

Une version à pas fractionnaires du schéma de Godunov pour l'hydrodynamique

Rémy BARAILLE, Ghislaine BOURDIN, François DUBOIS et Alain-Yves LE ROUX

Résumé – Nous étudions une version à pas fractionnaires du schéma de Godunov pour des modèles hydrodynamiques qui consiste à séparer les termes de convection des ondes de pression. Ce découplage conduit à traiter deux problèmes dégénérés dont nous proposons une résolution obtenue par perturbations sur deux problèmes bien posés. Les résultats exposés sont de qualité comparable à ceux obtenus par le schéma de Godunov classique, avec une condition C.F.L. moins restrictive.

A splitted version of the Godunov scheme for hydrodynamic models

Abstract – We study a splitted version of the Godunov scheme for hydrodynamic models. We separate the convection terms from the pressure terms. This splitting technique leads to two degenerated problems, whose solutions are obtained through perturbations methods involving two well posed problems. Some numerical results are reported: they show that the splitted Godunov scheme gives results of the same quality as for the classical one, with less restrictive C.F.L. condition.

Abridged English Version – We consider the Saint-Venant equations for a compressible fluid,

$$(E) \quad \begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2)_x = p_x \end{cases}$$

where the pressure p is a given increasing function of the density ρ , and u is the velocity. We propose a splitting technique made of two steps. The first step corresponds to the convection terms in conservation form, that is

$$(C_v) \quad \begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2)_x = 0 \end{cases}$$

The second one deals with the pressure terms only, that is

$$(P) \quad \begin{cases} \rho_t = 0 \\ (\rho u)_t + (p)_x = 0. \end{cases}$$

Our aim is to build the Godunov scheme adapted to (C_v) and (P) respectively, and to combine these schemes in order to have another scheme for (E) . It is enough to solve the Riemann problem for (C_v) and (P) to get the fluxes through the interfaces between the cells. However both problems are degenerated, so we propose to build a perturbed version of each, and use the limits of the solutions of the perturbed Riemann problems to define these fluxes.

The perturbed (C_v) Riemann problem is

$$(C_{v\varepsilon}) \quad \begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2)_x + \varepsilon^2 (p)_x = 0 \end{cases}$$

with the piecewise constant initial data

$$(\rho(x, 0), u(x, 0)) = \begin{cases} (\rho_l, u_l) & \text{for } x < 0 \\ (\rho_r, u_r) & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

0764-4442/92/03140147 \$ 2.00 © Académie des Sciences

The limit solution leads to the fluxes

$$(\overline{\rho u}) = \begin{cases} 0 & \text{for } u_1 < 0, \quad u_r > 0 \\ \rho_1 u_1 & \text{for } u^* > 0, \quad u_1 > 0 \\ \rho_r u_r & \text{for } u^* < 0, \quad u_r < 0 \end{cases} \quad (\overline{\rho u^2}) = \begin{cases} 0 & \text{for } u_1 < 0, \quad u_r > 0 \\ \rho_1 u_1^2 & \text{for } u^* > 0, \quad u_1 > 0 \\ \rho_1 u_r^2 & \text{for } u^* < 0, \quad u_r < 0 \end{cases}$$

where

$$u^* = \frac{\sqrt{\rho_1} u_1 + \sqrt{\rho_r} u_r}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_r}}$$

The perturbed (P) Riemann problem is

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} \rho_t + \varepsilon^2 (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + \varepsilon^2 (\rho u^2)_x + (p)_x = 0 \end{cases}$$

with the same initial data. This leads to the fluxes $\tilde{p} = p(\tilde{\rho})$ with $\tilde{\rho}$ solution of

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\sqrt{P'(y)}}{y} dy + \frac{\rho - \rho_0}{\sqrt{\rho \rho_0}} \sqrt{\frac{p(\rho) - p(\rho_0)}{\rho - \rho_0}} = 0$$

with $\rho_0 = \text{Min}(\rho_1, \rho_r)$.

