Perturbations stationnaires. □

François Dubois *

29 janvier 2002.

Plan

1) Position du problème.

• On étudie le système différentiel suivant :

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}z} + A(\epsilon) \bullet X = 0 \tag{1.1}$$

□ Perturbation stationnaire d'un opérateur linéaire n'ayant que des valeurs propres simples ; application à l'exponentiation. Manuscrit du 4 mai 1999, version révisée janvier 2002, édition 21 mars 2007.

* Conservatoire National des Arts et Métiers, Equipe de recherche Associée n^o 3196, 15 rue Marat, F-78 210 Saint Cyr l'Ecole, Union Européenne ; Applications Scientifiques du Calcul Intensif, bât. 506, BP 167, F-91 403 Orsay Cedex, Union Européenne ; fdubois@cnam.fr.

où $[0,\, L] \ni z \longmapsto X(z) \in {\rm I\!R}^N$ est le vecteur inconnu à N composantes et $A(\epsilon)$ une matrice réelle à N lignes et N colonnes qui, pour tout ϵ réel dans un voisinage de zéro noté I peut s'écrire sous la forme :

$$(1.2) \qquad A(\epsilon) \;=\; H \,+\, \epsilon\, W \,, \quad \epsilon \in I, \quad I \in \mathcal{V}(0) \,.$$

La matrice $H = A(0)$ est dite "non perturbée" et la matrice $W = \frac{{\rm d}A}{{\rm d}\epsilon}(0)$ est une perturbation. On suppose que l'équation différentielle (1.1) est **linéaire** à coefficients constants et en conséquence les deux matrices H et W ne dépendent pas de la variable z. On suppose que l'opérateur H est diagonalisable dans une base réelle de vecteurs propres $r_j^0 \, (j = 1, \cdots, N)$ avec des valeurs propres réelles λ_j^0 **toutes distinctes** :

$$(1.3) \qquad H \bullet r_j^0 \;=\; \lambda_j^0 \; r_j^0 \,, \qquad\qquad j = 1, \cdots, N \,,$$

$$(1.4) \qquad \lambda_1^0 \;<\; \lambda_2^0 \;<\; \cdots \;<\; \lambda_j^0 \;<\; \lambda_{j+1}^0 \;<\; \cdots \;<\; \lambda_N^0 \;.$$

• On sait qu'alors, si $\epsilon > 0$ est assez petit, l'opérateur $A(\epsilon)$ est diagonalisable dans une base réelle r_j^ϵ de vecteurs propres, avec des valeurs propres λ_j^ϵ qui sont encore toutes distinctes :

$$(1.5) \qquad A(\epsilon) \bullet r_j^\epsilon \;=\; \lambda_j^\epsilon \; r_j^\epsilon \,, \qquad\qquad j = 1, \cdots, N \,,$$

$$(1.6) \qquad \lambda_1^\epsilon \;<\; \lambda_2^\epsilon \;<\; \cdots \;<\; \lambda_j^\epsilon \;<\; \lambda_{j+1}^\epsilon \;<\; \cdots \;<\; \lambda_N^\epsilon \;.$$

Si les vecteurs propres r_j^ϵ sont connus, la résolution de l'équation différentielle (1.1) est élémentaire : on décompose la condition initiale $X(0)J$ sur les vecteurs propres r_j^ϵ. On a

$$(1.7) \qquad X^\epsilon(0) \;=\; \sum_{j=1}^{N} X_j^\epsilon(0)\; r_j^\epsilon \,,$$

et l'évolution avec z des "variables caractéristiques" $X_j^\epsilon(z)$ est donnée par l'équation différentielle suivante, conséquence directe des relations (1.1) et (1.6) :

$$(1.8) \qquad \frac{\rm d}{{\rm d}z} X_j^\epsilon(z) \;+\; \lambda_j^\epsilon \; X_j^\epsilon(z) \;=\; 0 \,.$$

