ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — *Condition à la limite pour un système de lois de conservation.* Note de **François Dubois** et **Philippe Le Floch,** présentée par Jacques-Louis Lions.

On propose une formulation de la condition à la limite pour un système hyperbolique non linéaire de lois de conservation. Celle-ci s'appuie sur la notion de problème de Riemann et conduit à un problème « bien posé ». L'équivalence avec des formulations classiques est établie dans les cas linéaire et scalaire non convexe. L'étude des équations d'Euler isentropiques fournit un exemple non trivial qui est détaillé graphiquement.

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS. — Boundary condition for systems of hyperbolic conservation laws.

We propose a formulation of boundary condition for non linear hyperbolic systems of conservation laws. It is based on the notion of Riemann problem and leads to a "well posed" problem. The equivalence with classical formulations is established for both linear and non convex scalar cases. The study of isentropic Euler equations gives a non trivial example which is graphically detailed.

I. INTRODUCTION. — On considère un système hyperbolique non linéaire de lois de conservation :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}f(u)=0. \tag{1}$$

L'inconnue $u=u(x, t)$ est définie pour (x, t) dans $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^n$. Le flux f est de classe $\mathscr{C}^2$ défini sur $\mathscr{U}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On s'intéresse au problème avec conditions initiale et à la limite associé au système (1) : pour $u_0 : \mathbb{R}_+\to\mathscr{U}$ fonction fixée, on cherche une fonction u, solution faible entropique de (1) (*voir* Lax [7] et Smoller [11]) telle que :

$$u(x, 0)=u_0(x), \qquad x>0 \tag{2}$$

et vérifiant une condition limite en $x=0$. Rappelons qu'avec une condition de type Dirichlet : $u(0, t)=\bar{u}_0(t)$, $t>0$, pour $\bar{u}_0 : \mathbb{R}_+\to\mathscr{U}$ fonction fixée, le problème (1)-(2) est *mal posé* : il n'y a en général ni unicité ni existence de la solution (*voir* Leroux [10], Goodman [5]).

2. FORMULATION DE LA CONDITION À LA LIMITE. — Nous proposons une formulation de la condition à la limite qui s'appuie sur la notion de *problème de Riemann.* Pour u_g et u_d dans $\mathscr{U}$, on note $w=w((x/t);\ u_g,\ u_d)$ la solution faible entropique de (1), définie pour (x, t) dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, vérifiant la condition initiale $u(x, 0)=u_g$ pour $x<0$, u_d pour $x>0$ et constituée de $(n+1)$ états constants séparés par des ondes simples (chocs, détentes ou discontinuités de contact) (*voir* Lax [7]). L'espace des états $\mathscr{U}$ est supposé choisi tel que le problème de Riemann admette une et une seule telle solution.

On définit l'*ensemble des valeurs admissibles* $\mathscr{V}(\bar{u}_0)$ associé à un état $\bar{u}_0$ dans $\mathscr{U}$ par $\mathscr{V}(\bar{u}_0)=\{w(0+\,;\ \bar{u}_0,\ u_d),\ u_d\in\mathscr{U}\}$.

On remarque que $\bar{u}_0$ appartient à $\mathscr{V}(\bar{u}_0)$, puisque $w(.\,;\ \bar{u}_0,\ \bar{u}_0)\equiv\bar{u}_0$.

La formulation de la condition limite en $x=0$ pour une donnée à la limite $\bar{u}_0 : \mathbb{R}_+\to\mathscr{U}$ est alors la suivante :

$$u(0+, t)\in\mathscr{V}(\bar{u}_0(t)), \qquad t>0. \tag{3}$$

En général, $\mathscr{V}(\bar{u}_0(t))$ n'étant pas réduit au seul point $\bar{u}_0(t)$, la condition (3) constitue une extension de la notion habituelle de condition à la limite.

0249-6291/87/03040075 \$ 2.00 © Académie des Sciences

On montre que cette formulation (3) conduit à un problème bien posé au sens suivant :

THÉORÈME 1. — *Supposons les fonctions* $\bar{u}_0(t)$ *et* $u_0(x)$ *constantes. Le problème* (1)-(3) *admet une solution et une seule dans la classe des fonctions constituées d'au plus* $(n+1)$ *états constants séparés par au plus n ondes élémentaires. (Rappelons que l'ensemble des états* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ *est choisi de sorte que le problème de Riemann avec données dans* $\mathcal{U}$ *admette une et une seule solution au sens habituel.)*

Dans la suite, nous explicitons pour divers systèmes les ensembles de valeurs admissibles $\mathcal{V}(.)$. Ainsi, nous établissons d'abord que la formulation (3) de la condition à la limite se réduit aux formulations connues pour un système hyperbolique linéaire et pour une loi de conservation scalaire; ensuite nous l'étudions dans plusieurs cas de systèmes non linéaires.