The splitted version of the Godunov scheme is given by

$$\begin{aligned} (\tilde{\rho})_i^n &= (\rho)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((\overline{\rho u})_j^n - (\overline{\rho u})_{j-1}^n) \\ (\tilde{\rho u})_i^n &= (\rho u)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((\overline{\rho u^2})_j^n - (\overline{\rho u^2})_{j-1}^n) \end{aligned}$$

for the first step and

$$\begin{aligned} \rho_i^{n+1} &= \tilde{\rho}_i^n \\ (\rho u)_i^{n+1} &= (\tilde{\rho u})_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{p}_j^n - \tilde{p}_{j-1}^n), \quad \text{where } \tilde{p}_j^n = P(\tilde{\rho}_j^n). \end{aligned}$$

for the second step. The index i deals with the values in the cell and j deals with the fluxes through the interfaces with $i + (1/2) = j$. The CFL condition reads here

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \text{Max}(|u|, \sqrt{p'(\rho)}) \leq 1,$$

and allows larger values of the time step than the usual one (see *Figs. 1 and 2*). This scheme is particularly adapted for reactive flows for it allows faster computations with a larger time step and more stability.

1. INTRODUCTION. — Les techniques à pas fractionnaires s'adaptent bien à la discrétisation de modèles complexes faisant intervenir plusieurs phénomènes physiques très différents. En effet, une méthode globale amène à contrôler la stabilité par des conditions spécifiques à chaque terme, ce qui conduit à une chute du pas de temps. Par nature, les méthodes à pas fractionnaires traitent séparément chaque terme ou groupe de termes du modèle, en lui adaptant un algorithme spécifique. Nous choisissons de grouper les termes de façon à reproduire des phénomènes physiques pour lesquels une méthode numérique particulière est adaptable.

La méthode des pas fractionnaires est le correspondant numérique de la formule de Trotter : on considère l'équation d'évolution

$$(1) \quad u_t + A u + B u = 0, \quad u(0) = u_0$$

avec u appartenant à un certain espace V , et A et B des opérateurs de V dans V , générateurs des semi-groupes respectifs $S(t)$ et $T(t)$. Alors la solution s'écrit

$$(2) \quad u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S\left(\frac{t}{n}\right) T\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n u_0$$

sous certaines hypothèses sur A , B et l'espace V (voir [1]). L'approximation consiste à remplacer l'opérateur de semi-groupe par un schéma numérique. Soient $S_h(\Delta t)$ et $T_h(\Delta t)$ deux schémas numériques correspondant aux équations :

$$(3) \quad v_t + A v = 0; \quad w_t + B w = 0$$

pour une valeur Δt du pas de temps. La méthode des pas fractionnaires revient à combiner ces deux schémas :

$$(4) \quad u_h(t + \Delta t) = (S_h(\Delta t) T_h(\Delta t)) u_h(t),$$

où u_h est la solution approchée. Ceci se généralise à un nombre quelconque d'opérateurs (cf. [2]). On détermine ces opérateurs en fonction de la signification physique de chaque terme : convection (codes lagrangiens, méthodes particulières, cf. [3]), termes de pression, de diffusion, liés à la géométrie (apparaissant lors d'un changement de coordonnées), les différentes classes de termes de production (écoulements réactifs [4], ...), etc.

Cette technique pose cependant quelques problèmes; elle fait intervenir à certaines étapes des opérateurs de type dégénéré (systèmes non strictement hyperboliques, non symétrisables, etc...). Cette éventualité nécessite d'adapter les schémas numériques.

On se propose ici d'étudier le cas simple mais significatif d'un modèle hydrodynamique, et d'en déduire la construction d'une version à pas fractionnaire du schéma de Godunov.

2. UN MODÈLE HYDRODYNAMIQUE. — On considère le système

$$(5) \quad \begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0, \quad p = P(\rho). \end{cases}$$

où ρ désigne la densité, u la vitesse et p la pression d'un fluide; la fonction P est positive, croissante et convexe. Les deux premiers pas fractionnaires correspondent respectivement à

$$(6) \quad \begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2)_x = 0 \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} \rho_t = 0 \\ (\rho u)_t + (p)_x = 0. \end{cases}$$

Le système (6) lié à la convection est dégénéré : la vitesse u est valeur propre double et la jacobienne du flux n'est pas diagonalisable. De même, le problème (7) lié à la pression n'est pas hyperbolique au sens classique de Lax [5] car 0 est valeur propre double de sa jacobienne de flux qui est non diagonalisable.

Il est possible d'élaborer d'autres approches pour le système (5), notamment en utilisant des techniques non conservatives. Elles permettent une résolution stable et rapide de (8) tout en préservant les bonnes vitesses caractéristiques [6]. Elles sont toutefois moins bien adaptées aux problèmes multiphasiques (non conservation des espèces).

