Décomposition de flux et discontinuité de contact stationnaire

**François DUBOIS**

Applications Scientifiques du Calcul Intensif, bâtiment 506, BP 167, F-91403 Orsay Cedex, Conservatoire National des Arts et Métiers, 15 rue Marat, F-78 210 Saint Cyr l'Ecole. (5 janvier 2000) □

**Résumé.** Pour approcher de façon précise et stable une couche limite avec un schéma de volumes finis, l'analyse numérique du problème de la discontinuité de contact stationnaire montre qu'une décomposixtion de flux génère en général une viscosité numérique proportionnelle à la différence de densité alors qu'il n'en est rien avec une résolution approchée du problème de Riemann.

**Flux vector splitting and stationary contact discontinuity**

**Abstract.** In order to capture in a stable and accurate way a boundary layer with an upwind finite volume scheme, the numerical analysis of stationary contact discontinuity problem shows that under natural symmetry hypotheses, a flux splitting generates a numerical viscosity proportional to the difference of densities whereas the numerical viscosity is null for a flux difference splitting approximating all the waves of the Riemann problem.

## 1. Introduction.

Nous étudions les équations d'Euler de la dynamique des gaz à une dimension d'espace. Elles prennent la forme d'un système de lois de conservation liant l'état $W$ et le flux $f(W)$ : $\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) = 0$. L'état $W = W(t,x) \in \mathbb{R}^3$ représente une densité volumique de masse, d'impulsion et d'énergie : $W = \big(\rho\,,\, \rho u\,,\, \rho E \equiv \rho e + \frac{1}{2}\rho u^2\big)$. Le flux $f(W) \in \mathbb{R}^3$ a une expression algébrique qui utilise la pression, laquelle est pour un gaz parfait polytropique une fonction de la densité $\rho$ $(\rho{>}0)$ et de l'énergie interne $e$ $(e{>}0)$ paramétrée

□ C.R. Acad. Sci. Paris, Série 1, Analyse Numérique / *Numerical Analysis*, volume 330, numéro 9, p. 847-850, mai 2000. Note présentée par Olivier Pironneau. Edition du 11 septembre 2005.

par le rapport $\gamma>1$ des chaleurs spécifiques du gaz : $p = (\gamma-1)\,\rho e$. On a l'expression classique :

(1) $\qquad f(W) = \big(\rho u\,,\, \rho u^2 + p\,,\, \rho u E + p u\big)\,.$

Pour approcher numériquement les solutions du système d'équations de la dynamique des gaz, on introduit la méthode des volumes finis ; l'espace est discrétisé par une grille $j\,\Delta x$ $(j \in \mathbb{Z})$ et le temps par des multiples entiers $n\,\Delta t$ $(n \in \mathbb{N})$ du pas de temps $\Delta t$. On cherche une valeur approchée $W_j^n$ du champ $W(\bullet,\bullet)$ au point $j\,\Delta x$ et au temps $n\,\Delta t$ grâce à la famille de flux numériques $f_{j+1/2}^{n+1/2}\,(j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$ : $\frac{1}{\Delta t}\big(W_j^{n+1} - W_j^n\big) + \frac{1}{\Delta x}\big(f_{j+1/2}^{n+1/2} - f_{j-1/2}^{n+1/2}\big) = 0$ (voir par exemple Harten, Lax et Van Leer [7]). On se borne dans cette note à un flux explicite à deux points du premier ordre en espace et en temps, c'est à dire de la forme $f_{j+1/2}^{n+1/2} = \Phi(W_j^n, W_{j+1}^n)\,.$

Nous distinguons deux types de flux à deux points explicites : d'une part les "solveurs" exacts ou approchés du problème de Riemann (décomposition de discontinuité, ou "flux difference splitting") entre les états $W_j^n$ et $W_{j+1}^n$ (voir par exemple Godlewski-Raviart [5] pour l'ensemble du contexte mathématique et numérique), avec les flux de Godunov [4], Osher [8] et Roe [10] et d'autre part les décompositions de flux ou schémas de "flux vector splitting". Une décomposition de flux, avec Sanders-Prendergast [11], Van Leer [12], Bourdel et al [1] ou Perthame [9], suppose qu'on a pu écrire le flux $\mathbb{R}^3 \ni W \longmapsto f(W) \in \mathbb{R}^3$ explicité en (1) sous la forme