Remarque. — Numériquement, la condition (3) s'implémente de façon naturelle avec le schéma de Godunov [4].

3. CAS D'UN SYSTÈME LINÉAIRE STRICTEMENT HYPERBOLIQUE. — On introduit des notations classiques : $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ désignent les valeurs propres de la matrice jacobienne $A = f'$ et $r_1, \ldots, r_n$ des vecteurs propres associés. On note p l'entier tel que

$$\lambda_1 < \ldots < \lambda_p \leqq 0 < \lambda_{p+1} < \ldots < \lambda_n.$$

PROPOSITION 1. — *Pour* $\bar{u}_0$ *appartenant à* $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$, *l'ensemble* $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$ *est l'espace affine contenant* $\bar{u}_0$ *et dirigé par* $r_1, \ldots, r_p$.

Dans ce cas, (3) revient à se donner les $(n-p)$ composantes sur les vecteurs $r_{p+1}, \ldots, r_n$ de la valeur $u(0+, t)$ à la limite. La formulation (3) équivaut ainsi à la formulation classique basée sur la notion de caractéristique entrante (*cf.* Kreiss [6]).

4. CAS D'UNE ÉQUATION SCALAIRE NON CONVEXE. — Pour une loi de conservation $(n=1)$, on peut caractériser complètement l'ensemble $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$, pour $\bar{u}_0 \in \mathcal{U} = \mathbb{R}$. Définissons l'application $g : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par $g(v) = \inf_h h(v)$ pour $v \leqq f(\bar{u}_0)$, $g(v) = \operatorname{Sup}_h h(v)$ pour $v \geqq f(\bar{u}_0)$, où $h : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ décrit la classe des fonctions réciproques de f qui satisfont la contrainte :

$$\forall v \in f(\mathbb{R}), \quad (v - f(\bar{u}_0)).(h(v) - \bar{u}_0) \leqq 0.$$

En résolvant des problèmes de Riemann (Leroux [10], Ballou [1]), on établit le résultat suivant :

PROPOSITION 2. — $\mathcal{V}(\bar{u}_0) = g(f(\mathbb{R})) \cup f^{-1}(\mathrm{D})$ *où* D *est l'ensemble des points de discontinuité de g.*

PROPOSITION 2 *bis.* — *Dans le cas particulier où f est strictement convexe (et tendant vers l'infini à l'infini), soient* $u_* = (f')^{-1}(\mathrm{D})$ *et* u_0 *la solution de l'équation* $f(u) = f(\bar{u}_0)$ *différente de* $\bar{u}_0$ *(lorsque* $\bar{u}_0 \neq u_*$). *On a :*

$$\mathcal{V}(\bar{u}_0) =]-\infty, \check{u}_0] \cup \{\bar{u}_0\}, \quad si\ \bar{u}_0 > u_* \qquad et \qquad \mathcal{V}(\bar{u}_0) =]-\infty, u_*] \quad sinon.$$

Par une approche différente (méthode de viscosité artificielle), Bardos-Leroux-Nedelec [2] formulent la condition à la limite pour le problème (1).(2) sous la forme :

$$(4) \quad \begin{cases} \forall k \text{ entre } \bar{u}_0(t) \text{ et } u(0, t), \\ \qquad (f(u(0, t)) - f(k)).\operatorname{sgn}(u(0, t) - \bar{u}_0(t)) \leqq 0 \end{cases}$$

(*voir* aussi Le Floch et Nedelec [8], [9]). On montre que cette condition (4) est équivalente à notre formulation (3). Pour les détails, *voir* Dubois-Le Floch [3].

