\nu}) \right] r_1(W^*, \tilde{\nu}) \\ W_d - \frac{1}{2(c^*)^2} \left[(p_d + \rho^* c^* \tilde{u}_d \bullet \tilde{\nu}) - (p_g + \rho^* c^* \tilde{u}_g \bullet \tilde{\nu}) \right] r_4(W^*, \tilde{\nu}) \\ W_d \end{array} \right. \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{si } \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} - c^* > 0 \\ \text{si } \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} - c^* \leq 0 < \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} \\ \text{si } \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} \leq 0 < \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} + c^* \\ \text{si } \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} + c^* \leq 0 \end{array}$$

où les vecteurs propres $r_j(W^*, \tilde{\nu})$ vérifient bien sûr

$$(4.95) \quad A(W^*, \tilde{\nu}) \bullet r_j(W^*, \tilde{\nu}) = \lambda_j(W^*, \tilde{\nu}) r_j(W^*, \tilde{\nu})$$

et ont une expression qui se calcule sans difficulté :

$$(4.96) \quad r_1(W^*, \tilde{\nu}) = (1, u^* - c^* \tilde{\nu}_x, v^* - c^* \tilde{\nu}_y, H^* - (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) c^*)^t$$

$$(4.97) \quad r_2(W^*, \tilde{\nu}) = (1, (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) \tilde{\nu}_x, (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) \tilde{\nu}_y, \frac{1}{2} (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu})^2 - \frac{1}{2} (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau})^2)^t$$

$$(4.98) \quad r_3(W^*, \tilde{\nu}) = (0, -c^* \tilde{\nu}_y, c^* \tilde{\nu}_x, (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) c^*)^t$$

$$(4.99) \quad r_4(W^*, \tilde{\nu}) = (1, u^* + c^* \tilde{\nu}_x, v^* + c^* \tilde{\nu}_y, H^* + (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) c^*)^t.$$

Preuve de la proposition 4.10.

• Le calcul de la matrice jacobienne demande simplement de dériver les flux $f(\bullet)$ et $g(\bullet)$ des relations (3.40) et (3.41) relativement à l'état W explicité en (3.36) et à l'aide des équations d'état (3.37) et (3.39). On a par exemple

$$p = (\gamma - 1) \left[(\rho E) - \frac{1}{2\rho} ((\rho u)^2 + (\rho v)^2) \right]$$

donc

$$(4.100) \quad \frac{\partial p}{\partial W} = ((\gamma - 1) H - c^2, -(\gamma - 1) u, -(\gamma - 1) v, (\gamma - 1)).$$

De façon analogue,

$$\frac{\partial}{\partial W} (p u) = u \frac{\partial p}{\partial W} + p \frac{\partial}{\partial W} \left(\frac{\rho u}{\rho} \right) = u \frac{\partial p}{\partial W} + p \left(-\frac{u}{\rho}, \frac{1}{\rho}, 0, 0 \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial W} (\rho u E + p u) &= \frac{\partial}{\partial W} \left(\rho E \frac{\rho u}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial W} (p u) \\ &= (-E u, E, 0, u) + u \frac{\partial p}{\partial W} + \frac{p}{\rho} (-u, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial W} (\rho u E + p u) &= \left(-\left(H - \frac{p}{\rho}\right) u, H - \frac{p}{\rho}, 0, u \right) + u \frac{\partial p}{\partial W} + \frac{p}{\rho} (-u, 1, 0, 0) \\ (4.101) \quad \frac{\partial}{\partial W} (\rho u H) &= \left((\gamma-2) H u - u c^2, H - (\gamma-1) u^2, -(\gamma-1) u v, \gamma u \right) \end{aligned}$$

compte tenu de (4.100) et de l'expression de la dérivée de $p u$. Il vient alors, par dérivation très élémentaire de la relation (3.40) :

$$(4.102) \quad df(W) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (\gamma-1) H - u^2 - c^2 & (3-\gamma) u & (1-\gamma) v & (\gamma-1) \\ -u v & v & u & 0 \\ (\gamma-2) H u - u c^2 & H - (\gamma-1) u^2 & (1-\gamma) u v & \gamma u \end{pmatrix}$$

et un calcul très analogue, avec l'aide de (4.100) et (4.101), permet d'expliciter la dérivée de la relation (3.41) :

$$(4.103) \quad dg(W) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -u v & v & u & 0 \\ (\gamma-1) H - v^2 - c^2 & (1-\gamma) u & (3-\gamma) v & (\gamma-1) \\ (\gamma-2) H v - v c^2 & (1-\gamma) u v & H - (\gamma-1) v^2 & \gamma v \end{pmatrix}.$$

La relation (4.86) résulte alors de (4.85) et de l'explicitation (4.102)-(4.103) des deux contributions.

- La vérification des relations (4.87) et (4.88) qui sont constitutives de la matrice de Roe demandent un peu de travail algébrique que nous explicitons ci-dessus pour la seconde ligne de (4.87).

$$\begin{aligned} A &\equiv [(\gamma-1) H^* - (u^*)^2 - (c^*)^2] (\rho_d - \rho_g) + (3-\gamma) u^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + \\ &\quad + (1-\gamma) v^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) + (\gamma-1) (\rho_d E_d - \rho_g E_g) \\ &= \left[\frac{\gamma-3}{2} (u^*)^2 + \frac{\gamma-1}{2} (v^*)^2 \right] (\rho_d - \rho_g) + (3-\gamma) u^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + \\ &\quad + (1-\gamma) v^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) + \\ &\quad + (\gamma-1) \left[\rho_d e_d + \frac{\rho_d}{2} ((u_d)^2 + (v_d)^2) - \rho_g e_g - \frac{\rho_g}{2} ((u_g)^2 + (v_g)^2) \right] \\ &= \frac{\gamma-3}{2} (u^*)^2 (\rho_d - \rho_g) - (\gamma-3) u^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + \frac{\gamma-1}{2} (\rho_d u_d^2 - \rho_g u_g^2) + \\ &\quad + \frac{\gamma-1}{2} \left[(v^*)^2 (\rho_d - \rho_g) - 2v^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) + (\rho_d v_d^2 - \rho_g v_g^2) \right] + \\ &\quad + p_d - p_g. \end{aligned}$$

Nous calculons alors séparément les termes en v et en u dans cette dernière expression. On a en effet

$$\begin{aligned}
 & \rho_d v_d^2 - \rho_g v_g^2 - 2v^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) + (v^*)^2 (\rho_d - \rho_g) \\
 &= \rho_d v_d^2 - \rho_g v_g^2 - 2v^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) + (\sqrt{\rho_d} - \sqrt{\rho_g}) v^* (\sqrt{\rho_g} v_g + \sqrt{\rho_d} v_d) \\
 &= \rho_d v_d^2 - \rho_g v_g^2 + v^* \left[(\rho_g + \sqrt{\rho_g \rho_d}) v_g - (\rho_d + \sqrt{\rho_g \rho_d}) v_d \right] \\
 &= \rho_d v_d^2 - \rho_g v_g^2 + v^* (\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}) (\sqrt{\rho_g} v_g - \sqrt{\rho_d} v_d) \\
 &= \rho_d v_d^2 - \rho_g v_g^2 + (\sqrt{\rho_g} v_g + \sqrt{\rho_d} v_d) (\sqrt{\rho_g} v_g - \sqrt{\rho_d} v_d) = 0
 \end{aligned}$$

compte tenu de (4.83). Nous retenons

$$(4.104) \quad \rho_d v_d^2 - \rho_g v_g^2 - 2v^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) + (v^*)^2 (\rho_d - \rho_g) = 0$$

et de manière analogue pour la première composante de la vitesse :

$$(4.105) \quad \rho_d u_d^2 - \rho_g u_g^2 - 2u^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + (u^*)^2 (\rho_d - \rho_g) = 0.$$

Quand on injecte les relations (4.104) et (4.105) dans le calcul qui explicite la seconde ligne de la relation matricielle (4.87), il vient alors facilement :

$$A = (\rho_d u_d^2 + p_d) - (\rho_g u_g^2 + p_g)$$

c'est à dire le résultat recherché.