L'équation (1.8) s'intègre en

$$(1.9) \qquad X_j^\epsilon(z) \;=\; {\rm e}^{-\lambda_j^\epsilon \, z} \; X_j^\epsilon(0) \,.$$

• En général, on ne sait pas expliciter avec des formules analytiques les vecteurs propres r_j^ϵ de l'opérateur perturbé $A(\epsilon)$, mais on a une bonne connaissance des vecteurs propres r_j^0 en absence de perturbation. Nous rappelons dans la suite la **méthode des perturbations stationnaires** qui permet de développer r_j^ϵ comme une série formelle de la variable ϵ en fonction des données. Nous utilisons ce résultat dans une seconde étape pour expliciter sous forme d'une série en ϵ le développement du vecteur $X^\epsilon(z)$ fourni par les relations (1.7) à (1.9) :

$$(1.10) \qquad X^\epsilon(z) \;=\; \sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-\lambda_j^\epsilon \, z} \; X_j^\epsilon(0) \; r_j^\epsilon \; .$$

2) Perturbations stationnaires.

• On cherche la valeur propre d'ordre j, notée λ_j^ϵ, de l'opérateur perturbé $A(\epsilon)$, sous la forme d'une série formelle en puissances de ϵ :

$$(2.1) \qquad \lambda_j^\epsilon \;=\; \sum_{l \geq 0} \epsilon^l \, \mu_j^l \;\equiv\; \lambda_j^0 \;+\; \epsilon \, \mu_j^1 \;+\; \epsilon^2 \, \mu_j^2 \;+\; \cdots \; ,$$

on fait de même pour les vecteurs propres :

$$(2.2) \qquad r_j^\epsilon \;=\; \sum_{l \geq 0} \epsilon^l \, q_j^l \;\equiv\; r_j^0 \;+\; \epsilon \, q_j^1 \;+\; \epsilon^2 \, q_j^2 \;+\; \cdots$$

et on développe ensuite le vecteur q_j^l dans la base des vecteurs propres de la matrice non perturbée :

$$(2.3) \qquad q_j^l \;=\; \sum_{m=1}^{N} U_{m\,j}^l \; r_m^0 \, .$$

Quand on introduit la représentation (2.3) au sein de (2.2), on trouve :

$$(2.4) \qquad r_j^\epsilon \;=\; \sum_{l \geq 0} \sum_{m=1}^{N} \epsilon^l \; U_{m\,j}^l \; r_m^0 \, .$$

Hypothèse 1. Composante de r_j^ϵ sur le vecteur propre initial r_j^0. On suppose l'intervalle I de variation de ϵ suffisamment petit pour que, pour tout indice j, le vecteur propre r_j^ϵ de la matrice perturbée $A(\epsilon)$ ait toujours une composante **non nulle** sur le j^{o} vecteur propre r_j^0 de la matrice non perturbée. On normalise alors le vecteur r_j^ϵ de sorte que le coefficient correspondant de la relation (2.4) soit identiquement égal à 1 pour toutes les valeurs de ϵ :

$$(2.5) \qquad \sum_{l \geq 0} \epsilon^l \, U^l_{j\,j} \;\equiv\; 1 \,, \qquad \forall \epsilon \in I \,, \qquad I \in \mathcal{V}(0) \,.$$

On a facilement, compte tenu de la relation (2.4) :

$$(2.6) \qquad U^0_{j\,j} \;=\; 1 \,, \qquad U^l_{j\,j} \;=\; 0 \,, \quad \forall \, l \geq 1 \,.$$