La construction du schéma de Godunov [7] pour (6) puis pour (7), utilise des solveurs adaptés à des problèmes de Riemann dégénérés, par passage à la limite sur des problèmes perturbés.

3. LE PROBLÈME DE RIEMANN EN CONVECTION. — Nous interprétons la solution de (6) comme la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ de la solution du système perturbé :

$$(9) \quad \begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2)_x + \varepsilon^2 (p)_x = 0 \end{cases}$$

$$(10) \quad \rho(x, t=0) = \begin{cases} \rho_g & \text{pour } x < 0 \\ \rho_d & \text{pour } x > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad u(x, t=0) = \begin{cases} u_g & \text{pour } x < 0 \\ u_d & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

où $\rho_d > 0, \rho_g > 0, u_d$ et u_g sont des constantes.

THÉORÈME 1. — La fonction P est supposée positive, croissante et convexe. Nous supposons aussi ρ_p et ρ_d non nuls.

Pour $u_g > u_d$, la solution de (9), (10) converge presque partout vers la limite

$$(11) \quad (\rho, u) = \begin{cases} (\rho_d, u_d) & \text{si } x > u^* t \\ (\rho_g, u_g) & \text{si } x < u^* t \end{cases} \quad \text{où} \quad u^* = \frac{\sqrt{\rho_g u_g} + \sqrt{\rho_d u_d}}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}}$$

Pour $u_g < u_d$, on obtient à la limite

$$(\rho, u) = \begin{cases} (\rho_d, u_d) & \text{si } x > u_d t \\ (\rho_g, u_g) & \text{si } x < u_g t \end{cases}$$

et pour $u_g t < x < u_d t$, la densité ρ et le produit ρu tendent vers zéro, u restant borné.

Ce choix est validé par l'expérience numérique : le schéma de Lax-Friedrichs (voir [5]) qui ne met pas en œuvre de solveur de Riemann, conduit à la même solution (voir fig. 1).

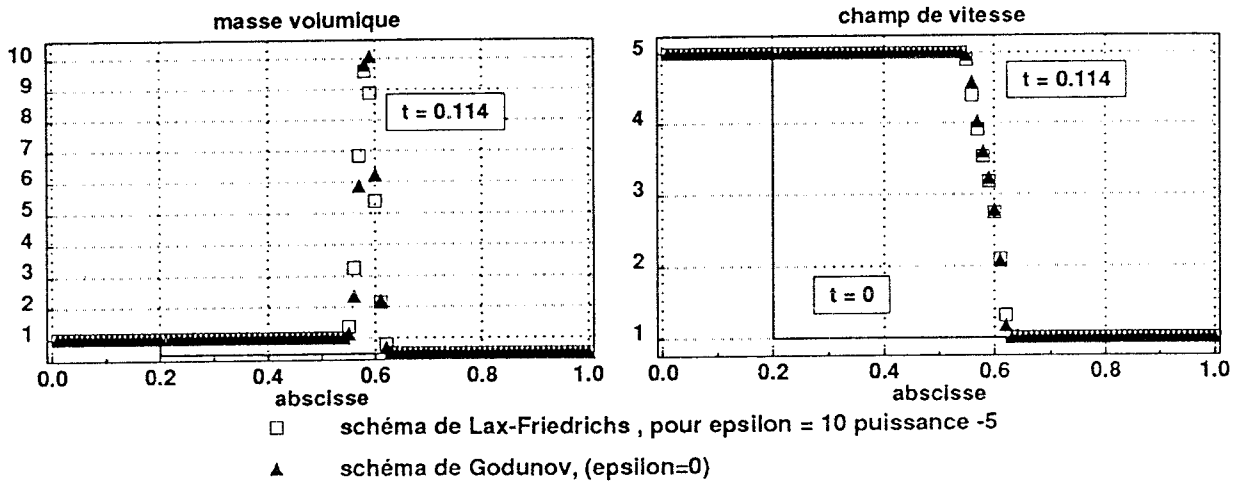


Fig. 1. — Problème en convection.

Fig. 1. — Convection Problem

4. LE PROBLÈME EN PRESSION. — La solution de (7) est interprétée comme la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, de la solution du système suivant, avec la condition initiale (10).

$$(12) \quad \begin{cases} \rho_t + \varepsilon^2 (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + \varepsilon^2 (\rho u^2)_x + (p)_x = 0 \end{cases}$$

THÉORÈME 2. — La fonction P est supposée positive, croissante et convexe.