• On étudie maintenant la troisième ligne de la relation (4.87). On a

$$\begin{aligned}
 B &\equiv -u^* v^* (\rho_d - \rho_g) + v^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + u^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) \\
 &= v^* \left[\rho_d u_d - \rho_g u_g - (\sqrt{\rho_d} - \sqrt{\rho_g}) (\sqrt{\rho_g} u_g + \sqrt{\rho_d} u_d) \right] + u^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) \\
 &= v^* \sqrt{\rho_g \rho_d} (-u_g + u_d) + u^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}} \left[\sqrt{\rho_g \rho_d} (u_d - u_g) (\sqrt{\rho_g} v_g + \sqrt{\rho_d} v_d) + \right. \\
 &\quad \left. + (\rho_d v_d - \rho_g v_g) (\sqrt{\rho_g} u_g + \sqrt{\rho_d} u_d) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}} (\rho_d u_d v_d - \rho_g u_g v_g) (\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}) \\
 &= \rho_d u_d v_d - \rho_g u_g v_g
 \end{aligned}$$

ce qui établit également la seconde ligne de la relation (4.88). Il reste à traiter l'équation de l'énergie :

$$\begin{aligned}
 C &\equiv ((\gamma - 2) H^* - (c^*)^2) u^* (\rho_d - \rho_g) + (H^* - (\gamma - 1) (u^*)^2) (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + \\
 &\quad - (\gamma - 1) u^* v^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) + \gamma u^* (\rho_d E_d - \rho_g E_g) \\
 &= \left(\frac{\gamma - 1}{2} ((u^*)^2 + (v^*)^2) - H^* \right) u^* (\rho_d - \rho_g) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (H^* - (\gamma - 1)(u^*)^2) (\rho_d u_d - \rho_g u_g) - (\gamma - 1) u^* v^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) + \\
 & + (\gamma - 1) u^* (\rho_d E_d - \rho_g E_g) + u^* (\rho_d H_d - p_d - \rho_g H_g + p_g) \\
 = & \frac{\gamma - 1}{2} u^* \left[(u^*)^2 (\rho_d - \rho_g) - 2 u^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + \rho_d (u_d)^2 - \rho_g (u_g)^2 \right] + \\
 & + \frac{\gamma - 1}{2} u^* \left[(v^*)^2 (\rho_d - \rho_g) - 2 v^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) + \rho_d (v_d)^2 - \rho_g (v_g)^2 \right] \\
 & - H^* u^* (\rho_d - \rho_g) + H^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + u^* (\rho_d H_d - \rho_g H_g).
 \end{aligned}$$

Les deux premières lignes de cette expression de C sont nulles compte tenu des relations (4.104) et (4.105). La troisième se simplifie ; nous avons en effet

$$\begin{aligned}
 D & \equiv -H^* u^* (\rho_d - \rho_g) + H^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + u^* (\rho_d H_d - \rho_g H_g) \\
 & = -u^* (\sqrt{\rho_d} H_d + \sqrt{\rho_g} H_g) (\sqrt{\rho_d} - \sqrt{\rho_g}) + H^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + \\
 & \quad + u^* (\rho_d H_d - \rho_g H_g) \\
 & = u^* \sqrt{\rho_g \rho_d} (H_d - H_g) + H^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) \\
 & = \frac{1}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}} \left[\sqrt{\rho_g \rho_d} (\sqrt{\rho_g} u_g + \sqrt{\rho_d} u_d) (H_d - H_g) + \right. \\
 & \quad \left. + (\sqrt{\rho_g} H_g + \sqrt{\rho_d} H_d) (\rho_d u_d - \rho_g u_g) \right] \\
 & = \frac{1}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}} (\rho_d u_d H_d - \rho_g u_g H_g) (\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}) \\
 & = \rho_d u_d H_d - \rho_g u_g H_g
 \end{aligned}$$

ce qui établit la quatrième ligne de la relation (4.87). La quatrième ligne de la relation (4.88) s'obtient par un calcul analogue. Nous retenons la forme algébrique simple pour l'expression de D :

$$(4.106) \quad \left\{ \begin{array}{l} -H^* u^* (\rho_d - \rho_g) + H^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + u^* (\rho_d H_d - \rho_g H_g) = \\ \quad \quad \quad = \rho_d u_d H_d - \rho_g u_g H_g \end{array} \right.$$

et une expression analogue obtenue en changeant partout la lettre u en la lettre v dans (4.106).

- Le calcul de l'état $R(W_g, \tilde{v}, W_d)$ demande de résoudre un problème de Riemann linéaire entre W_g et W_d avec comme opérateur la matrice $A(W^*, \tilde{v})$. Il suffit pour cela d'expliciter les vecteurs propres $r_j(W^*, \tilde{v})$ de cette matrice, les composantes "caractéristiques" φ_j de la différence $W_d - W_g$ dans cette base :

$$(4.107) \quad W_d - W_g = \sum_{j=1}^4 \varphi_j r_j(W^*, \tilde{\nu})$$

et de remarquer que dans le cas d'un système linéaire, la solution autosemblable $W(\xi)$ ($\xi = \frac{x}{t}$, $-\infty < \xi < \infty$) du problème de Riemann entre W_g et W_d s'explique par :

$$(4.108) \quad W(\xi) = \begin{cases} W_g + \sum_{j, \lambda_j(W^*, \tilde{\nu}) < \xi} \varphi_j r_j(W^*, \tilde{\nu}) \\ W_d - \sum_{j, \lambda_j(W^*, \tilde{\nu}) > \xi} \varphi_j r_j(W^*, \tilde{\nu}) \end{cases}$$

sauf pour les valeurs exceptionnelles de ξ égales aux valeurs propres $\lambda_j(W^*, \tilde{\nu})$ de la matrice $A(W^*, \tilde{\nu})$ où la matrice autosemblable est discontinue. L'état $R(W_g, \tilde{\nu}, W_d)$ est égal à $W(\xi = 0)$ et la relation (4.94) résulte alors simplement d'une part de l'explicitation des variables caractéristiques φ_1 et φ_4 de la relation (4.107) et d'autre part de (4.108) appliquée avec $\xi = 0$ (voir la figure 17).

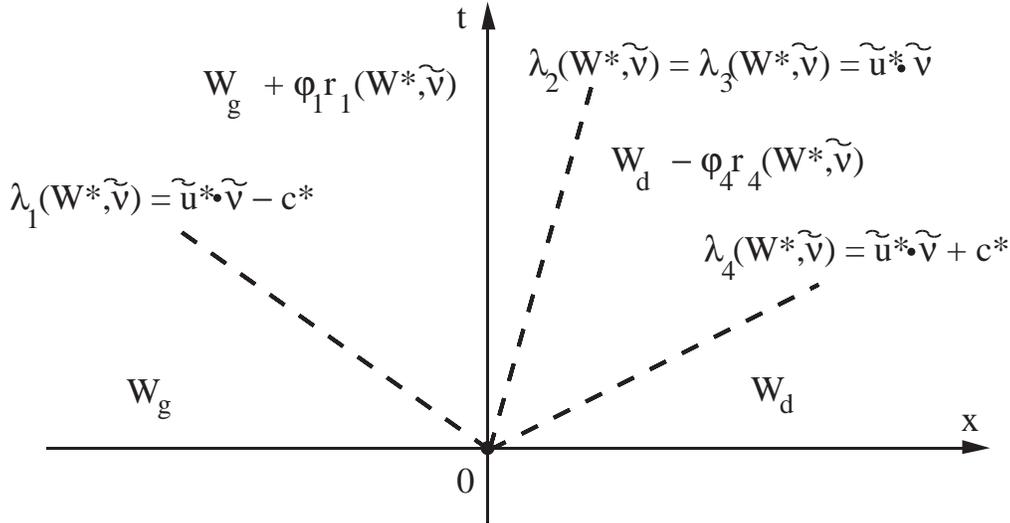


Figure 17 Solution $W(\xi)$ du problème de Riemann pour la matrice de Roe $A(W^*, \tilde{\nu})$. On a

$$W(\xi) = W_g + \sum_{j, \lambda_j < \xi} \varphi_j r_j(W^*, \tilde{\nu}) = W_d - \sum_{j, \lambda_j > \xi} \varphi_j r_j(W^*, \tilde{\nu}).$$

- On calcule dans un premier temps l'expression des vecteurs propres $r_j(W^*, \tilde{\nu})$ de la matrice $A(W^*, \tilde{\nu})$ de la relation (4.86), en se contentant en fait de vérifier

les relations (4.95) pour $j = 1$ à 4 lorsque $r_j(W^*, \tilde{\nu})$ prend successivement les expressions (4.96) à (4.99) et $\lambda_j(W^*, \tilde{\nu})$ celles proposées en (4.90) à (4.92). Livrons nous à cet exercice de style [ν est dans la suite une normale unitaire] :