Hypothèse 2. Développement de la perturbation.
On suppose que l'image $W \bullet q^l_j$ du vecteur q^l_j par la perturbation W se développe sur la base **initiale** r^0_k à l'aide de coefficients $W^l_{k\,j}$:

$$(2.7) \qquad W \bullet q^l_j \;=\; \sum_{k=1}^{N} W^l_{k\,j} \; r^0_k \,.$$

• On remarque qu'une fois les vecteurs q^l_j calculés et une fois la matrice de l'opérateur W connue dans la base initiale r^0_k, c'est à dire

$$(2.8) \qquad W \bullet r^0_m \;=\; \sum_{k=1}^{N} W^0_{k\,m} \; r^0_k \,,$$

les relations (2.3), (2.7) et (2.8) entraînent

$$(2.9) \qquad W^l_{k\,j} \;=\; \sum_{m \neq j} W^0_{k\,m} \; U^l_{m\,j} \,, \quad l \geq 1 \,.$$

Proposition 1. Résultat au premier ordre.
On a :

$$(2.10) \qquad \mu^1_j \;=\; W^0_{j\,j}$$

$$(2.11) \qquad q^1_j \;=\; \sum_{k \neq j} \frac{1}{\lambda^0_j \,-\, \lambda^0_k} \; W^0_{k\,j} \;\; r^0_k$$

donc en particulier

$$(2.12) \qquad U^1_{m\,j} \;=\; \frac{1}{\lambda^0_j \,-\, \lambda^0_m} \, W^0_{m\,j} \,, \qquad m \neq j \,.$$

Preuve de la Proposition 1.

• On injecte les relations (2.1) et (2.2) au sein de la relation constitutive (1.5), en tenant compte du choix (1.2). Il vient :

$$(2.13) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (H \,+\, \epsilon\, W) \bullet (r_j^0 \,+\, \epsilon\, q_j^1 \,+\, \epsilon^2\, q_j^2 \,+\, \ldots) \;= \\ \qquad = \; (\lambda_j^0 \,+\, \epsilon\, \mu_j^1 \,+\, \epsilon^2\, \mu_j^2 \,+\, \cdots)\, (r_j^0 \,+\, \epsilon\, q_j^1 \,+\, \epsilon^2\, q_j^2 \,+\, \cdots)\,. \end{array} \right.$$

Il vient à l'ordre 0 en ϵ :

$$(2.14) \qquad H \bullet r_j^0 \;=\; \lambda_j^0 \, r_j^0$$

et à l'ordre 1 en ϵ :

$$(2.15) \qquad H \bullet q_j^1 \;+\; W \bullet r_j^0 \;=\; \lambda_j^0 \, q_j^1 \;+\; \mu_j^1 \, r_j^0 \,.$$

On regarde le développement des deux membres de la relation (2.15) sur les vecteurs propres r_k^0 de l'opérateur H. Pour la composante de q_j^1 sur r_j^0, on sait par l'hypothèse 1 (relation (2.5)) qu'elle est nulle, donc il en est de même de $H \bullet q_j^1$. On en déduit la relation (2.10) : la valeur propre au premier ordre est égale à l'élément de matrice de la perturbation, considéré sur le vecteur propre initial r_j^0. Pour les autres commposantes r_k^0, on déduit des relations (2.3), (1.3) et (2.8) :

$$(2.16) \qquad \lambda_k^0 \, U_{k\,j}^1 \;+\; W_{k\,j}^0 \;=\; \lambda_j^0 \, U_{k\,j}^1 \;, \qquad k \neq j$$

ce qui établit immédiatement les relations (2.11) et (2.12) et montre la proposition 1. $\square$

Proposition 2. Relation de récurrence.

Une fois calculé le vecteur propre r_j^ϵ à l'ordre $l-1$ ainsi que la valeur propre λ_j^ϵ au même ordre de précision, on a :

$$(2.17) \qquad \mu_j^l \;=\; W_{j\,j}^{l-1}$$

$$(2.18) \qquad q_j^l \;=\; \sum_{k \neq j} \frac{1}{\lambda_j^0 \,-\, \lambda_k^0} \left[W_{k\,j}^{l-1} \;-\; \sum_{i=1}^{l-1} \mu_j^i \; U_{k\,j}^{l-i} \right] r_k^0$$

qui s'écrit, compte tenu de (2.3), sous la forme

$$(2.19) \qquad U_{m\,j}^l \;=\; \frac{1}{\lambda_j^0 \,-\, \lambda_k^0} \left(W_{m\,j}^{l-1} \;-\; \sum_{i=1}^{l-1} \mu_j^i \; U_{m\,j}^{l-i} \right) \,, \qquad m \neq j \,.$$

Preuve de la Proposition 2.

