

Collocation mixte pour les équations différentielles non-linéaires d'ordre fractionnaire

François Dubois^{*†} et Stéphanie Mengué[‡]

29 juin 2001[§]

Résumé

Pour l'étude d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire, nous proposons deux versions d'une méthode numérique directe fondée sur l'idée de l'approximation par éléments finis mixtes. C'est une méthode de collocation où l'équation à résoudre est écrite fortement aux points de la grille de discrétisation. Nous avons validé notre approche à partir de solutions exactes et d'expériences numériques issues de la littérature. Pour un cas numériquement délicat, nous montrons que la collocation mixte est efficace et conduit à des résultats significatifs.

* *Applications Scientifiques du Calcul Intensif, UPR-CNRS n°9029, bâtiment 506, B.P. 167, F-91403 Orsay, Union Européenne. Mel: dubois@asci.fr.*

† *Conservatoire National des Arts et Métiers, Equipe de recherche associée n°3196, 15, rue Marat, F-78210 Saint-Cyr-L'Ecole, Union Européenne.*

‡ *Université de Marne-La-Vallée, Laboratoire Systèmes de Communication, bâtiment Copernic, F-77454 Marne-La-Vallée cedex 2, Union Européenne. Mel: smengue@univ-mlv.fr.*

§

Edition du 05 novembre 2005.

1 Introduction

• Soit β un nombre réel strictement compris entre 0 et 1. Nous cherchons à approcher le “problème à valeur initiale” pour une équation différentielle non linéaire d’ordre fractionnaire β . On peut écrire ce problème sous la forme :

$$(1) \quad \begin{cases} D^\beta (u - u_0) & = \Phi(u(t), t), & t > 0 \\ u - u_0 & = 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Dans la relation (1), la fonction $\mathbb{R} \times [0, \infty[\ni (u, t) \mapsto \Phi(u, t) \in \mathbb{R}$ est une application régulière et D^β est l’opérateur de dérivation d’ordre β , défini par :

$$(2) \quad (D^\beta u)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{(t-\theta)^{1-\beta}}.$$

• Nous fixons quelques notations. Soit $h > 0$ un pas de discrétisation temporelle et $t^j = jh$, ($j = 0, 1, \dots$ i.e. $j \in \mathbb{N}$) l’ensemble des points de grille, appelés aussi “sommets” du maillage \mathcal{T}_h de l’intervalle $[0, +\infty[$ paramétré par le réel h . L’ensemble des “éléments” de ce maillage est constitué des intervalles $K_{j+\frac{1}{2}}^h$ de la forme

$$(3) \quad K_{j+\frac{1}{2}}^h =]jh, (j+1)h[, \quad j \in \mathbb{N}.$$

• Nous introduisons trois espaces de “fonctions discrètes” notés P_1^h , Q_0^h , et Q_1^h . Dans un premier temps nous définissons P_1^h comme l’espace des fonctions affines dans chaque intervalle $K_{j+\frac{1}{2}}^h$, continues sur $[0, \infty[$:

$$(4) \quad P_1^h = \{v \in C^0([0, +\infty[), v|_{[jh, (j+1)h]} \in P_1, \forall j \in \mathbb{N}\}$$

où P_1 désigne l’espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à un :

$$(5) \quad P_1 = \{v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \exists a, b \in \mathbb{R}, v(x) = a + bx\}.$$

Une fonction $v \in P_1^h$ se développe sur la base $(\varphi_k^h)_{k \in \mathbb{N}}$ des fonctions “cha-peaux”:

$$(6) \quad \varphi_0^h(\theta) = \begin{cases} 1 - \frac{\theta}{h}, & 0 \leq \theta \leq h \\ 0, & \theta \geq h \end{cases}$$

$$(7) \quad \varphi_k^h(\theta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{h}(\theta - t^k), & t^k \leq \theta \leq t^{k+1} \\ 1 + \frac{1}{h}(\theta - t^k), & t^{k-1} \leq \theta \leq t^k, \\ 0, & |\theta - t^k| \geq h \end{cases}, \quad k \geq 1$$