Pour $\rho_g > \rho_d$, et ε tendant vers zéro, la solution de (10), (12) est constituée de deux ondes : une 1-onde de détente (vitesse négative) et une 2-onde de choc (vitesse positive). La vitesse de l'état intermédiaire tend vers $+\infty$ comme $1/\varepsilon$, alors que sa densité tend vers ρ caractérisée par

$$(13) \quad \psi(\rho) + \frac{\rho - \rho_d}{\sqrt{\rho\rho_d}} \sqrt{\frac{\rho - \rho_d}{\rho - \rho_d}} = \psi(\rho_d) \quad \text{où} \quad \psi(\rho) = \int^{\rho} \frac{\sqrt{P'(\xi)}}{\xi} d\xi.$$

Pour $\rho_g < \rho_d$, et ε tendant vers zéro, la solution de (10), (12) est constituée de deux ondes : une 1-onde de choc (vitesse négative) et une 2-onde de détente (vitesse positive). La vitesse de l'état intermédiaire tend vers $-\infty$ comme $-1/\varepsilon$, alors que sa densité tend vers ρ caractérisée par

$$(14) \quad \psi(\rho) + \frac{\rho - \rho_g}{\sqrt{\rho\rho_g}} \sqrt{\frac{\rho - \rho_g}{\rho - \rho_g}} = \psi(\rho_d).$$

5. LE SCHÉMA DE GODUNOV À PAS FRACTIONNAIRES. — Soient $h > 0$, $\Delta t > 0$ les pas de discrétisation en espace et en temps. On pose $r = \Delta t/h$. Soit u_i^n l'approximation de la solution en $(ih, n\Delta t)$. Nous supposons ces quantités constantes sur des cellules $M_i =](j-1)h; jh[$, $j \in \mathbb{N}$ et $j = i + 1/2$ (convention de notation liant i et j).

Étape de convection. — En connaissant les champs à l'instant $t_n = n\Delta t$, on calcule une approximation numérique du système (6) par

$$(15) \quad (\tilde{\rho}\alpha)_i^n = (\rho\alpha)_i^n - r((\rho\alpha u)_j^n - (\rho\alpha u)_{j-1}^n), \quad \alpha = 1, u.$$

Pour évaluer les flux, on détermine $w_j^n = \sqrt{\rho_i^n} u_i^n + \sqrt{\rho_{i+1}^n} u_{i+1}^n$ puis

Pour $u_i^n > 0$, $w_j^n > 0$, on pose $u_j^n = u_i^n$, $\rho_j^n = \rho_i^n$.

Pour $u_{i+1}^n < 0$, $w_j^n < 0$, on pose $u_j^n = u_{i+1}^n$, $\rho_j^n = \rho_{i+1}^n$.

Pour $u_i^n < 0 < u_{i+1}^n$, on pose $u_j^n = 0$, $\rho_j^n = 0$.

Étape de pression. — Avec les nouveaux champs donnés par (15), on calcule une approximation numérique du système (7) par

$$(16) \quad \begin{cases} \rho_i^{n+1} = \tilde{\rho}_i^n \\ (\rho u)_i^{n+1} = (\tilde{\rho} u)_i^n - r(\tilde{p}_j^n - \tilde{p}_{j-1}^n), \quad \text{où} \quad \tilde{p}_j^n = P(\tilde{\rho}_j^n). \end{cases}$$

Pour $\tilde{\rho}_i^n > \tilde{\rho}_{i+1}^n$, $\tilde{\rho}_j^n$ est solution de (13) et pour $\tilde{\rho}_i^n < \tilde{\rho}_{i+1}^n$, $\tilde{\rho}_j^n$ est solution de (14).

6. RÉSULTATS NUMÉRIQUES. — Nous présentons un essai avec deux ondes de choc pour (6) (le cas où une onde de détente est présente donne aussi de très bons résultats [4]) en prenant $P(\rho) = \beta\rho\gamma$ avec $\beta = 2$ et $\gamma = 1,4$.

La figure 2 compare les champs de densité et de vitesse obtenus par le schéma de Godunov et par (15), (16). La qualité des résultats est tout à fait similaire. Notons toutefois que les chocs semblent moins diffusés avec un traitement séparé de la convection et des termes de pression. De plus, par (15), (16), nous intégrons (5) avec des pas de temps plus grands car la condition de stabilité ne porte que sur la norme L^∞ de la vitesse u ; elle autorise des nombres de Courant pour lesquels le schéma de Godunov classique est fortement instable (C.F.L. $\sim 1,27$). Pour des essais à faibles pressions (par exemple pour $\beta = 0,1$), la convection devient dominante, et un reliquat de confinement de matière est apparent, limité à deux mailles au niveau du choc.