- 1^{ière} composante de $A \bullet r_1(W^*, \nu) = \nu_x(u - c\nu_x) + \nu_y(v - c\nu_y)$
 $= (\tilde{u} \bullet \nu) - c = \lambda_1(1^{\text{ière}} \text{ composante de } r_1(W^*, \nu)).$
- 2^{ième} composante de $A \bullet r_1(W^*, \nu) = [((\gamma-1)H - u^2 - c^2)\nu_x - uv\nu_y] +$
 $+ [(2-\gamma)u\nu_x + (\tilde{u} \bullet \nu)](u - c\nu_x) + [-(\gamma-1)v\nu_x + u\nu_y](v - c\nu_y) +$
 $+ (\gamma-1)\nu_x [H - uc\nu_x - vc\nu_y]$
 $= [(\gamma-3)uc - (\gamma-1)uc](\nu_x)^2 + [-cv + (\gamma-1)cv - (\gamma-1)cv]\nu_x\nu_y +$
 $- (uc)(\nu_y)^2 + [2(\gamma-1)H - u^2 - c^2 + (3-\gamma)u^2 - (\gamma-1)v^2]\nu_x + (uv)\nu_y$
 $= -2uc(\nu_x)^2 - cv\nu_x\nu_y - uc(\nu_y)^2 + (u^2 + c^2)\nu_x + uv\nu_y$
 $= -uc - c\nu_x(\tilde{u} \bullet \nu) + (u^2 + c^2)\nu_x + uv\nu_y$
 $= -uc - c\nu_x(\tilde{u} \bullet \nu) + u(\tilde{u} \bullet \nu) + c^2\nu_x = ((\tilde{u} \bullet \nu) - c)(u - c\nu_x)$
 $= \lambda_1(2^{\text{ième}} \text{ composante de } r_1(W^*, \nu)).$
- 3^{ième} composante de $A \bullet r_1(W^*, \nu) = [-uv\nu_x + ((\gamma-1)H - v^2 - c^2)\nu_y]$
 $+ (v\nu_x - (\gamma-1)u\nu_y)(u - c\nu_x) + (u\nu_x + (3-\gamma)v\nu_y)(v - c\nu_y) +$
 $+ (\gamma-1)\nu_y(H - uc\nu_x - vc\nu_y)$
 $= -vc(\nu_x)^2 - uc\nu_x\nu_y - 2vc(\nu_y)^2 + uv\nu_x + (v^2 + c^2)\nu_y$
 $= -vc - c\nu_y(\tilde{u} \bullet \nu) + v(\tilde{u} \bullet \nu) + c^2\nu_y = ((\tilde{u} \bullet \nu) - c)(v - c\nu_y)$
 $= \lambda_1(3^{\text{ième}} \text{ composante de } r_1(W^*, \nu)).$
- 4^{ième} composante de $A \bullet r_1(W^*, \nu) = [(\gamma-2)H - c^2](\tilde{u} \bullet \nu) +$
 $+ [H\nu_x - (\gamma-1)u(\tilde{u} \bullet \nu)](u - c\nu_x) +$
 $+ [H\nu_y - (\gamma-1)v(\tilde{u} \bullet \nu)](v - c\nu_y) + \gamma(\tilde{u} \bullet \nu)(H - (\tilde{u} \bullet \nu)c)$
 $= H(\tilde{u} \bullet \nu)(\gamma-1+\gamma) - Hc - (\gamma-1)(\tilde{u} \bullet \nu)(u^2 + v^2) + (\tilde{u} \bullet \nu)^2 c(\gamma-1-\gamma)$

$$\begin{aligned}
 &= H(\tilde{u} \bullet \nu) (2\gamma - 1 - 2(\gamma - 1)) - Hc + c^2(\tilde{u} \bullet \nu) - c(\tilde{u} \bullet \nu)^2 \\
 &= ((\tilde{u} \bullet \nu) - c)(H - (\tilde{u} \bullet \nu)c) \\
 &= \lambda_1 (4^{\text{ième}} \text{ composante de } r_1(W^*, \nu)), \\
 \text{donc } A \bullet r_1(W^*, \nu) &= \lambda_1 r_1(W^*, \nu).
 \end{aligned}$$

- On continue avec la valeur propre (double) $\lambda_2 = \lambda_3 = \tilde{u} \bullet \nu$. On a
 - 1^{ière} composante de $A \bullet r_2(W^*, \nu) = \nu_x(\tilde{u} \bullet \nu)\nu_x + \nu_y(\tilde{u} \bullet \nu)\nu_y = \tilde{u} \bullet \nu$
 $= \lambda_2 (1^{\text{ième}} \text{ composante de } r_2(W^*, \nu)).$
 - 2^{ième} composante de $A \bullet r_2(W^*, \nu) = [((\gamma - 1)H - u^2 - c^2)\nu_x - uv\nu_y] +$
 $+ [(2 - \gamma)u\nu_x + (\tilde{u} \bullet \nu)](\tilde{u} \bullet \nu)\nu_x + [-(\gamma - 1)v\nu_x + u\nu_y](\tilde{u} \bullet \nu)\nu_y +$
 $+ \frac{\gamma - 1}{2}\nu_x [(\tilde{u} \bullet \nu)^2 - (\tilde{u} \bullet \tau)^2]$
 $= \frac{\gamma - 1}{2} [(\tilde{u} \bullet \nu)^2 + (\tilde{u} \bullet \tau)^2]\nu_x - u^2\nu_x - uv\nu_y + (\tilde{u} \bullet \nu) [u + (2 - \gamma)(\tilde{u} \bullet \nu)\nu_x]$
 $+ \frac{\gamma - 1}{2} [(\tilde{u} \bullet \nu)^2 - (\tilde{u} \bullet \tau)^2]$
 $= (\tilde{u} \bullet \nu)^2\nu_x = \lambda_2 (2^{\text{ième}} \text{ composante de } r_2(W^*, \nu)).$
 - 3^{ième} composante de $A \bullet r_2(W^*, \nu) = [-uv\nu_x + ((\gamma - 1)H - v^2 - c^2)\nu_y] +$
 $+ (v\nu_x - (\gamma - 1)u\nu_y)(\tilde{u} \bullet \nu)\nu_x + [(2 - \gamma)v\nu_y + (\tilde{u} \bullet \nu)](\tilde{u} \bullet \nu)\nu_y +$
 $+ \frac{\gamma - 1}{2}\nu_y [(\tilde{u} \bullet \nu)^2 - (\tilde{u} \bullet \tau)^2]$
 $= -(\tilde{u} \bullet \nu)v + \frac{\gamma - 1}{2} [(\tilde{u} \bullet \nu)^2 + (\tilde{u} \bullet \tau)^2]\nu_y + \frac{\gamma - 1}{2}\nu_y [(\tilde{u} \bullet \nu)^2 - (\tilde{u} \bullet \tau)^2] +$
 $+ (\tilde{u} \bullet \nu)(v + (2 - \gamma)(\tilde{u} \bullet \nu)\nu_y)$
 $= (\tilde{u} \bullet \nu)^2\nu_y = \lambda_2 (3^{\text{ième}} \text{ composante de } r_2(W^*, \nu)).$
 - 4^{ième} composante de $A \bullet r_2(W^*, \nu) = [(\gamma - 2)H - c^2](\tilde{u} \bullet \nu) +$
 $+ [H\nu_x - (\gamma - 1)u(\tilde{u} \bullet \nu)](\tilde{u} \bullet \nu)\nu_x + [H\nu_y - (\gamma - 1)v(\tilde{u} \bullet \nu)](\tilde{u} \bullet \nu)\nu_y +$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\gamma}{2} (\tilde{u} \bullet \nu) \left[(\tilde{u} \bullet \nu)^2 - (\tilde{u} \bullet \tau)^2 \right] \\
 = & (\tilde{u} \bullet \nu) \left[(\gamma - 2) H - c^2 + H - (\gamma - 1) (\tilde{u} \bullet \nu)^2 + \frac{\gamma}{2} (\tilde{u} \bullet \nu)^2 - \frac{\gamma}{2} (\tilde{u} \bullet \tau)^2 \right] \\
 = & (\tilde{u} \bullet \nu) \left[\frac{1}{2} (\tilde{u} \bullet \nu)^2 - \frac{1}{2} (\tilde{u} \bullet \tau)^2 \right] = \lambda_2 \left(4^{\text{ième}} \text{ composante de } r_2(W^*, \nu) \right) \\
 \text{et } & A \bullet r_2(W^*, \nu) = \lambda_2 r_2(W^*, \nu).
 \end{aligned}$$

- 1^{ière} composante de $A \bullet r_3(W^*, \nu) = \nu_x (-c\nu_y) + \nu_y (c\nu_x) = 0$
 $= \lambda_3 \left(1^{\text{ième}} \text{ composante de } r_3(W^*, \nu) \right)$

- 2^{ième} composante de $A \bullet r_3(W^*, \nu) = \left[(2 - \gamma) u \nu_x + (\tilde{u} \bullet \nu) \right] (-c\nu_y) +$
 $+ \left[-(\gamma - 1) v \nu_x + u \nu_y \right] (c\nu_x) + (\gamma - 1) \nu_x c(-u \nu_y + v \nu_x)$
 $= c\nu_y \left[(\gamma - 2) u \nu_x - (\tilde{u} \bullet \nu) + u \nu_x - (\gamma - 1) u \nu_x \right] + 0(\nu_x)^2$
 $= -c(\tilde{u} \bullet \nu) \nu_y = \lambda_3 \left(2^{\text{ième}} \text{ composante de } r_3(W^*, \nu) \right)$