à l'aide de ses valeurs $v_k \equiv v(t^k)$ aux points de la grille :

$$(8) \quad v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \varphi_k^h.$$

- Le maillage régulier de $[0, \infty[$ restant fixé par le pas h , nous introduisons dans un second temps l'espace Q_0^h des fonctions constantes (ou polynomiales de degré zéro, *i.e.* appartenant à l'espace P_0) dans chaque intervalle de la forme $K_{j+\frac{1}{2}}^h$ ($j \in \mathbb{N}$) :

$$(9) \quad Q_0^h = \{ v, \forall k \in \mathbb{N}, \exists v_{k+\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}, \forall x \in]kh, (k+1)h[, v(x) = v_{k+\frac{1}{2}} \}.$$

Les fonctions de base de l'espace Q_0^h sont notées $\chi_{k+\frac{1}{2}}^h$ ($k \in \mathbb{N}$) et sont définies par

$$(10) \quad \chi_{k+\frac{1}{2}}^h(\theta) = \begin{cases} 1, & t^k < \theta < t^{k+1} \\ 0, & |\theta - (k + \frac{1}{2})h| \geq \frac{h}{2}. \end{cases}$$

Ainsi, $v \in Q_0^h$ se développe sur la base des $\chi_{k+\frac{1}{2}}^h$ selon la relation

$$(11) \quad v = \sum_{k=0}^{\infty} v_{k+\frac{1}{2}} \chi_{k+\frac{1}{2}}^h, \quad v \in Q_0^h.$$

- Enfin, on introduit l'espace Q_1^h des fonctions affines dans chaque intervalle $K_{j+\frac{1}{2}}^h$ ($j \in \mathbb{N}$) éventuellement discontinues aux points de grille t^j aux bords des intervalles précédents.

$$(12) \quad Q_1^h = \{ v, \forall k \in \mathbb{N}, v|_{]kh, (k+1)h[} \in P_1 \}.$$

Une fonction $v \in Q_1^h$ est déterminée d'une part par sa valeur moyenne $v_{k+\frac{1}{2}}$ dans l'intervalle $]kh, (k+1)h[$ et d'autre part par la valeur moyenne $g_{k+\frac{1}{2}}$ de sa dérivée dans ce même intervalle. Il est donc naturel d'introduire les fonctions de base $\eta_{k+\frac{1}{2}}^h$ associées à ce dernier degré de liberté. On pose

$$(13) \quad \eta_{k+\frac{1}{2}}^h(\theta) = \begin{cases} \theta - (k + \frac{1}{2})h, & t^k < \theta < t^{k+1} \\ 0, & |\theta - (k + \frac{1}{2})h| \geq \frac{h}{2}. \end{cases}$$

La représentation graphique de $\eta_{k+\frac{1}{2}}^h$ (figure 1) montre qu'on utilise une "N-wave" de l'acoustique non linéaire (voir par exemple Whitham [Wh74]).

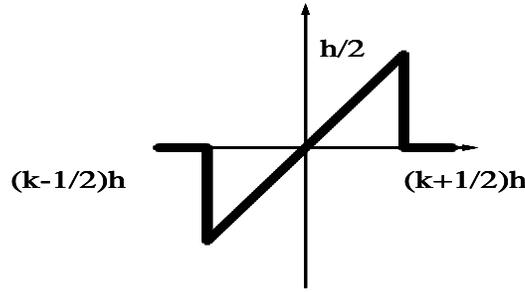


Figure 1. Fonction $\eta_{k+\frac{1}{2}}^h$ ($k \in \mathbb{N}$).

2 Schéma de collocation mixte

- L'idée est d'intégrer l'équation (1) à l'aide de l'intégrateur fractionnaire I^β d'ordre β . Celui-ci est défini par

$$(14) \quad I^\beta (v(\bullet), t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - \theta)^{\beta-1} v(\theta) d\theta$$

et il vérifie l'équation fonctionnelle

$$(15) \quad I^\beta D^\beta \equiv Id.$$

La relation (1) se réécrit donc

$$(16) \quad u(t) - u_0 = I^\beta (\Phi(u(\bullet), t)), \quad t \geq 0.$$

- La première méthode de collocation mixte, nommée P_1Q_0 dans la suite, consiste à approcher la fonction inconnue $u(\bullet)$ par $u^h(\bullet)$ affine par morceaux et continue

$$(17) \quad u^h \in P_1^h.$$

On approche également le flux $\Phi(u(\bullet), t)$ par une fonction du temps f^h qu'on choisit discontinue et constante dans chaque maille $K_{j+\frac{1}{2}}^h$:

$$(18) \quad f^h \in Q_0^h.$$

C'est d'une part une méthode de collocation : on écrit que la relation (16) est satisfaite aux points de grille t^j si on emploie la fonction de flux approchée f^h :

$$(19) \quad u^h(t^j) - u_0 = I^\beta (f^h(\bullet), t^j), \quad j \in \mathbb{N}.$$