- On part toujours de la relation générale (2.13), mais on va cette fois chercher le terme en ϵ^l :

$$(2.20) \qquad H \bullet q_j^l \,+\, W \bullet q_j^{l-1} \;=\; \lambda_j^0 \, q_j^l \,+\, \sum_{i=1}^{l-1} \; \mu_j^i \; q_j^{l-i} \,+\, \mu_j^l \; r_j^0 \,.$$

On développe les divers termes de cette relation dans la base initiale r_k^0 $(k = 1, \ldots, N)$. Il vient :

$$H \bullet q_j^l \;=\; \sum_{k \neq j} \lambda_k^0 \, U_{k\,j}^l \, r_k^0 \tag{2.21}$$

$$W \bullet q_j^{l-1} \;=\; \sum_{k=1}^{N} W_{k\,j}^{l-1} \, r_k^0 \tag{2.22}$$

$$\lambda_j^0 \, q_j^l \;=\; \sum_{k \neq j} \lambda_j^0 \, U_{k\,j}^l \, r_k^0 \tag{2.23}$$

$$\sum_{i=1}^{l-1} \mu_j^i \, q_j^{l-i} \;=\; \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{k \neq j} \mu_j^i \, U_{k\,j}^{l-i} \, r_k^0 \,. \tag{2.24}$$

• On identifie d'abord les contributions sur le vecteur propre r_j^0. On a : $W_{j\,j}^{l-1} = \mu_j^l$ qui est une ré-écriture de la relation (2.17). Sur le $k^{\text{ième}}$ vecteur propre r_k^0 $(k \neq j)$, on trouve

$$\lambda_k^0 \, U_{k\,j}^l \;+\; W_{k\,j}^{l-1} \;=\; \lambda_j^0 \, U_{k\,j}^l \;+\; \sum_{i=1}^{l-1} \mu_j^i \, U_{k\,j}^{l-i} \tag{2.25}$$

ce qui établit immédiatement la relation (2.19), puis la relation (2.18) compte tenu de (2.3). □

• On note au sein des relations (2.11), (2.12), (2.18) et (2.19) le caractère crucial de l'hypothèse (1.4) qui exprime que toutes les valeurs propres de l'opérateur initial H sont simples, et permet de ne pas annuler les dénominateurs $\lambda_j^0 - \lambda_k^0$ pour $j \neq k$.

Proposition 3. Algorithme.
Les suites $W_{k\,j}^l$ $(k, j \in \{1, \ldots, N\})$ et $U_{k\,j}^l$ $(k \neq j)$ se calculent grâce à l'algorithme récurrent suivant :

$$W \bullet r_j^0 \;=\; \sum_{i=1}^{m} W_{k\,j}^0 \, r_k^0 \tag{2.26}$$

$$U_{k\,j}^0 \;=\; \delta_{k\,j} \tag{2.27}$$

$$W_{k\,j}^l \;=\; \sum_{m \neq j} W_{k\,m}^0 \, U_{m\,j}^l \tag{2.28}$$

$$U_{j\,j}^{l+1} \;=\; 0 \,, \qquad l \geq 1 \tag{2.29}$$

$$(2.30) \qquad U_{k\,j}^{l+1} \;=\; \frac{1}{\lambda_j^0 \,-\, \lambda_k^0} \Big[W_{k\,j}^l \,-\, \sum_{i=1}^{l} \, W_{j\,j}^i \, U_{k\,j}^{l+1-i} \Big] \,, \qquad k \neq j \,.$$

Preuve de la Proposition 3.