- 3^{ième} composante de $A \bullet r_3(W^*, \nu) = \left[v \nu_x - (\gamma - 1) u \nu_y \right] (-c\nu_y) +$
 $+ \left[(2 - \gamma) v \nu_y + (\tilde{u} \bullet \nu) \right] (c\nu_x) + (\gamma - 1) \nu_y c(-u \nu_y + v \nu_x)$
 $= (c\nu_x) \left[-v \nu_y + (2 - \gamma) v \nu_y + (\tilde{u} \bullet \nu) + (\gamma - 1) v \nu_y \right] + 0(\nu_y)^2$
 $= c\nu_x (\tilde{u} \bullet \nu) = \lambda_3 \left(3^{\text{ième}} \text{ composante de } r_3(W^*, \nu) \right)$

- 4^{ième} composante de $A \bullet r_3(W^*, \nu) = \left[H \nu_x - (\gamma - 1) u (\tilde{u} \bullet \nu) \right] (-c\nu_y) +$
 $+ \left[H \nu_y - (\gamma - 1) v (\tilde{u} \bullet \nu) \right] (c\nu_x) + \gamma (\tilde{u} \bullet \nu) c(-u \nu_y + v \nu_x)$
 $= c(\tilde{u} \bullet \nu) \left[(\gamma - 1) (u \nu_y - v \nu_x) + \gamma (\tilde{u} \bullet \tau) \right] = c(\tilde{u} \bullet \nu) (\tilde{u} \bullet \tau)$
 $= \lambda_3 \left(4^{\text{ième}} \text{ composante de } r_3(W^*, \nu) \right) \text{ et } A \bullet r_3(W^*, \nu) = \lambda_3 r_3(W^*, \nu).$

- 1^{ière} composante de $A \bullet r_4(W^*, \nu) = \nu_x (u + c\nu_x) + \nu_y (v + c\nu_y)$
 $= (\tilde{u} \bullet \nu) + c = \lambda_4 \left(1^{\text{ième}} \text{ composante de } r_4(W^*, \nu) \right)$

- 2^{ième} composante de $A \bullet r_4(W^*, \nu) = \left[(\gamma - 1) H \nu_x - c^2 \nu_x - u (\tilde{u} \bullet \nu) \right] +$

$$\begin{aligned}
 & + \left[(2-\gamma) u \nu_x + (\tilde{u} \bullet \nu) \right] (u + c \nu_x) + \left[-(\gamma-1) v \nu_x + u \nu_y \right] (v + c \nu_y) + \\
 & + (\gamma-1) \nu_x (H + (\tilde{u} \bullet \nu) c) \\
 = & 2 u c (\nu_x)^2 + c v \nu_x \nu_y + u c (\nu_y)^2 + (u^2 + c^2) \nu_x + u v \nu_y \\
 = & u c + c \nu_x (\tilde{u} \bullet \nu) + c^2 \nu_x + u (\tilde{u} \bullet \nu) = ((\tilde{u} \bullet \nu) + c) (u + c \nu_x) \\
 = & \lambda_4 (2^{\text{ième}} \text{ composante de } r_4(W^*, \nu))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \circ \quad & 3^{\text{ième}} \text{ composante de } A \bullet r_4(W^*, \nu) = \left[-u v \nu_x + ((\gamma-1) H - v^2 - c^2) \nu_y \right] + \\
 & + (v \nu_x - (\gamma-1) u \nu_y) (u + c \nu_x) + (u \nu_x + (3-\gamma) v \nu_y) (v + c \nu_y) + \\
 & + (\gamma-1) \nu_y (H + u c \nu_x + v c \nu_y) \\
 = & v c (\nu_x)^2 + u c \nu_x \nu_y + 2 v c (\nu_y)^2 + u v \nu_x + (v^2 + c^2) \nu_y \\
 = & v c + c \nu_y (\tilde{u} \bullet \nu) + c^2 \nu_y + v (\tilde{u} \bullet \nu) = ((\tilde{u} \bullet \nu) + c) (v + c \nu_y) \\
 = & \lambda_4 (3^{\text{ième}} \text{ composante de } r_4(W^*, \nu))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \circ \quad & 4^{\text{ième}} \text{ composante de } A \bullet r_4(W^*, \nu) = \left[(\gamma-2) H - c^2 \right] (\tilde{u} \bullet \nu) + \\
 & + \left[H \nu_x - (\gamma-1) u (\tilde{u} \bullet \nu) \right] (u + c \nu_x) + \\
 & + \left[H \nu_y - (\gamma-1) v (\tilde{u} \bullet \nu) \right] (v + c \nu_y) + \\
 & + \gamma (\tilde{u} \bullet \nu) \left[H + (\tilde{u} \bullet \nu) c \right] \\
 = & H (\tilde{u} \bullet \nu) (2\gamma-1) - c^2 (\tilde{u} \bullet \nu) + H c - (\gamma-1) (\tilde{u} \bullet \nu) (u^2 + v^2) + (\tilde{u} \bullet \nu)^2 c \\
 = & H (\tilde{u} \bullet \nu) + H c + c^2 (\tilde{u} \bullet \nu) + c (\tilde{u} \bullet \nu)^2 = ((\tilde{u} \bullet \nu) + c) (H + (\tilde{u} \bullet \nu) c) \\
 = & \lambda_4 (4^{\text{ième}} \text{ composante de } r_4(W^*, \nu))
 \end{aligned}$$

et $A \bullet r_4(W^*, \nu) = \lambda_4 r_4(W^*, \nu)$, ce qui établit finalement la relation (4.95).

• Pour terminer la preuve, il suffit d'expliciter les variables caractéristiques φ_j qui sont les composantes de la différence $W_d - W_g$ sur les vecteurs propres $r_j(W^*, \tilde{\nu})$ de l'état intermédiaire de Roe :

$$(4.109) \quad W_d - W_g = \sum_{j=1}^4 \varphi_j r_j(W^*, \tilde{\nu})$$

- Compte tenu des expressions (4.96) à (4.99) des vecteurs propres, les variables caractéristiques φ_j sont donc solution du système linéaire suivant :

$$(4.110) \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_4 = \rho_d - \rho_g$$

$$(4.111) \quad \begin{cases} (u^* - c^* \tilde{\nu}_x) \varphi_1 + (\tilde{u}^* \bullet \nu) \tilde{\nu}_x \varphi_2 - c^* \tilde{\nu}_y \varphi_3 + (u^* + c^* \tilde{\nu}_x) \varphi_4 = \\ = \rho_d u_d - \rho_g u_g \end{cases}$$

$$(4.112) \quad \begin{cases} (v^* - c^* \tilde{\nu}_y) \varphi_1 + (\tilde{u}^* \bullet \nu) \tilde{\nu}_y \varphi_2 + c^* \tilde{\nu}_x \varphi_3 + (v^* + c^* \tilde{\nu}_y) \varphi_4 = \\ = \rho_d v_d - \rho_g v_g \end{cases}$$

$$(4.113) \quad \begin{cases} (H^* - (\tilde{u}^* \bullet \tilde{\nu}) c^*) \varphi_1 + \frac{1}{2} [(\tilde{u}^* \bullet \tilde{\nu})^2 - (\tilde{u}^* \bullet \tilde{\tau})^2] \varphi_2 + (\tilde{u}^* \bullet \tilde{\tau}) c^* \varphi_3 + \\ + (H^* + (\tilde{u}^* \bullet \tilde{\nu}) c^*) \varphi_4 = \rho_d E_d - \rho_g E_g. \end{cases}$$

On multiplie l'équation (4.111) par $\tilde{\nu}_x$, (4.112) par $\tilde{\nu}_y$ et on additionne ; il vient

$$\left((\tilde{u}^* \bullet \tilde{\nu}) - c^* \right) \varphi_1 + (\tilde{u}^* \bullet \tilde{\nu}) \varphi_2 + \left((\tilde{u}^* \bullet \tilde{\nu}) + c^* \right) \varphi_4 = \rho_d (\tilde{u}_d \bullet \tilde{\nu}) - \rho_g (\tilde{u}_g \bullet \tilde{\nu}) ;$$

on recommence avec $(-u^*)$ en facteur de (4.111) et $(-v^*)$ en facteur de (4.112). Après addition avec (4.113) , on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{(c^*)^2}{\gamma - 1} - \frac{1}{2} \left((u^*)^2 + (v^*)^2 \right) \right) \varphi_1 - \frac{1}{2} \left((u^*)^2 + (v^*)^2 \right) \varphi_2 + \\ + \left(\frac{(c^*)^2}{\gamma - 1} - \frac{1}{2} \left((u^*)^2 + (v^*)^2 \right) \right) \varphi_4 = \\ = \rho_d E_d - \rho_g E_g - \rho_d (u_d u^* + v_d v^*) + \rho_g (u_g u^* + v_g v^*). \end{aligned}$$