D'autre part, c'est une approche inspirée des éléments finis mixtes. On ne peut pas écrire que pour toute valeur du temps t , on a $f^h(t) = \Phi(u^h(t), t)$. Aussi la méthode de collocation mixte P_1Q_0 demande seulement qu'en moyenne sur l'intervalle $K_{j+\frac{1}{2}}^h$, le flux approché $f^h(\bullet)$ et le flux exact de la solution approchée, à savoir $\Phi(u^h(\bullet), \bullet)$, coïncident. On a donc

$$(20) \quad \int_{jh}^{(j+1)h} \Phi(u^h(\theta), \theta) \, d\theta = \int_{jh}^{(j+1)h} f^h(\theta) \, d\theta, \quad j \in \mathbb{N}.$$

• La seconde méthode mixte P_1Q_1 suppose que le flux approché $f^h(\bullet)$ est une fonction affine discontinue sur le maillage :

$$(21) \quad f^h \in Q_1^h.$$

La relation (19) reste valable, ainsi que la relation (20), mais on ajoute également que f^h est la projection L^2 (en moyenne quadratique) de $\Phi(u^h(\bullet), \bullet)$ sur l'espace Q_1^h . On a donc en plus des relations (19), (20) et (21), la condition :

$$(22) \quad \int_{jh}^{(j+1)h} \Phi(u^h(\theta), \theta) \eta_{j+\frac{1}{2}}^h(\theta) \, d\theta = \int_{jh}^{(j+1)h} f^h(\theta) \eta_{j+\frac{1}{2}}^h(\theta) \, d\theta, \quad j \in \mathbb{N}.$$

La relation (19) se traduit par une contrainte entre l'état u^h et le flux f^h . On pose

$$(23) \quad u^h = \sum_{j=0}^{\infty} u_j^h \varphi_j^h,$$

$$(24) \quad f^h = \sum_{j=0}^{\infty} \left(f_{j+\frac{1}{2}}^h \chi_{j+\frac{1}{2}}^h + g_{j+\frac{1}{2}}^h \eta_{j+\frac{1}{2}}^h \right)$$

et $g_{j+\frac{1}{2}}^h$ est identiquement nul si on emploie le premier schéma de collocation mixte.

Proposition 1. Contrainte état-flux pour le schéma P_1Q_0 .

Avec le choix (17) (18) et les notations (23) (24), la relation (19) s'écrit

$$(25) \quad u_{j+1}^h - \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+1)} f_{j+\frac{1}{2}}^h = u_0 + \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{j-k} f_{k+\frac{1}{2}}^h, \quad j \in \mathbb{N},$$

avec

$$(26) \quad \alpha_k \equiv (k+1)^\beta - k^\beta, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Preuve de la proposition 1.

On évalue le second membre de la relation (19) pour l'instant discret t^{j+1} .

On a :

$$\begin{aligned}
I^\beta (f^h(\bullet), t^{j+1}) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t^{j+1}} (t^{j+1} - \theta)^{\beta-1} f^h(\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^j \int_{kh}^{(k+1)h} (t^{j+1} - \theta)^{\beta-1} f^h(\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^j f_{k+\frac{1}{2}}^h \int_0^1 [(j+1)^h - (kh + h\xi)]^{\beta-1} h d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^j f_{k+\frac{1}{2}}^h h^\beta \left(\frac{-1}{\beta}\right) [(j+1-k-\xi)^\beta]_{\xi=0}^{\xi=1} \\
&= \frac{1}{\beta \Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^j f_{k+\frac{1}{2}}^j h^\beta [(j+1-k)^\beta - (j-k)^\beta] \\
&= \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \sum_{k=0}^j f_{k+\frac{1}{2}}^h \alpha_{j-k} \quad \text{compte tenu de (26)}
\end{aligned}$$

et la relation (25) résulte alors directement de (19). \square

Lemme 1.