• La relation (2.26) n'est qu'une réécriture de la relation (2.8) qui explicite le développement de la perturbation W dans la base des vecteurs propres de H. La relation (2.27) exprime que pour $\epsilon = 0$, la perturbation est nulle, donc les vecteurs propres de l'opérateur $A(\epsilon)$ sont choisis égaux à ceux de H. La relation (2.28) est une réécriture de la relation (2.9) et permet de calculer l'image $W \bullet q_j^l$ du $l^{\text{ième}}$ terme du $j^{\text{ième}}$ vecteur propre par la perturbation W, ce dans la base r_k^0 des vecteurs propres de H. La relation (2.29) est une conséquence immédiate du "scaling" (2.6) des vecteurs propres. La relation (2.30) est une réécriture de (2.19) qui explicite le calcul du contributeur q_j^{l+1} au $j^{\text{ième}}$ vecteur propre r_j^ϵ en fonction des étapes antérieures.

• On remarque que les relations (2.26) à (2.30) éliminent le $l^{\text{ième}}$ contributeur μ_j^l de la $j^{\text{ième}}$ valeur propore λ_j^ϵ (relation (2.1)) mais la relation (2.17) rappelle l'importance pratique du $l^{\text{ième}}$ terme diagonal $W_{j\,j}^l$. Le résultat est établi. $\square$

3) Equation d'évolution perturbée.

Proposition 4. Changement de base des vecteurs propres.

La base r_j^ϵ $(j = 1, \ldots, N)$ étant calculée en fonction de la base initiale r_k^0 des vecteurs propres de l'opérateur H grâce à la relation issue de (2.2), (2.3), (2.5) et (2.6) :

$$(3.1) \qquad r_j^\epsilon \;=\; \sum_{l=0}^{+\infty} \, \sum_{k=0}^{N} \, \epsilon^l \, U_{k\,j}^l \, r_k^0 \,,$$

$$(3.2) \qquad r_k^0 \;=\; \sum_{l=0}^{+\infty} \, \sum_{m=0}^{N} \, \epsilon^l \, V_{m\,k}^l \, r_m^\epsilon$$

avec

$$(3.3) \qquad V_{m\,k}^0 \;=\; \delta_{m\,k}$$

$$(3.4) \qquad V^l \;=\; \sum_{(p_1,\, \ldots\,,\, p_\sigma) \,\in\, K_l} \big(-U^{p_1} \big) \, \ldots \, \big(-U^{p_\sigma} \big) \,.$$

où

(3.5) $$K_l \;=\; \{\,(p_1,\,\ldots,\,p_\sigma) \in (\mathbf{N}^*)^\sigma\,,\;1 \leq \sigma \,\leq\, l,\; p_1\,+\,\ldots\,+\,p_\sigma \,=\, l\,\}\,.$$

Preuve de la Proposition 4.

• Il s'agit d'inverser formellement la matrice

(3.6) $$Y^\epsilon \;=\; I\,+\,\sum_{l=0} \epsilon^l\,U^l\,.$$

Il suffit de rechercher l'inverse sous la forme

(3.7) $$T^\epsilon \;=\; I\,+\,\sum_{l'=1}^{\infty} \epsilon^{l'}\;V^{l'}\,.$$

On regarde le terme d'ordre l dans l'expression du produit $Y^\epsilon \bullet T^\epsilon$. On trouve :

(3.8) $$V^l\,+\,U^1 \bullet V^{l-1}\,+\,\ldots\,+\,U^{l-1} \bullet V^1\,+\,U^l \;=\; 0\,.$$

• On tire donc facilement de la relation (3.8) les relations suivantes :

(3.9) $$V^1 \;=\; -U^1$$

(3.10) $$V^2 \;=\; (U^1)^2\,-\,U^2$$

(3.11) $$V^3 \;=\; -(U^1)^3\,+\,U^1 \bullet U^2\,+\,U^2 \bullet U^1\,-\,U^3$$

qui permettent de deviner la relation générale (3.6).