Compte tenu de (4.81), (4.82), (4.83) et (4.110), la première relation peut s'écrire

$$(4.114) \quad c^* (\varphi_4 - \varphi_1) = \rho^* \left[(\tilde{u}_d \bullet \tilde{\nu}) - (\tilde{u}_g \bullet \tilde{\nu}) \right]$$

et à l'aide de (4.104), (4.105) et (4.110), la seconde prend la forme plus simple

$$(4.115) \quad (c^*)^2 (\varphi_4 + \varphi_1) = p_d - p_g .$$

On en tire immédiatement une expression des variables caractéristiques sur les deux ondes non-linéaires :

$$(4.116) \quad \varphi_1 = \frac{1}{2(c^*)^2} \left[\left(p_d - \rho^* c^* (\tilde{u}_d \bullet \tilde{\nu}) \right) - \left(p_g - \rho^* c^* (\tilde{u}_g \bullet \tilde{\nu}) \right) \right]$$

$$(4.117) \quad \varphi_4 = \frac{1}{2(c^*)^2} \left[\left(p_d + \rho^* c^* (\tilde{u}_d \bullet \tilde{\nu}) \right) - \left(p_g + \rho^* c^* (\tilde{u}_g \bullet \tilde{\nu}) \right) \right] .$$

- L'expression de φ_2 et φ_3 n'est pas stricto-sensu indispensable à la preuve de la proposition 4.10. Nous achevons tout de même ce calcul. On tire φ_2 de (4.110) et (4.115) :

$$(4.118) \quad \varphi_2 = -\frac{1}{(c^*)^2} \left[(p_d - p_g - (c^*)^2 (\rho_d - \rho_g)) \right]$$

et on reconnaît au membre de droite de (4.118) le saut d'entropie linéarisée entre les deux états W_g et W_d . On exprime enfin la variable φ_3 à partir de (4.111) multipliée par $-(\tilde{\nu}_y)$ et (4.112) multipliée par $(\tilde{\nu}_x)$, compte tenu de (4.115) une nouvelle fois. Il vient

$$(4.119) \quad \varphi_3 = \frac{1}{c^*} \left[\rho_d (\tilde{u}_d \bullet \tilde{\tau}) - \rho_g (\tilde{u}_g \bullet \tilde{\tau}) \right] - \frac{p_d - p_g}{(c^*)^3} (\tilde{u}^* \bullet \tilde{\tau}).$$

La proposition 4.10 est démontrée. \square

Comme l'exprimait Laurent Schwartz dans son *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique* [Sc67] : ouf ! Et il ajoutait : ouf ! ouf !

5) Linéarisation du flux limite de paroi mobile.

• 5.1 • Introduction.

• Rappelons que l'on étudie la résolution numérique des équations d'Euler de la dynamique des gaz dans un domaine Ω variable au cours du temps. Seuls les nœuds $M_{I+1/2, j+1/2}$ (pour j entier positif ou négatif) de la paroi (située à l'indice $I+1/2$) sont mobiles et l'on suppose d'une part que l'élongation $\delta_{j+1/2}^n$ des nœuds au temps $n \Delta t$ est petite devant la dimension caractéristique de la maille et d'autre part que la vitesse

$$(5.1) \quad s_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \left(\delta_{j+1/2}^{n+1} - \delta_{j+1/2}^n \right), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}$$

du nœud $M_{I+1/2, j+1/2}$ est petite devant la célérité du son du fluide proche de la paroi.

• Le flux limite de paroi mobile $(F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ permet de calculer un flux sur la facette mobile à la paroi afin qu'une écriture classique (*c.f.* (3.67)) du bilan de masse, impulsion, énergie prenne en compte la variation (imposée) de la géométrie. L'expression (3.68) qui est exacte peut être approchée au premier ordre par rapport aux deux infiniment petits rappelés ci-dessus.

• 5.2 • Flux linéarisé de paroi mobile.

- Avec des notations que nous allons expliciter dans la suite de ce paragraphe, le flux limite de paroi mobile calculé en (3.68) selon l'expression algébrique

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{aligned} & (F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2} = \\ & = \frac{|K_{I, j}|}{|K_{I, j}^{n+1}|} \left(0, p_{I+1/2, j}^{n+1/2} \nu_j^{n+1/2}, p_{I+1/2, j}^{n+1/2} (s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2}) \right)^t \\ & + \frac{|K_{I, j}|}{\Delta t} \left(1 - \frac{|K_{I, j}^n|}{|K_{I, j}^{n+1}|} \right) W_{I, j}^n + \left(1 - \frac{|K_{I, j}|}{|K_{I, j}^{n+1}|} \right) \Phi_{I-1/2, j}^{n+1/2} \bullet \nu_{I-1/2, j} \\ & + \frac{|K_{I, j}|}{|K_{I, j}^{n+1}|} \left[\Phi \left(W_{I, j+1/2}^{n+1/2}, \frac{1}{2} s_{j+1/2}^{n+1/2} \right) \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \left(s_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right) W_{I, j+1/2}^{n+1/2} \right] - \Phi_{I, j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \\ & - \frac{|K_{I, j}|}{|K_{I, j}^{n+1}|} \left[\Phi \left(W_{I, j-1/2}^{n+1/2}, \frac{1}{2} s_{j-1/2}^{n+1/2} \right) \bullet \nu_{j-1/2}^{n+1/2} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \left(s_{j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j-1/2}^{n+1/2} \right) W_{I, j-1/2}^{n+1/2} \right] + \Phi_{I, j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j-1/2}^{n+1/2} \end{aligned} \right.$$

admet au second ordre de précision le développement limité suivant :

$$(5.3)(\text{début}) \quad \left\{ \begin{aligned} & (F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2} = (0, p_{\star, j}^{n+1/2}(0) \nu_{I+1/2, j}, 0)^t \\ & + (0, \delta p_{\star, j}^{n+1/2} \nu_{I+1/2, j} + p_{\star, j}^{n+1/2}(0) \delta \nu_j^{n+1/2}, 0)^t \\ & + (0, 0, p_{\star, j}^{n+1/2}(0) (s_j^{n+1/2} \bullet \nu_{I+1/2, j}))^t \\ & - \frac{\delta K_{I, j}^n}{|K_{I, j}|} \left[(0, p_{\star, j}^{n+1/2}(0) \nu_{I+1/2, j}, 0)^t - \Phi_{I-1/2, j}^{n+1/2} \bullet \nu_{I+1/2, j} + \right. \\ & \quad \left. + \Phi_{I, j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I, j+1/2} - \Phi_{I, j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I, j-1/2} \right] \end{aligned} \right.$$

$$(5.3)(\text{fin}) \left\{ \begin{array}{l} \dots + \delta \left[\Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right] - \delta \left[\Phi_{I,j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j-1/2}^{n+1/2} \right] \\ + \frac{1}{2} \left[\delta_{I,j}^+ \times s_{j+1/2}^{n+1/2} - \delta_{I,j}^- \times s_{j-1/2}^{n+1/2} \right] W_{I,j}^n \\ - \frac{1}{2} (s_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j+1/2}) V_{I,j+1/2}^{R,n} + \frac{1}{2} (s_{j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j-1/2}) V_{I,j-1/2}^{R,n} \\ + \left[\text{ordre} \geq 2 \text{ par rapport à } \delta_{\bullet}^{n+1/2} \text{ et } s_{\bullet}^{n+1/2} \right]. \end{array} \right.$$

- Il y a dans l'expression précédente des variables **géométriques statiques** comme d'une part le volume $|K_{I,j}|$ de la maille de numéro (I, j) :

$$(5.4) \quad |K_{I,j}| = \frac{1}{2} \delta_{I,j}^+ \times \delta_{I,j}^-$$

où $\delta_{I,j}^\pm$ sont les vecteurs représentés figure 12 et calculés explicitement aux relations (3.16)-(3.17) ou d'autre part les normales (de module égal à la mesure de l'arête afférente) $\nu_{I+1/2,j}$ et $\nu_{I,j+1/2}$ orientées par les lignes de maillage (voir la figure 13) et évaluées algébriquement aux relations (3.12) et (3.14).