Soit $\alpha \geq 0$ et $0 < \beta < 1$. On a

$$(27) \quad \begin{cases} \int_0^1 (\alpha+1-\theta)^{\beta-1} \left(\theta - \frac{1}{2}\right) d\theta \\ = \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{\beta(\beta+1)} [(\alpha+1)^\beta - \alpha^\beta] - \frac{1}{2(\beta+1)} [(\alpha+1)^\beta + \alpha^\beta]. \end{cases}$$

Preuve du lemme 1.

On pose $u = (\alpha+1-\theta)^{\beta-1}$ dans l'intégrale de la relation (27).

On a $\frac{1}{\beta-1} \frac{1}{u} u^{\frac{1}{\beta-1}} du = -d\theta$, d'où

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (\alpha+1-\theta)^{\beta-1} \left(\theta - \frac{1}{2}\right) d\theta \\
&= \int_{\alpha^{\beta-1}}^{(\alpha+1)^{\beta-1}} u \left(\alpha + \frac{1}{2} - u^{\frac{1}{\beta-1}}\right) \frac{u^{\frac{1}{\beta-1}}}{(\beta-1)u} du \\
&= \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \int_{\alpha^{\beta-1}}^{(\alpha+1)^{\beta-1}} u^{\frac{1}{\beta-1}} \frac{du}{\beta-1} - \int_{\alpha^{\beta-1}}^{(\alpha+1)^{\beta-1}} u^{\frac{2}{\beta-1}} \frac{du}{\beta-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta-1}} \frac{1}{\beta-1} \left[u^{\frac{\beta}{\beta-1}} \right]_{\alpha^{\beta-1}}^{(\alpha+1)^{\beta-1}} - \frac{1}{1 + \frac{2}{\beta-1}} \frac{1}{\beta-1} \left[u^{\frac{\beta+1}{\beta-1}} \right]_{\alpha^{\beta-1}}^{(\alpha+1)^{\beta-1}} \\
 &= \frac{1}{\beta} \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \left[(\alpha+1)^\beta - \alpha^\beta \right] - \frac{1}{\beta+1} \left[(\alpha+1)^{\beta+1} + \alpha^{\beta+1} \right] \\
 &= \left[\frac{1}{\beta} \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) - \frac{\alpha+1}{\beta+1} \right] (\alpha+1)^\beta - \left[\left(\alpha + \frac{1}{2} \right) + \frac{\beta}{2} \right] \alpha^\beta \\
 &= \frac{1}{\beta(\beta+1)} \left\{ \left[\alpha + \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} \right] (\alpha+1)^\beta - \left[\left(\alpha + \frac{1}{2} \right) + \frac{\beta}{2} \right] \alpha^\beta \right\}
 \end{aligned}$$

ce qui établit la relation (27) \square

Proposition 2. Contrainte état-flux pour le schéma P_1Q_1 .

Avec le choix (17) (21) et les notations (23) (24), la relation (19) s'écrit

$$(28) \quad \begin{cases} u_{j+1}^h - \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+1)} f_{j+\frac{1}{2}}^h - \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+2)} \frac{1-\beta}{2} g_{j+\frac{1}{2}}^h \\ = u_0 + \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{j-k} f_{k+\frac{1}{2}}^h + \frac{h^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+2)} \sum_{k=0}^{j-1} \gamma_{j-k} g_{k+\frac{1}{2}}^h \end{cases}$$

avec α_k donné à la relation (26) et γ_k par la relation suivante :

$$(29) \quad \gamma_k = \left(k + \frac{1}{2} \right) \left[(k+1)^\beta - k^\beta \right] - \frac{\beta}{2} \left[(k+1)^\beta + k^\beta \right], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Preuve de la proposition 2.