• On observe ensuite que l'ensemble K_l est composé de $2^{l-1}\,\sigma -$ uplets : il faut séparer l jetons en au plus l paquets de taille arbitraire. Il y a une façon de faire un paquet de taille l, $(l-1)$ façons de faire deux paquets, ce qui revient à placer un séparateur **entre** deux jetons parmi les l. De manière générale, il y a $\mathrm{C}_{l-1}^{\sigma}$ façons de faire σ paquets et il vient aisément :

(3.12) $$\sharp\,K_l \;=\; 1\,+\,(l-1)\,+\,\mathrm{C}_{l-1}^{2}\,+\,\ldots\,+\,\mathrm{C}_{l-1}^{l-1} \;=\; 2^{l-1}\,.$$

• On a la propriété suivante de récurrence entre les ensembles K_σ :

(3.13) $$K_l \;=\; (1,\,K_{l-1}) \cup (2,\,K_{l-2}) \cup \ldots \cup (l-1,\,K_1) \cup \{l\}$$

qui signifie que pour faire des sous-paquets de l jetons, on commence par en choisir un, puis on fait des sous-paquets parmi les $(l-1)$ restants, puis on en choisit deux et on fait des sous-paquets parmi les $(l-2)$ restants, et ainsi de suite jusqu'à $l-1$. Il convient alors de ne pas oublier le paquet formé des l jetons. A partir des relations (3.8) et (3.13), la démonstration par récurrence de la propriété (3.4) est immédiate et a été initialisée aux relations (3.9) à (3.11). $\square$

• On dispose donc du développement (1.7), de la condition initiale $X(0)$ dans la base r_j^ϵ, qu'il convient de comparer avec le développement analogue pour $\epsilon = 0$, supposé connu :

$$X(0) \;=\; \sum_{k=1}^{N} X_k^0(0)\, r_k^0 \,. \tag{3.14}$$

Grâce aux relations (3.1) et (3.2), on a :

$$X_j^\epsilon(0) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty} \epsilon^l \,\sum_{k=1}^{N} V_{j\,k}^l \; X_k^0(0) \tag{3.15}$$

$$X_m^0(z) \;=\; \sum_{l'=0}^{\infty} \epsilon^{l'} \,\sum_{p=1}^{N} U_{m\,p}^{l'} \; X_p^\epsilon(z)\,. \tag{3.16}$$

On utilise alors les relations (1.9) et (1.11) pour calculer les composantes du vecteur $X^\epsilon(z)$ dans la base initiale r_k^0. On a :

$$\begin{aligned}
X_m^0(z) \;&=\; \sum_{l'=0}^{\infty} \epsilon^{l'} \,\sum_{p=1}^{N} U_{m\,p}^{l'} \; X_p^\epsilon(z)\,. \\
&=\; \sum_{l'=0}^{\infty} \epsilon^{l'} \,\sum_{p=1}^{N} U_{m\,p}^{l'} \; \mathrm{e}^{-(\lambda_p^0 \,+\, \epsilon\,\mu_p^1 \,\ldots\,)\,z} \;\; X_j^\epsilon(0) \\
&=\; \sum_{l'=0}^{\infty} \epsilon^{l'} \,\sum_{p=1}^{N} U_{m\,p}^{l'} \; \mathrm{e}^{-(\lambda_p^0 \,+\, \epsilon\,\mu_p^1 \,\ldots\,)\,z} \;\; \sum_{l=0}^{\infty} \epsilon^l \,\sum_{k=1}^{N} V_{p\,k}^l \; X_k^0(0) \\
&=\; \sum_{k=1}^{N} \biggl(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{N} \epsilon^{l\,+\,l'} \; U_{m\,p}^{l'} \; \mathrm{e}^{-(\lambda_p^0 \,+\, \epsilon\,\mu_p^1 \,\ldots\,)\,z} \;\; V_{p\,k}^l \biggr) \; X_k^0(0)\,.
\end{aligned}$$