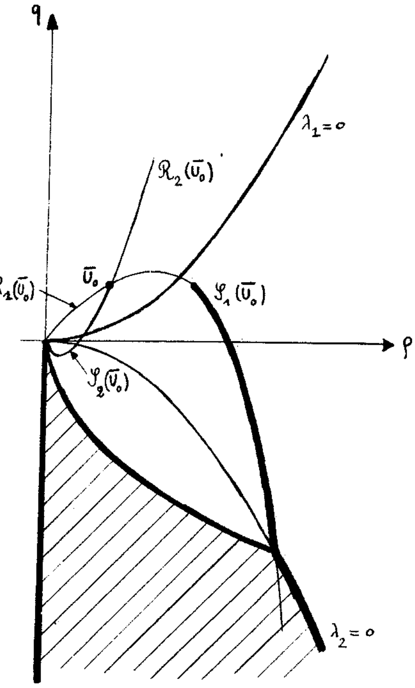

Fig. 1

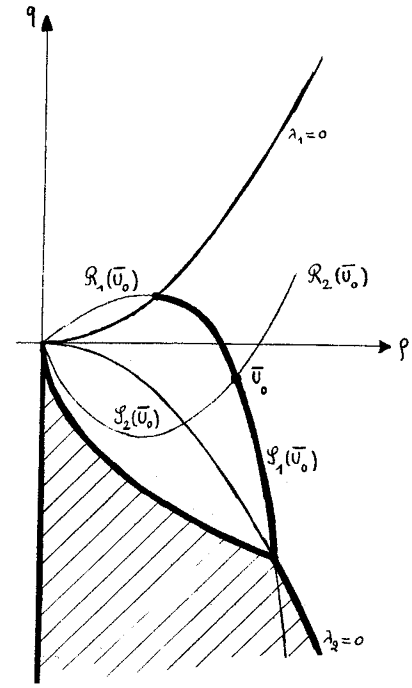

Fig. 2

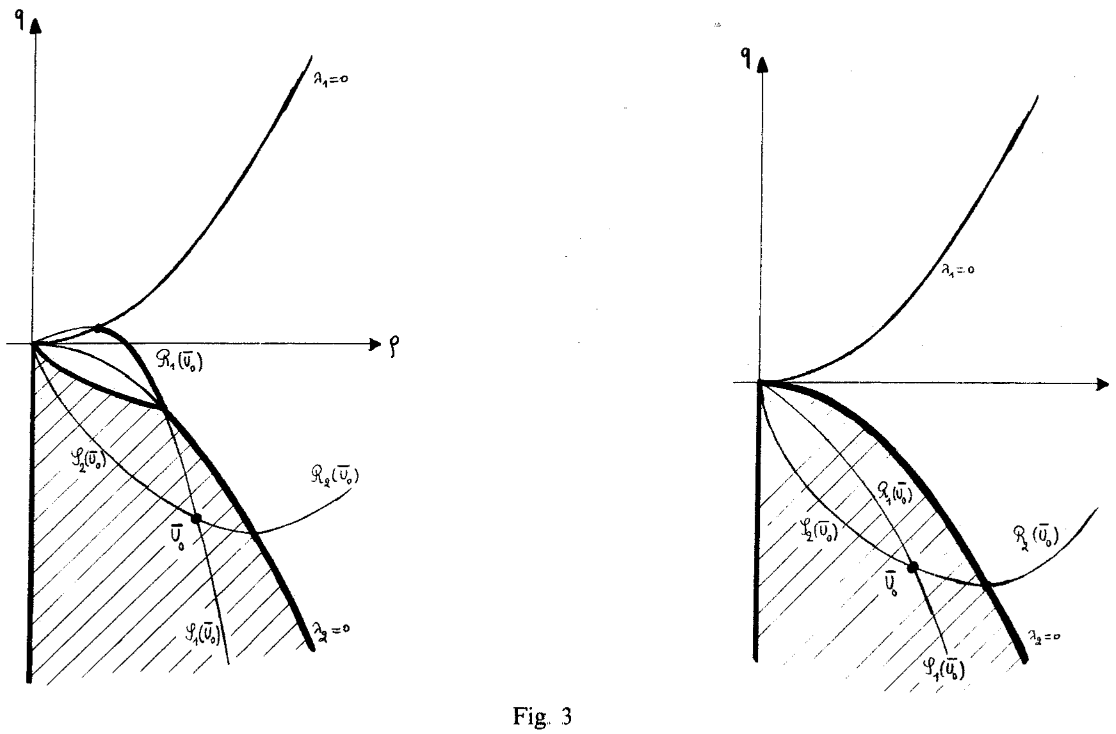

Fig. 3

5. Structure locale de l'ensemble des valeurs admissibles. — Nous revenons au cas général d'un système non linéaire strictement hyperbolique. Les champs caractéristiques associés aux valeurs propres $\lambda_i(u)$ et aux vecteurs propres $r_i(u)$ sont supposés soit vraiment non linéaires $(\nabla\lambda_i . r_i \equiv 1)$ et l'on note $\mathscr{S}_i(u)$ [resp. $\mathscr{R}_i(u)$] la i-courbe de choc (resp. la i-courbe de détente) issue de $u \in \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^n$, soit linéairement dégénérés $(\nabla\lambda_i . r_i \equiv 0)$, on note $\mathscr{W}_i(u)$ la i-discontinuité de contact. On pose $\mathscr{W}_i(u) = \mathscr{S}_i(u) \cup \mathscr{R}_i(u)$ dans le cas vraiment non linéaire.

Soit $\bar{u}_0 \in \mathscr{U}$, et p l'entier tel que :

$$\lambda_1(\bar{u}_0) < \ldots < \lambda_p(\bar{u}) \leqq 0 < \lambda_{p+1}(\bar{u}_0) < \ldots < \lambda_n(\bar{u}_0).$$

On décrit maintenant la structure locale de l'ensemble des valeurs admissibles.