(2) $\qquad f(W) \equiv f^+(W) + f^-(W)$

avec diverses contraintes sur les fonctions $f^+(\bullet)$ et $f^-(\bullet)$ détaillées par exemple dans [5]. Rappelons que si le nombre de Mach $M \equiv u/c$, $c = \sqrt{\gamma\,p/\rho}$, est plus petit que 1 en valeur absolue, le flux de Van Leer est défini par la relation

$$f^{\pm}(W) = \pm\,\rho c\Big(\frac{M \pm 1}{2}\Big)^2 \Big(1\,,\, \frac{(\gamma-1)u \pm 2c}{\gamma}\,,\, \frac{\big((\gamma-1)u \pm 2c\big)^2}{2(\gamma^2-1)}\Big).$$

Pour un schéma de Boltzmann, on introduit une fonction positive $\chi(\bullet)$ qui permet à la fois de décomposer l'état $W$ sous la forme

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi\Big(\frac{\mid v-u \mid}{\sqrt{e}}\Big)\,\big(1\,,\, v\,,\, \frac{1}{2} \mid v \mid^2\big)\,\mathrm{d}v$$

et le flux $f(W)$ à l'aide de la relation

$$f(W) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi\Big(\frac{\mid v-u \mid}{\sqrt{e}}\Big)\,\Big(v\,,\, \mid v \mid^2\,,\, \frac{v}{2} \mid v \mid^2\Big)\,\mathrm{d}v.$$

Le flux $f^+(\bullet)$ représente l'action de toutes les particules allant de la gauche vers la droite et le flux $f^-(\bullet)$ celle des particules allant de la droite vers la gauche ; on pose ensuite

$$f^{\pm}(W) \,=\, \pm \int_0^{\pm\infty} \chi\Big(\frac{\mid v-u \mid}{\sqrt{e}}\Big) \Big(v\,,\, \mid v \mid^2 ,\, \frac{v}{2} \mid v \mid^2 \Big) \,\mathrm{d}v.$$

On donne enfin au flux numérique l'expression suivante

$$(3) \qquad \Phi(W_g, W_d) \,=\, f^+(W_g) \,+\, f^-(W_d)\,.$$

Dans leur article [13], Van Leer et al comparent pour un même problème d'aérodynamique supersonique stationnaire la décomposition de flux de Van Leer [12] et le schéma de Roe [10] qui linéarise le problème de Riemann. Ils montrent qu'une prédiction correcte du coefficient de frottement et du flux de chaleur à la paroi avec une grille relativement grossière est possible avec le flux de Roe alors qu'il n'en est rien si on utilise le flux de Van Leer pour discrétiser la partie convective du fluide. Leur conclusion conduit donc à rejeter la décomposition de flux si on cherche à obtenir plus d'informations que le simple champ de pression pariétale.

En fait, le problème se pose dans la couche limite. Le long d'une direction $x$ normale à la paroi, la vitesse (normale) $u$ est très faible. Il est donc naturel d'étudier le comportement d'une décomposition de flux (3) pour une discontinuité de contact stationnaire, c'est à dire une couche limite d'épaisseur infinitésimale. C'est un problème de Riemann particulier où les états donnés $W_g$ et $W_d$ définissent d'une part un champ de vitesse identiquement nul composé de $u_g \,=\, 0$ pour $x<0$ et de $u_d \,=\, 0$ pour $x>0$ et d'autre part d'un champ de pression noté respectivement $p_g$ pour $x<0$ et $p_d$ pour $x>0$ qui ne présente pas de discontinuité : $p_g \,=\, p_d \,=\, p$.

La solution d'une telle discontinuité de contact stationnaire ne dépend pas du temps : le saut de densité se maintient sur l'interface $x \,=\, 0$ au cours du temps (voir par exemple [5]) et seul l'ajout d'un flux visqueux ou de perturbations géométriques comme dans l'instabilité de Kelvin-Helmholtz pilote la dynamique de l'interface, ce qui est crucial pour une capture correcte des couches limites et des instabilités de cisaillement.

Dans un travail indépendant, Gressier et al [6] montrent que sous une hypothèse supplémentaire de stabilité (flux positivement conservatif au sens de [6]), aucune décomposition de flux satisfaisant l'invariance gauche-droite ne laisse invariante une discontinuité de contact. Dans cette note, nous montrons que de façon générale si une décomposition de flux vérifie des conditions très naturelles dont l'invariance "gauche-droite", alors le schéma obtenu pour la dynamique des gaz dans le cas de l'approximation d'une discontinuité de contact stationnaire contient en son sein une viscosité numérique essentiellement proportionnelle au saut de densité, donc d'ordre zéro par rapport au pas du maillage.