- Il importe également de remarquer les variables **fluides statiques** comme la pression paroi de vitesse nulle $p_{*,j}^{n+1/2}(0)$ évaluée par la relation (4.37) dans le cas le plus courant pour le schéma de van Leer, les flux $\Phi_{I-1/2,j}^{n+1/2} \bullet \nu_{I-1/2,j}$, $\Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j+1/2}$ et $\Phi_{I,j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j-1/2}$ sur les trois autres faces du volume $K_{I,j}$ pour lesquels les relations (4.12) et (4.13) donnent le point de départ en vue de leur calcul numérique et l'état $W_{I,j}^n$ dans la maille qui touche la facette frontière.

- Les variables **géométriques dynamiques** sont induites par la variation $\delta_{j+1/2}^n$ des points de la paroi. Rappelons d'abord quelles sont les notations utilisées. Elles partent toutes de la donnée des vecteurs $\delta_{j+1/2}^n$ pour $n \geq 0$ et $j \in \mathbb{Z}$ et uniquement de ces variables. Nous avons ensuite :

$$(5.5) \quad \delta_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\delta_{j+1/2}^n + \delta_{j+1/2}^{n+1}), \quad n \geq 0, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$(5.6) \quad \epsilon_j^{n+1/2} = \delta_{j+1/2}^{n+1/2} - \delta_{j-1/2}^{n+1/2}, \quad n \geq 0, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$(5.7) \quad \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \equiv \nu_{I,j+1/2} + \delta \nu_{j+1/2}^{n+1/2} = \nu_{I,j+1/2} + \left(k \times \delta_{j+1/2}^{n+1/2} \right)$$

$$(5.8) \quad \nu_j^{n+1/2} \equiv \nu_{I+1/2,j} + \delta \nu_j^{n+1/2} = \nu_{I+1/2,j} + \left(\epsilon_j^{n+1/2} \times k \right).$$

$$(5.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta p_{*,j}^{n+1/2} = -\rho_{*,j}^n c_{*,j}^n \left(s_j^{n+1/2} \bullet \tilde{\nu}_{I+1/2,j} \right) + \\ + p_{*,j}^{n+1/2}(0) c_{*,j}^n \frac{\left(3(\gamma-1) M_{\nu_{*,j}}^n + (\gamma+3) \right)}{\left(1 + M_{\nu_{*,j}}^n \right) \left(2 + (\gamma-1) + M_{\nu_{*,j}}^n \right)} \left(\tilde{u}_{*,j}^n \bullet \delta \tilde{\nu}_j^{n+1/2} \right) \\ + (\text{ordre} \geq 2). \end{array} \right.$$

La sensibilité du flux $\delta \left[\Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right]$ dans la variation de la direction normale est donnée par

$$(5.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \left[\Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right] = \\ \delta \left[\Phi^+ (W_{I,j+1/2,-}^n) \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right] + \delta \left[\Phi^- (W_{I,j+1/2,+}^n) \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right], \end{array} \right.$$

où les sensibilités $\delta [\Phi^+ \bullet \nu]$ et $\delta [\Phi^- \bullet \nu]$ sont calculées aux relations (4.60) à (4.64) et (4.72) à (4.76) respectivement.

- Les états de Roe $V_{I,j+1/2}^{R,n}$ ($j \in \mathbb{Z}$) sur les facettes transverses à la paroi s'écrivent simplement

$$(5.16) \quad V_{I,j+1/2}^{R,n} = R \left(W_{I,j+1/2,-}^n, \tilde{\nu}_{I,j+1/2}, W_{I,j+1/2,+}^n \right), \quad j \in \mathbb{Z}$$

et cette fonction (assez classique) est calculée aux relations (4.80) à (4.99) de la proposition 4.10 : on évalue d'abord (à l'aide de racines carrées) une densité, une vitesse et une enthalpie totale intermédiaires entre les deux états de part et d'autre de la facette numéro $(I, j + 1/2)$ avant de calculer les vecteurs propres de la matrice jacobienne associée (c'est la matrice de Roe), lesquels donnent une base naturelle pour résoudre le problème de Riemann linéarisé (relation (4.94)).

• 5.3 • Preuve du développement limité.

- La relation (5.2) met en évidence cinq termes, à savoir

$$(5.17) \quad f^1 = \frac{|K_{I,j}|}{|K_{I,j}^{n+1}|} \left(0, p_{I+1/2,j}^{n+1/2} \nu_j^{n+1/2}, p_{I+1/2,j}^{n+1/2} \left(s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2} \right) \right)^t$$

$$(5.18) \quad f^2 = \frac{|K_{I,j}|}{\Delta t} \left(1 - \frac{|K_{I,j}^n|}{|K_{I,j}^{n+1}|} \right) W_{I,j}^n$$

$$(5.19) \quad f^3 = \left(1 - \frac{|K_{I,j}|}{|K_{I,j}^{n+1}|}\right) \Phi_{I-1/2,j}^{n+1/2} \bullet \nu_{I-1/2,j}$$

$$(5.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} f^4 = \frac{|K_{I,j}|}{|K_{I,j}^{n+1}|} \left[\Phi \left(W_{I,j+1/2}^{n+1/2}, \frac{1}{2} s_{j+1/2}^{n+1/2} \right) \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(s_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right) W_{I,j+1/2}^{n+1/2} \right] - \Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j+1/2} \end{array} \right.$$

$$(5.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} f^5 = -\frac{|K_{I,j}|}{|K_{I,j}^{n+1}|} \left[\Phi \left(W_{I,j+1/2}^{n+1/2}, \frac{1}{2} s_{j+1/2}^{n+1/2} \right) \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(s_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right) W_{I,j+1/2}^{n+1/2} \right] + \Phi_{I,j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j-1/2} \end{array} \right.$$

et l'on a

$$(5.22) \quad (F \bullet \nu)_{I+1/2,j}^{n+1/2} = \sum_{k=1}^5 f^k.$$

Dans la suite de ce paragraphe, nous nous concentrons successivement sur ces divers termes.

• Nous remarquons qu'au sein de la composante "énergie" (la troisième en partant de la gauche) du vecteur f^1 , le facteur $(s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2})$ est un infiniment petit d'ordre supérieur ou égal à 1 à cause du terme $s_j^{n+1/2}$; ceci permet de ne considérer les autres facteurs qu'à l'ordre zéro de précision (puisqu'on cherche un résultat à l'ordre au plus 2). On en déduit :

$$(5.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{|K_{I,j}|}{|K_{I,j}^{n+1}|} p_{I+1/2,j}^{n+1/2} (s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2}) = \\ = p_{\star,j}^{n+1/2}(0) (s_j^{n+1/2} \bullet \nu_{I+1/2,j}) + (\text{ordre} \geq 2) \end{array} \right.$$

et nous venons de mettre en évidence le troisième terme de la relation (5.3). Nous avons par ailleurs :

$$\begin{aligned} & \frac{|K_{I,j}|}{|K_{I,j}^{n+1}|} p_{I+1/2,j}^{n+1/2} \nu_j^{n+1/2} = \\ & = \left(1 - \frac{\delta K_{I,j}}{|K_{I,j}|}\right) \left(p_{\star,j}^{n+1/2}(0) + \delta p_{\star,j}^{n+1/2}\right) \left(\nu_{I+1/2,j} + \epsilon_j^{n+1/2} \times k\right) + (\text{ordre} \geq 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= p_{*,j}^{n+1/2}(0) \nu_{I+1/2,j} + \delta p_{*,j}^{n+1/2} \nu_{I+1/2,j} + p_{*,j}^{n+1/2}(0) \delta \nu_j^{n+1/2} \\
 &\quad - \frac{\delta K_{I,j}}{|K_{I,j}|} p_{*,j}^{n+1/2}(0) \nu_{I+1/2,j} + (\text{ordre} \geq 2)
 \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$(5.24) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{|K_{I,j}|}{|K_{I,j}^{n+1}|} \left(0, p_{I+1/2,j}^{n+1/2} \nu_j^{n+1/2}, 0 \right)^t = \left(0, p_{*,j}^{n+1/2}(0) \nu_{I+1/2,j}, 0 \right)^t \\ &+ \left(0, \delta p_{*,j}^{n+1/2}(0) \nu_{I+1/2,j} + p_{*,j}^{n+1/2}(0) \delta \nu_j^{n+1/2}, 0 \right)^t \\ &- \frac{\delta K_{I,j}^n}{|K_{I,j}|} \left(0, p_{*,j}^{n+1/2}(0) \nu_{I+1/2,j}, 0 \right)^t + (\text{ordre} \geq 2). \end{aligned} \right.$$

Les trois premiers termes du membre de droite de la relation (5.24) sont identiques aux deux premiers termes de la relation (5.3). Le quatrième terme (en $\delta K/|K|$) se retrouve comme le premier des quatre sous-termes du quatrième terme du second membre de la relation (5.3).