7. CONCLUSION. — Dans les techniques lagrangiennes classiques, la partie convection utilise en général un champ de vitesses non pondéré par les densités : la présente analyse

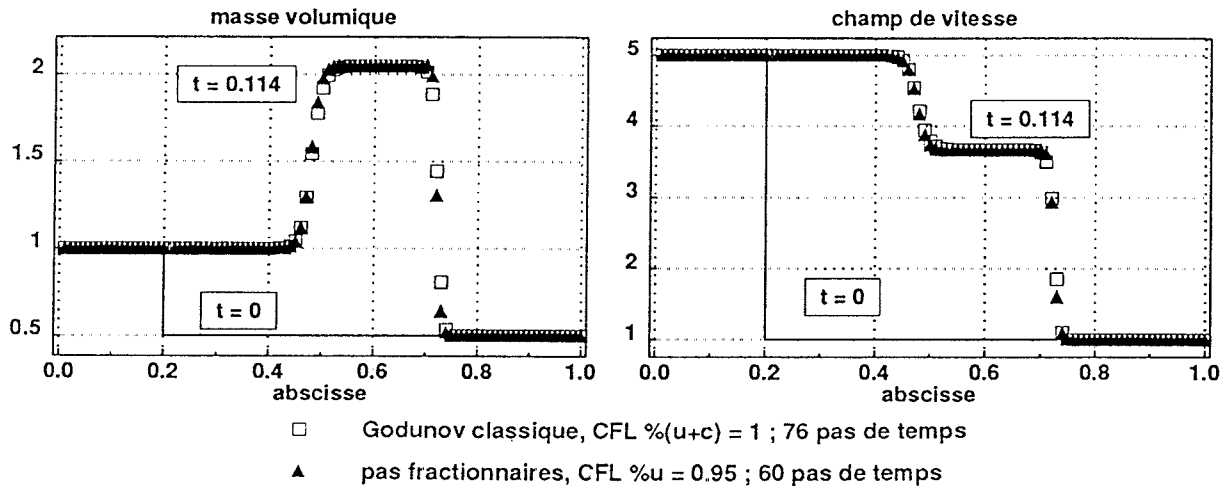


Fig. 2. — Système de Saint-Venant.

Fig. 2. — Saint-Venant system

suggère une pondération particulière (comparer (11) avec la moyenne de Roe [8]). Le schéma (15), (16) a été étendu à la simulation du compactage d'une poudre [3] en utilisant cette pondération. Il se généralise aussi aux équations d'Euler, avec des termes de production chimique [4], pour lesquelles la conservation de la masse et la positivité des fractions massiques sont assurées sans condition sévère sur le pas de temps. Le problème en pression est alors strictement hyperbolique.

Note remise le 8 juillet 1991, acceptée le 23 septembre 1991.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] P.-L. LIONS et B. MERCIER, *S.I.A.M. J. Num. Anal.*, 16, n° 6, 1979, p. 964-979.
- [2] G. STRANG, *S.I.A.M. J. Num. Anal.*, 5, n° 3, 1968, p. 506-517.
- [3] G. BOURDIN, *Thèse*, Université Bordeaux-I, juin 1991.
- [4] R. BARAILLE, *Thèse*, Université Bordeaux-I (à paraître).
- [5] P. D. LAX, *C.B.M.S.-N.S.F. Regional Conf. in Applied Math.*, 11, *S.I.A.M.*, 72.
- [6] J.-F. COLOMBEAU, A.-Y. LE ROUX, A. NOUSSAÏR et B. PERROT, *S.I.A.M. J. Num. Anal.*, 26, n° 4, 1986, p. 871-883.
- [7] S. K. GODUNOV, *Mat. Sb.*, 47, 1959, p. 271.
- [8] P. L. ROE, *J. Comp. Phy.*, 43, 1981, p. 357-372.

R. B. et F. D. : *Aérospatiale, D.S.S.S., 78133 Les Mureaux Cedex,*
 R. B., G. B. et A.-Y. L. R. : *CeReMaB, Université Bordeaux-I, 33405 Talence*