## 2. Invariance gauche-droite.

Considérons la transformation $\sigma$ de l'état $W$ obtenue en échangeant le signe de sa vitesse :

(4) $$\sigma\,\big(\rho\,,\,\rho\,u\,,\,\rho\,E\big) \,=\, \big(\rho\,,\,-\rho\,u\,,\,\rho\,E\big)\,.$$

Compte tenu de la forme algébrique particulière (2) des équations de la dynamique des gaz, on observe que

(5) $$f(\sigma W) \,+\, \sigma f(W) \,=\, 0\,;$$

quand on change le signe de la vitesse, on change le signe des flux de masse et d'énergie, mais on ne change pas celui du flux d'impulsion.

Changer le signe de la vitesse revient à changer le sens de la direction $x$, il est donc commode d'introduire la "normale" $n$ à cette direction $(n \in \{-1, 1\})$ et de poser $\sigma n = -n$. L'extension naturelle de cette propriété d'invariance gauche-droite au flux numérique consiste à dire que si l'on change à la fois les états gauche et droite, le signe de leur vitesse et la direction normale, on ne change que le signe du flux d'impulsion dans la direction normale, avec une relation analogue à (5). On introduit donc l'expression du flux numérique dans la direction normale :

(6) $$\Psi(W_g,\, n,\, W_d) \,=\, \begin{cases} \Phi(W_g,\, W_d) & \text{si } n = +1 \\ -\Phi(W_g,\, W_d) & \text{si } n = -1\,. \end{cases}$$

Définition 1. **Invariance gauche-droite.**
Le flux numérique $(W_g,\, W_d) \longmapsto \Phi(W_g,\, W_d)$ vérifie l'invariance gauche-droite si la fonction $\Psi(\bullet, \bullet, \bullet)$ définie en (6) et l'opérateur $\sigma$ défini par (4) et $\sigma n \,=\, -n$ satisfont la condition $\Psi(\sigma W_d,\, \sigma n,\, \sigma W_g) - \sigma \Psi(W_g,\, n,\, W_d) \,=\, 0.$

Proposition 1. **Invariance gauche-droite d'une décomposition de flux.**
Une décomposition de flux (2) conduit à un flux numérique (3) qui vérifie l'invariance gauche-droite si et seulement si l'on a $f^+(\sigma W) + \sigma f^-(W) \,=\, 0$ pour tout état $W$.

Proposition 2. **Décomposition de flux classiques.**
Le flux de Van Leer, le flux de Sanders Prendergast et les schémas de Boltzmann vérifient l'invariance gauche-droite.

## 3. Viscosité numérique sur un contact stationnaire.

Définition 2. **Viscosité numérique.**

Etant donné un schéma à deux points de type $f_{j+1/2}^{n+1/2} = \Phi(W_j^n, W_{j+1}^n)$, la viscosité numérique $V(W_g, W_d)$ entre les états $W_g$ et $W_d$ est définie par la relation $\Phi(W_g, W_d) \equiv \frac{1}{2}\big(f(W_g) + f(W_d)\big) - \frac{1}{2}V(W_g, Wd)$.

Proposition 3. **Viscosité numérique d'une décomposition de flux.**

Soit un schéma de décomposition de flux $\Phi(\bullet, \bullet)$ de la forme (3). Alors la viscosité numérique $V(W_g, W_d)$ satisfait à

$$V(W_g, W_d) = \big(f^+(W_d) - f^-(W_d)\big) - \big(f^+(W_g) - f^-(W_g)\big)\,.$$

Proposition 4. **Discontinuité de contact stationnaire.**

Si la décomposition de flux $\Phi(\bullet, \bullet)$ définie en (2)-(3) vérifie la propriété d'invariance gauche-droite, il existe deux fonctions $]0, +\infty[^2 \ni (\rho, p) \longmapsto \mu(\rho, p) \in \mathbb{R}$ et $]0, +\infty[^2 \ni (\rho, p) \longmapsto \epsilon(\rho, p) \in \mathbb{R}$ de sorte que pour tout état $W$ de vitesse nulle $(\sigma W = W)$, on a $f^{\pm}(W) = \frac{1}{2}\big(\pm\mu(\rho, p)\,,\, p\,,\, \pm\epsilon(\rho, p)\big)$. De plus, pour une discontinuité de contact stationnaire, la viscosité numérique $V(W_g, W_d)$ a pour expression

$$V(W_g, W_d) = \big(\mu(\rho_d, p) - \mu(\rho_g, p)\,,\, 0\,,\, \epsilon(\rho_d, p) - \epsilon(\rho_g, p)\big).$$