- Le second terme f^2 s'explique très simplement compte tenu de la relation (5.11). On le retrouve comme sixième terme de (5.3). Pour l'étude du troisième terme (relation (5.19)), on remarque une nouvelle fois que la présence en facteur d'un infiniment petit simplifie le calcul. On trouve :

$$(5.25) \quad f^3 = \frac{\delta K_{I,j}^n}{|K_{I,j}|} \Phi_{I-1/2,j}^{n+1/2} \bullet \nu_{I-1/2,j} + (\text{ordre} \geq 2)$$

et cette expression constitue le second sous-terme du quatrième terme du second membre de la relation (5.3).

- L'étude du terme transversal a été commencée à la relation (4.54) et nous la réexplicitons :

$$(5.26) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Phi \left(W_{I,j+1/2}^{n+1/2}, \frac{1}{2} s_{j+1/2}^{n+1/2} \right) \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} = \Phi \left(W_{I,j+1/2}^{n+1/2} \right) \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(s_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j+1/2} \right) V_{I,j+1/2}^{R,n} + (\text{ordre} \geq 2) \end{aligned} \right.$$

et l'insertion de cette dernière relation au sein de l'expression (5.20) conduit au calcul suivant :

$$f^4 = \left(1 - \frac{\delta K_{I,j}^n}{|K_{I,j}|} \right) \Phi \left(W_{I,j+1/2}^{n+1/2} \right) \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} + \delta \left[\Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \left(s_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j+1/2} \right) V_{I,j+1/2}^{R,n} - \Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j+1/2} + (\text{ordre} \geq 2) \\
 (5.27) \quad & \left\{ \begin{aligned} f^4 &= -\frac{\delta K_{I,j}^n}{|K_{I,j}|} \Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j+1/2} + \delta \left[\Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right] \\ & -\frac{1}{2} \left(s_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j+1/2} \right) V_{I,j+1/2}^{R,n} + (\text{ordre} \geq 2). \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite de (5.27) se retrouve comme troisième sous-terme du quatrième terme du membre de droite de la relation (5.3). Le second terme de (5.27) est égal au premier terme de la cinquième ligne de (5.3) et le troisième de (5.27) (avec l'état de Roe $V_{I,j+1/2}^{R,n}$) constitue le premier de la septième ligne du développement (5.3).

- Le développement de f^5 est analogue à f^4 , au changement de signe et à la modification de $(j+1/2)$ en $(j-1/2)$ près. Il permet de clore le quatrième terme de (5.3) ainsi que la fin des cinquièmes et septièmes lignes. La relation (5.3) est bien identique à (5.2), au second ordre de précision près, ce qui achève la démonstration de la propriété. \square

• 5.4 • Une autre linéarisation de la pression paroi.

- On pourra trouver que l'expression (5.14) qui permet d'évaluer l'incrément de pression à la paroi est trop compliquée algébriquement et de toute façon limitée à l'emploi du flux de van Leer pour résoudre le schéma fluide. Nous proposons ici une autre expression approchée qui n'est pas obtenue par linéarisation rigoureuse du flux numérique mais par une analyse du problème de Riemann, ainsi que menée aux relations (2.39) et (2.40) de la proposition 2.2.

- Rappelons que, si l'on utilise le schéma de Godunov, la pression $p_{I+1/2,j}^{n+1/2}$ de la relation (5.2) est l'état situé sur la 1-onde issue de l'état $W_{I+1/2,j}^n$ et de vitesse normale égale à

$$(5.28) \quad \sigma_j^{n+1/2} = s_j^{n+1/2} \bullet \tilde{\nu}_j^{n+1/2}.$$

On pose donc

$$(5.29) \quad w_{*,j}^n = \tilde{u}_{*,j}^n \bullet \tilde{\nu}_j^{n+1/2}$$

et séparant le cas d'une détente ($\sigma_j^{n+1/2} - w_{*,j}^n \geq 0$) de celui d'un choc ($\sigma_j^{n+1/2} - w_{*,j}^n \leq 0$), les relations (2.39) et (2.40) dans notre contexte bidimensionnel expriment que la pression $p_{I+1/2,j}^{n+1/2}$ est solution de l'une des deux équations suivantes

$$(5.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_j^{n+1/2} - w_{*,j}^n + \frac{2}{\gamma-1} c_*^n \left[\left(\frac{p_{I+1/2,j}^{n+1/2}}{p_*^n} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] = 0 \\ \text{si } \sigma_j^{n+1/2} - w_{*,j}^n \geq 0 \end{array} \right.$$

$$(5.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_j^{n+1/2} - w_{*,j}^n + \frac{\sqrt{2} (p_{I+1/2,j}^{n+1/2} - p_*^n)}{\sqrt{\rho_*^n ((\gamma+1) p_{I+1/2,j}^{n+1/2} + (\gamma-1) p_*^n)}} \\ \text{si } \sigma_j^{n+1/2} - w_{*,j}^n \leq 0. \end{array} \right.$$

- Nous résolvons le système (5.30)-(5.31) de façon approchée grâce au raisonnement suivant : lorsque $s_j^{n+1/2} = 0$ et $\nu_j^{n+1/2} = \nu_{I+1/2,j}$, la solution est celle du schéma numérique associé à une vitesse nulle pour la paroi, c'est à dire $p_{*,j}^{n+1/2}(0)$. Cette pression paroi est, par hypothèse de travail, supposée correctement calculée grâce au flux de van Leer (relation (4.37)). Lorsque la paroi est mobile, le mouvement reste modéré et l'écart de pression $\delta p_{*,j}^{n+1/2}$ est obtenu en linéarisant l'une des deux relations (5.30) ou (5.31). Comme ces deux courbes de choc et de détente ont mêmes éléments de contact au second ordre inclus [CF48], il vient

$$(5.32) \quad \delta(\sigma_j^{n+1/2} - w_{*,j}^n) + \frac{1}{\rho_*^n c_*^n} \delta p_{*,j}^{n+1/2} = 0$$

compte tenu des relations classiques entre densité, pression et vitesse du son de l'état extrapolé à la paroi. On déduit de (5.28), (5.29) et (5.32) :

$$(5.33) \quad \delta p_{*,j}^{n+1/2} = -\rho_*^n c_*^n \left(s_j^{n+1/2} \cdot \tilde{\nu}_{I+1/2,j} \right) + \rho_*^n c_*^n \left(\tilde{u}_{*,j}^n \cdot \delta \tilde{\nu}_j^{n+1/2} \right).$$

Cette relation permet un autre calcul de l'écart de pression à la paroi et ne diffère de la relation (5.14) que par le coefficient de $\tilde{u}_{*,j}^n \cdot \delta \tilde{\nu}_j^{n+1/2}$.

• 5.5 • De une à deux dimensions.

- La comparaison des relations (5.3) (cas bidimensionnel) et (2.60) (cas monodimensionnel) montre l'extension de la structure quand on change de dimension. Le premier terme correspond toujours au flux limite de paroi fixe, c'est à dire au flux initial et il convient d'y rajouter le flux d'énergie correspondant induit par le travail de cette pression lors du mouvement de la paroi. Le

terme $-s^{n+1/2} (0, \rho_{\star}^n c_{\star}^n, 0)^t$ de la relation (2.60) donne naissance au second terme de la relation (5.3) qui est une simple linéarisation du flux d'impulsion $\delta(p_{\star,j}^{n+1/2} \nu_j^{n+1/2})$; notons que cette variation comporte deux termes dont un $(\delta \nu_j^{n+1/2})$ est bien entendu invisible à une dimension d'espace alors que le second (relations (5.14), (5.15) et (5.33)) doit prendre en compte la variation de la normale pour une évaluation correcte dans le cas bidimensionnel.

- Le terme $s^{n+1/2} W_I^n$ donne naissance aux trois dernières lignes du développement (5.3), avec un couplage géométrie-cinématique non trivial pour le terme en W_I^n et la nécessité d'évaluer correctement un état intermédiaire sur les facettes $\Sigma_{I,j+1/2}$ ($j \in \mathbb{Z}$) transversales à la paroi.

- Enfin, le dernier terme de (2.60) et le quatrième de (5.3) représentent tous deux la variation

$$(5.34) \quad \delta W_{I,j}^* = \delta K_{I,j}^n \frac{W_{I,j}^* - W_{I,j}^n}{\Delta t}$$

où $W_{I,j}^*$ est l'état qu'on obtiendrait dans la maille $K_{I,j}$ en utilisant une paroi fixe. En effet, ces deux termes forment un bilan de flux qu'il est facile ensuite d'interpréter ensuite comme une dérivée temporelle.

• 5.6 • Lien avec la condition de transpiration classique.