Nous venons de montrer la

Proposition 5. Perturbation pour l'équation différentielle.
Si $X(z)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire (1.1), avec un opérateur $A(\epsilon)$ qui est la perturbation (relation (1.2)) d'un opérateur H dont on connaît les vecteurs propres r_j^0 et les valeurs propres toutes distinctes λ_j^0, la composante $X_j^0(z)$ de la solution dans la base de vecteurs propres de

l'opérateur non perturbé, se calcule à partir des composantes $X_k^0(0)$ à l'aide de la relation

$$(3.17) \quad X_j^0(z) = \sum_{l,\,l'} \epsilon^{l\,+\,l'} \Big(\sum_{k=1}^{N} \sum_{p=1}^{N} U_{m\,p}^{l'} \, \mathrm{e}^{-(\lambda_p^0 \,+\, \epsilon\,\mu_p^1 \,\ldots\,)\,z} \, V_{p\,k}^{l} \Big) \, X_k^0(0) \, .$$

La matrice $U^{l'}$ prend en compte la perturbation W à l'aide de la proposition 3 et la matrice V^l se calcule à partir de la famille précédente grâce à la proposition 4.

4) Application à l'équation des télégraphistes.

• Il s'agit du système obtenu en prenant $N = 2\,n$, $V \in \mathbb{R}^n$, $I \in \mathbb{R}^n$:

$$(4.1) \qquad X \;=\; \begin{pmatrix} V \\ I \end{pmatrix} \;, \quad A(s) \;=\; s \Big(H \;+\; \frac{1}{s}\, W \Big)$$

$$(4.2) \qquad H \;=\; \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & 0 \end{pmatrix} \;, \quad W \;=\; \begin{pmatrix} 0 & R \\ G & 0 \end{pmatrix}$$

et s, variable de Laplace, est un infiniment grand.

• On cherche d'abord les vecteurs propres de H. On diagonalise la matrice $L{\bullet}C$ qui est la conjuguée d'une matrice symétrique, puisque les matrices L et C sont symétriques et définies positives :

$$(4.3) \qquad L \bullet C \;=\; L^{1/2} \bullet \big(L^{1/2} \bullet C \bullet L^{1/2} \big) \bullet L^{-1/2} \, .$$

Par suite, il existe une matrice diagonale Γ strictement positive et une matrice S inversible telles que

$$(4.4) \qquad L \bullet C \;=\; S \bullet \Gamma^2 \bullet S^{-1} \, .$$

On pose ensuite

$$(4.5) \qquad L \bullet T \;=\; S \bullet \Gamma$$

et on a le calcul suivant :

$$\begin{aligned} C \bullet L \bullet T \;&=\; C \bullet S \bullet \Gamma \;=\; L^{-1} \bullet (L \bullet C) \bullet S \bullet \Gamma \;= \\ &=\; L^{-1} \bullet \big(S \bullet \Gamma^2 \bullet S^{-1} \big) \bullet S \bullet \Gamma \;=\; L^{-1} \bullet S \bullet \Gamma^3 \, . \end{aligned}$$

Or $T \,=\, L^{-1} \bullet S \bullet \Gamma$, donc $C \bullet L \bullet T \,=\, T \bullet \Gamma^2$ et

$$(4.6) \qquad C \bullet L \;=\; T \bullet \Gamma^2 \bullet T^{-1} \, .$$

• La matrice H se diagonalise donc sous la forme

$$(4.7) \qquad \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S{\bullet}\Gamma & -S{\bullet}\Gamma \\ T{\bullet}\Gamma & T{\bullet}\Gamma \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & -\Gamma \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} S{\bullet}\Gamma & -S{\bullet}\Gamma \\ T{\bullet}\Gamma & T{\bullet}\Gamma \end{pmatrix}^{-1}$$