Dans le cas de la décomposition de flux de Van Leer, on montre facilement [3] les relations algébriques

$$\mu^{VL}(\rho, p) = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma \rho p}\,, \quad \epsilon^{VL}(\rho, p) = \frac{\gamma\sqrt{\gamma}}{\gamma^2 - 1}\,\frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{\rho}}$$

et pour un flux de Boltzmann, on a :

$$\mu^B(\rho, p) = 2\int_0^{+\infty} \chi\Big(\frac{|\,v\,|}{\sqrt{e}}\Big)\, v \, \mathrm{d}v\,, \;\; \epsilon^B(\rho, p) = \int_0^{+\infty} \chi\Big(\frac{|\,v\,|}{\sqrt{e}}\Big)\, v^3 \, \mathrm{d}v\,.$$

Proposition 5. **Viscosité numérique résiduelle.**

Si l'une des fonctions $\mu(\bullet, \bullet)$ et $\epsilon(\bullet, \bullet)$ dépend explicitement de la densité, c'est à dire si $\frac{\partial \mu}{\partial \rho}(\rho, p) \neq 0$ ou $\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho}(\rho, p) \neq 0$, alors la viscosité numérique d'un schéma de flux splitting est non nulle pour une discontinuité de contact stationnaire, quel que soit le pas du maillage.

Proposition 6. **Résolution du problème de Riemann.**

Soit $\Phi(\bullet, \bullet)$ l'un des trois "solveurs" exact de Godunov [4] ou approché de Osher [8] ou Roe [10]. Alors la viscosité numérique $V(W_g, W_d)$ d'un tel schéma est nulle si les états $W_g$ et $W_d$ satisfont les conditions de saut d'une discontinuité de contact stationnaire.

## 4. Conclusion.

Pour capturer une couche limite avec un schéma de volumes finis, l'analyse numérique du problème de la discontinuité de contact stationnaire montre que pour les flux dits de "flux splitting" les plus classiques, une viscosité numérique d'ordre un par rapport au saut de la densité est présente en général, alors qu'il n'en est rien lorsqu'on emploie un "solveur" approché du problème de Riemann. Cette remarque nous a conduit, pour le développement de logiciels de résolution des équations de Navier Stokes des fluides compressibles, à adjoindre le flux d'Osher au choix initial de la décomposition de flux de Van Leer ou de Sanders et Prendergast (Chaput et al [2]).

## Références bibliographiques.

[1] Bourdel F., Delorme P., Mazet P., Convexity in Hyperbolic Problems. Application to a Discontinuous Galerkin Method for the Resolution of the Polydimensional Euler Equations, Notes on Numerical Fluid Mechanics n° 24 (1989), 31-42.

[2] Chaput E., Dubois F., Lemaire D., Moulès G., Vaudescal J.L., FLU3PNS : A Three Dimensional Thin Layer and Parabolized Navier-Stokes Solver Using the MUSCL Upwind Scheme, AIAA Paper n° 91-0728, 1991.

[3] Dubois F., Flux vector splitting and stationary contact discontinuity, Second international symposium on finite volumes for complex applications, Duisburg, July 19-22, 1999 (F. Benkhaldoun, R. Vilsmaier, D. Hänel Eds), Hermes, Paris, 1999, 133-140.

[4] Godunov S.K., A Finite Difference Method for the Numerical Computation of Discontinuous Solutions for the Equations of Fluid Dynamics, Mat. Sbornik 47 (1959), 271-290.

[5] Godlewski E., Raviart P.A., Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws, Applied Mathematical Sciences, vol. 118, Springer, New York, 1996.

[6] Gressier J., Villedieu P., Moschetta J.M., Positivity of Flux Vector Splitting Schemes, *Journal of Computational Physics*, volume 155, numéro 1, p. 199-220, 1999.

[7] Harten A., Lax P.D., Van Leer B., On Upstream Differencing and Godunov-type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, SIAM Review 25, n° 1 (1983), 35-61.

[8] Osher S., Numerical Solution of Singular Perturbation Problems and Hyperbolic Systems of Conservation Laws, in Mathematical Studies n°47 (Axelsson-Franck-Van der Sluis Eds.), 1981, 179-205.

[9] Perthame B., Second Order Boltzmann Schemes for Compressible Euler Equations in One and Two Space Variables, SIAM Journal of Numerical Analysis 29 (1991), 1-19.

[10] Roe P., Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes, Journal of Computational Physics 43 (1981), 357-372.

[10] Sanders R.H., Prendergast K.H., The Possible Relation of the 3-kiloparsec Arm to Explosions in the Galactic Nucleus, The Astrophysical Journal 188 (1974) 489-500.

[12] Van Leer B., Flux-Vector Splitting for the Euler Equations, Lectures Notes in Physics n$^o$ 170 (1982), 507-512.

[13] Van Leer B., Thomas J.L., Roe P., Newsome R.W., A Comparison of Numerical Flux Formulas for the Euler and Navier Stokes Equations, AIAA Paper n$^o$ 87-1104, 1987.