THÉORÈME 2. — (i) *Si* $\lambda_p(\bar{u}_0)<0$, $\mathscr{V}(\bar{u}_0)$ *est au voisinage de* $\bar{u}_0$ *une variété de dimension p dont l'espace tangent est engendré par les p premiers vecteurs propres* $r_1(\bar{u}_0), \ldots, r_p(\bar{u}_0)$.

(ii) *Si* $\lambda_p(\bar{u}_0)=0$ *et si le p-*ième-*champ est vraiment non linéaire, l'ensemble* $\mathscr{V}(\bar{u}_0)$ *est localement autour de* $\bar{u}_0$ *la réunion d'une « demi-variété » de dimension p* $\tilde{\mathscr{V}}_p(\bar{u}_0)$ *et d'une variété de dimension* $(p-1)$ $\mathscr{V}_{p-1}(\bar{u}_0)$, *avec les définitions suivantes :*

$$\mathscr{V}_1(\bar{u}_0)=\mathscr{W}_1(\bar{u}_0);$$

$$\mathscr{V}_k(\bar{u}_0)=\{u\in\mathscr{U};\ \exists u'\in\mathscr{V}_{k-1}(\bar{u}_0),\ u\in\mathscr{W}_k(u')\},\qquad pour\quad k=2,\ldots,n.$$

et

$$\tilde{\mathscr{V}}_p(\bar{u}_0)=\{u\in\mathscr{V}_p(\bar{u}_0)\ \text{la plus grande vitesse de la } p\text{-ième onde est} \leqq 0\}.$$

6. CAS DU p-SYSTÈME. — Dans toute la suite $n=2$ et on désigne par U, F, ... les variables précédemment notées u, f, ... Considérons le p-système $U=(v, u)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, $F(U)=(-u, p(v))$, avec $p'<0$, $p''>0$. Les valeurs propres sont $\lambda_1=-\lambda_2=-\sqrt{-p'(v)}$, et vérifient $\lambda_1(U)<0<\lambda_2(U)$. Par suite, pour $\bar{U}_0$ dans $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, on a :

PROPOSITION 3. — $\mathscr{V}(\bar{U}_0)=\mathscr{W}_1(\bar{U}_0)$.

On remarque que la structure locale décrite au théorème 2 est ici *globale :* $\mathscr{V}(\bar{U}_0)$ est une variété de dimension 1.

7. SYSTÈME DES ÉQUATIONS D'EULER ISENTROPIQUES. — On considère maintenant le système suivant qui modélise l'évolution isentropique d'un fluide parfait polytropique : $U=(\rho, q)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, $F(U)=(q, (q^2/\rho)+p(\rho))$, avec $p(\rho)=k\rho^\gamma$, $k>0$, $1<\gamma<3$. C'est un système strictement hyperbolique dont les deux champs sont vraiment non linéaires. Les valeurs propres

$$\lambda_1=u-c<\lambda_2=u+c \qquad \text{avec}\quad u=\frac{q}{\rho}\quad \text{et}\quad c=\sqrt{p'(\rho)}$$

ont des signes qui dépendent de l'état U.

On a représenté les ensembles $\mathscr{V}(\bar{U}_0)$ en distinguant différents cas (voir *fig.* 1-3). Sur chaque figure, on a tracé les courbes d'équation $\lambda_i(u)=0$ et les courbes $\mathscr{W}_i(\bar{U}_0)$, $i=1,2$.

Pour les détails des calculs, on renvoie à Dubois-Le Floch [3].

Reçue le 17 novembre 1986.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] D. BALLOU, *Trans. A.M.S.*, 152, 1970, p. 441-460.
[2] C. BARDOS, A.-Y. LEROUX et J.-C. NEDELEC, *Comm. P.D.E.*, 4, 9, 1979, p. 1017-1034.
[3] F. DUBOIS et P. LE FLOCH (à paraître).
[4] S. GODUNOV et coll., *Résolution numérique de problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz*, M.I.R., Moscou, 1979.
[5] GOODMAN, *Thèse*, Université de Californie, 1982.
[6] H. O. KREISS, Com. P.A.M., 23, 1970, p. 277-298.
[7] P. D. LAX, *Regional Conf. Series in Appl. Math.*, n° 11, S.I.A.M., Philadelphia, 1973.
[8] P. LE FLOCH, *Math. Meth. in Appl. Sciences* (à paraître).
[9] P. LE FLOCH et J.-C. NEDELEC, Rapport interne du Centre de Mathématiques appliquées de l'École Polytechnique, n° 144, 1986 et *Comptes rendus*, 301, série I, 1985, p. 793-796.
[10] A.-Y. LE ROUX, *Thèse*, Université de Rennes, 1979.
[11] J. SMOLLER, *Shock waves and reaction diffusion equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques appliquées, 91128 Palaiseau Cedex.