comme le montre le calcul suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & L \\ C & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} S{\bullet}\Gamma & -S{\bullet}\Gamma \\ T{\bullet}\Gamma & T{\bullet}\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L{\bullet}T{\bullet}\Gamma & L{\bullet}T{\bullet}\Gamma \\ C{\bullet}S{\bullet}\Gamma & -C{\bullet}S{\bullet}\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S{\bullet}\Gamma^2 & S{\bullet}\Gamma^2 \\ C{\bullet}L{\bullet}T & -C{\bullet}L{\bullet}T \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S{\bullet}\Gamma & -S{\bullet}\Gamma \\ T{\bullet}\Gamma & T{\bullet}\Gamma \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & -\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S{\bullet}\Gamma^2 & S{\bullet}\Gamma^2 \\ T{\bullet}\Gamma^2 & -T{\bullet}\Gamma^2 \end{pmatrix}$$

puisque $C{\bullet}L{\bullet}T = T{\bullet}\Gamma^2$ compte tenu de (4.6). On remarque aussi que l'on a

$$(4.8) \qquad \begin{pmatrix} S{\bullet}\Gamma & -S{\bullet}\Gamma \\ T{\bullet}\Gamma & T{\bullet}\Gamma \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Gamma^{-1}{\bullet}S^{-1} & \Gamma^{-1}{\bullet}T^{-1} \\ -\Gamma^{-1}{\bullet}S^{-1} & \Gamma^{-1}{\bullet}T^{-1} \end{pmatrix} .$$

• Ainsi, la solution de l'équation des télégraphistes, *i.e.*

$$(4.9) \qquad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}z} + s\Big(H + \frac{1}{s} W\Big) \bullet X = 0$$

fait apparaître pour $W = 0$ les variables caractéristiques dans la base des vecteurs propres, à savoir :

$$(4.10) \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Gamma^{-1}{\bullet}S^{-1} & \Gamma^{-1}{\bullet}T^{-1} \\ -\Gamma^{-1}{\bullet}S^{-1} & \Gamma^{-1}{\bullet}T^{-1} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} V \\ I \end{pmatrix} .$$

La propagation entre les abscisses 0 et z s'écrit alors naturellement $X(z) = \exp(-s\,z\,H) \bullet X(0)$ soit

$$(4.11) \quad X(z) = \begin{pmatrix} S{\bullet}\Gamma & -S{\bullet}\Gamma \\ T{\bullet}\Gamma & T{\bullet}\Gamma \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-s\,z\,\Gamma} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{s\,z\,\Gamma} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} S{\bullet}\Gamma & -S{\bullet}\Gamma \\ T{\bullet}\Gamma & T{\bullet}\Gamma \end{pmatrix}^{-1} \bullet X(0)$$

et cette relation s'écrit aussi, compte tenu de (4.10) :

$$(4.12) \qquad \alpha(z) = \mathrm{e}^{-s\,z\,\Gamma} \bullet \alpha(0) , \qquad \beta(z) = \mathrm{e}^{s\,z\,\Gamma} \bullet \beta(0)$$

puis après développement de la relation (4.10) :

$$(4.13) \qquad S^{-1} \bullet V(z) + T^{-1} \bullet I(z) = \mathrm{e}^{-s\,z\,\Gamma} \bullet \big(S^{-1} \bullet V(0) + T^{-1} \bullet I(0)\big)$$

$$(4.14) \qquad -S^{-1} \bullet V(z) + T^{-1} \bullet I(z) = \mathrm{e}^{s\,z\,\Gamma} \bullet \big(-S^{-1} \bullet V(0) + T^{-1} \bullet I(0)\big) .$$

• Lorsque la perturbation W est non nulle, on applique la méthode des perturbations étudiée aux paragraphes précédents.