- L'approche discrète que nous avons suivie est différente de celle, continue, suivie par d'autres auteurs de la communauté (voir par exemple Mortchélévicz [Mo89] ou Piperno [Pi95]). La proposition qui suit fait le lien entre ce travail et l'expression du flux utilisé comme condition de transpiration dans les travaux antérieurs à l'Aérospatiale [RC96].

Proposition 5.1 **Simplification extrême.**

Si, dans la relation (5.3) qui permet le calcul du flux limite de paroi mobile au premier ordre de précision, on fait les hypothèses suivantes :

$$(5.35) \quad \delta p_{\star,j}^{n+1/2} = 0$$

$$(5.36) \quad \delta K_{I,j}^n = 0$$

$$(5.37) \quad W_{I,j}^n = V_{I,j+1/2}^{R,n} = V_{I,j-1/2}^{R,n} \equiv W^*$$

$$(5.38) \quad s_{j+1/2}^{n+1/2} = s_{j-1/2}^{n+1/2} \equiv s$$

$$(5.39) \quad p_{*,j}^{n+1/2} = p(W^*) \equiv p^*$$

$$(5.40) \quad \tilde{u}_{*,j}^n = \tilde{u}(W^*) \equiv \tilde{u}^*$$

alors l'expression (5.3) du flux limite de paroi mobile $(F \bullet \nu)_{I+1/2,j}^{n+1/2}$ se calcule par les relations algébriques suivantes :

$$(5.41) \quad \delta \left[\Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right] = \Phi(W^*) \bullet \delta \nu_{j+1/2}^{n+1/2}$$

$$(5.42) \quad \delta \left[\Phi_{I,j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j-1/2}^{n+1/2} \right] = \Phi(W^*) \bullet \delta \nu_{j-1/2}^{n+1/2}$$

$$(5.43) \quad q_j^{n+1/2} = s \bullet \nu_{I+1/2,j} - \tilde{u}^* \bullet \delta \nu_j^{n+1/2}$$

$$(5.44) \quad (F \bullet \nu)_{I+1/2,j}^{n+1/2} = q_j^{n+1/2} W^* + p^* (0, \nu_{I+1/2,j}, q_j^{n+1/2})^t + \text{ordre} \geq 2.$$

L'expression (5.44) est, au second ordre près, analogue à l'expression algébrique utilisée dans [RC96], à savoir

$$(5.45) \quad q(t) = s \bullet \nu_j^{n+1/2} - \tilde{u}^* \bullet \delta \nu_j^{n+1/2}$$

$$(5.46) \quad (\Phi \bullet \nu)_{I+1/2,j}^{n+1/2} = q(t) W^* + p^* (0, \nu_{I+1/2,j}, q(t))^t.$$

Preuve de la proposition 5.1.

• On évalue d'abord avec soin le coefficient λ qui figure explicitement devant l'état W^* par regroupement des trois derniers termes de la relation (5.3). On a :

$$\begin{aligned} \lambda &\equiv \frac{1}{2} \left[\delta_{I,j}^+ \times s - \delta_{I,j}^- \times s \right] - \frac{1}{2} s \bullet \nu_{I,j+1/2} + \frac{1}{2} s \bullet \nu_{I,j-1/2} \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{I,j}^+ - \delta_{I,j}^-)_x s_y - \frac{1}{2} (\delta_{I,j}^+ - \delta_{I,j}^-)_y s_x + \frac{1}{2} s \bullet (\nu_{I,j-1/2} - \nu_{I,j+1/2}) \\ &= \frac{1}{2} s_x \left(y_{I+1/2,j+1/2} - y_{I-1/2,j-1/2} - y_{I+1/2,j-1/2} + y_{I-1/2,j+1/2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} s_y \left(x_{I+1/2,j-1/2} - x_{I-1/2,j+1/2} - y_{I+1/2,j+1/2} + y_{I-1/2,j+1/2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} s \bullet (\nu_{I,j-1/2} - \nu_{I,j+1/2}) \\ &\quad \text{compte tenu des expressions (3.16) et (3.17) de } \delta_{I,j}^+ \text{ et } \delta_{I,j}^- \\ &= \frac{1}{2} s \bullet (\nu_{I+1/2,j} + \nu_{I-1/2,j} + \nu_{I,j-1/2} - \nu_{I,j+1/2}) \end{aligned}$$

compte tenu de la relation (3.12)

$$(5.47) \quad \lambda = s \bullet \nu_{I+1/2, j}$$

car l'intégrale sur le contour de $K_{I, j}$ de la normale extérieure est nulle et s'exprime par

$$(5.48) \quad \nu_{I+1/2, j} - \nu_{I-1/2, j} + \nu_{I, j+1/2} - \nu_{I, j-1/2} = 0.$$

• Quand on prend une variation finie de ces normales associée aux hypothèses géométriques de flux limite de paroi mobile (les nœuds $M_{I-1/2, j+1/2}$ ($j \in \mathbb{Z}$) ne bougent pas), il vient

$$(5.49) \quad \delta \nu_j^{n+1/2} + \delta \nu_{j+1/2}^{n+1/2} - \delta \nu_{j-1/2}^{n+1/2} = 0.$$

Compte tenu de l'hypothèse (5.41)(5.42), nous en déduisons

$$\begin{aligned} \delta \left[\Phi_{I, j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right] - \delta \left[\Phi_{I, j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j-1/2}^{n+1/2} \right] &= \Phi(W^*) \bullet \left(\delta \nu_{j+1/2}^{n+1/2} - \delta \nu_{j-1/2}^{n+1/2} \right) \\ &= -\Phi(W^*) \bullet \delta \nu_j^{n+1/2} \quad \text{au vu de (5.49)} \\ &= -\left(\tilde{u}^* \bullet \delta \nu_j^{n+1/2} \right) W^* + p^* \left(0, -\delta \nu_j^{n+1/2}, -(\tilde{u}^* \bullet \delta \nu_j^{n+1/2}) \right)^t. \end{aligned}$$

On reporte cette dernière expression, jointe à la relation (5.47), au sein de (5.3). Il vient, compte tenu des hypothèses (5.35) à (5.40) :

$$\begin{aligned} (F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2} &= \left(0, p^* \left(\nu_{I+1/2, j} + \delta \nu_j^{n+1/2} \right), p^* \left(s \bullet \nu_{I+1/2, j} \right) \right)^t \\ &\quad - \left(\tilde{u}^* \bullet \delta \nu_j^{n+1/2} \right) W^* - p^* \left(0, \delta \nu_j^{n+1/2}, \tilde{u}^* \bullet \delta \nu_j^{n+1/2} \right)^t \\ &\quad + s \bullet \nu_{I+1/2, j} W^* + (\text{ordre} \geq 2) \\ &= q_j^{n+1/2} W^* + p^* \left(0, \nu_{I+1/2, j}, q_j^{n+1/2} \right)^t + (\text{ordre} \geq 2). \end{aligned}$$

ce qui montre la relation (5.44). La seule différence entre les expressions (5.43) (5.44) et (5.45)(5.46) tient à l'unique point suivant :

$$(5.50) \quad q(t) - q_j^{n+1/2} = s \bullet \delta \nu_j^{n+1/2}$$

lequel est un infiniment petit du second ordre compte tenu des hypothèses faites pour établir la relation (5.3). La proposition en résulte. \square

6) Conclusion.

- Nous avons montré que si un fluide considéré comme non visqueux est limité par une structure lentement variable et qui se déplace d'une faible amplitude dans l'espace, il est possible au premier ordre de remplacer une modélisation géométrique de ce mouvement par un flux limite de paroi mobile sur les facettes qui relient le fluide et la structure. L'évaluation numérique du flux limite de paroi mobile demande, dans le cas où l'on utilise la méthode Muscl de van Leer avec le choix fait aux Mureaux d'un maillage structuré, une évaluation précise de la normale au cours du temps, une mise en mémoire de l'état extrapolé à la paroi, une évaluation de la dérivée de la pression paroi, la maîtrise de la dérivée du flux de van Leer par rapport aux états fluides et une résolution approchée de la discontinuité sur les facettes transversales avec un schéma de Roe. Il s'agit de calculs de mise en œuvre délicate mais qui ne doivent entraîner qu'un surcoût modique à l'exploitation.

- La suite naturelle de ce travail pourrait être la suivante : **(i)** mise en œuvre du flux linéarisé de paroi mobile dans une maquette logicielle jointe à une extension tridimensionnelle des développements algébriques formels contenus dans ce mémoire, **(ii)** validation par rapport à l'expérience industrielle, **(iii)** insertion du module ainsi développé au sein d'un logiciel tridimensionnel opérationnel. De façon plus générale, ce travail s'insère dans une réflexion globale sur le couplage aéroélastique et le besoin opérationnel de disposer pour les études systèmes d'un logiciel de simulation couplant aérodynamique et élastodynamique.