Pour $f^h(\bullet)$ représenté par la relation (24), la contribution des termes appartenant à Q_0^h (termes de la forme $f_{k+\frac{1}{2}}^h \chi_{k+\frac{1}{2}}^h$) a été décrite à la proposition précédente. On les retrouve inchangés à la relation (28). Lorsque $f_{k+\frac{1}{2}}^h \equiv 0$ les termes complémentaires (en $g_{k+\frac{1}{2}}^h \eta_{k+\frac{1}{2}}^h$) conduisent au calcul qui suit :

$$\begin{aligned}
 I^\beta(f^h(\bullet), t^{j+1}) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t^{j+1}} (t^{j+1} - \theta)^{\beta-1} f^h(\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^j \int_{kh}^{(k+1)h} (t^{j+1} - \theta)^{\beta-1} g_{k+\frac{1}{2}}^h \eta_{k+\frac{1}{2}}^h d\theta \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^j \int_{kh}^{(k+1)h} g_{k+\frac{1}{2}}^h (t^{j+1} - \theta)^{\beta-1} \left(\theta - \left(k + \frac{1}{2} \right) h \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^j g_{k+\frac{1}{2}}^h \int_0^1 [(j+1)h - (kh + \xi h)]^{\beta-1} \left(\xi - \frac{1}{2} \right) h d\xi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{h^{\beta+1}}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^j g_{k+\frac{1}{2}}^h \int_0^1 (j-k+1-\xi)^{\beta-1} \left(\xi - \frac{1}{2} \right) d\xi \\
&= \frac{h^{\beta+1}}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^j g_{k+\frac{1}{2}}^h \frac{1}{\beta(\beta+1)} \left\{ \begin{array}{l} (j-k+\frac{1}{2}) \left[(j-k+1)^\beta - (j-k)^\beta \right] \\ -\frac{\beta}{2} \left[(j-k+1)^\beta - (j-k)^\beta \right] \end{array} \right\} \\
&\hspace{15em} \text{compte tenu de la relation (27)} \\
&= \frac{h^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+2)} \sum_{k=0}^j \gamma_{j-k} g_{k+\frac{1}{2}}^h \hspace{10em} \text{au vu de (29)}.
\end{aligned}$$

Ce calcul établit la relation (28), puisque $\gamma_0 = \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2}$ □

• Nous étudions maintenant l'étape de projection sur les fonctions constantes dans le cas du premier schéma P_1Q_0 ($f^h \in Q_0^h$). Dans l'intervalle $[jh, (j+1)h]$, on a

$$(30) \quad u^h(t) = u_j^h(1-\theta) + u_{j+1}^h\theta \quad \text{avec} \quad t = jh(1-\theta) + (j+1)h\theta.$$

La relation (20) s'écrit donc

$$(31) \quad f_{j+\frac{1}{2}}^h = \int_0^1 \Phi(u_j^h(1-\theta) + \theta u_{j+1}^h, jh + \theta h) d\theta, \quad j \in \mathbb{N}$$

et le premier schéma de collocation mixte P_1Q_0 est constitué du couplage des relations (25) et (31). A l'étape j du schéma, les quantités u_0^h, \dots, u_j^h sont connues, ainsi que les flux moyens $f_{\frac{1}{2}}^h, \dots, f_{j-\frac{1}{2}}^h$. La relation (25), jointe à (31), peut alors s'écrire

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{j+1}^h - \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \int_0^1 \Phi(u_j^h(1-\theta) + u_{j+1}^h\theta, jh + \theta h) d\theta = \\ = u_0 + \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{j-k} f_{k+\frac{1}{2}}^h. \end{array} \right.$$

C'est une équation d'inconnue u_{j+1}^h .

• En pratique, si le calcul (formel) de l'intégrale au membre de droite de la relation (31) est possible, la relation (32) est une équation pour laquelle l'inconnue u_{j+1}^h est explicite. Dans le cas contraire, on a recours à une

quadrature numérique. Nous avons utilisé une formule des trapèzes à deux points :

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \Phi(u_j^h(1-\theta) + u_{j+1}^h\theta, jh + \theta h) d\theta \\ \simeq \frac{1}{2} [\Phi(u_j^h, jh) + \Phi(u_{j+1}^h, (j+1)h)] , \quad j \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

Dans ce cas, l'équation (32) s'écrit sous la forme algébrique suivante :

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{j+1}^h - \frac{1}{2\Gamma(\beta+1)} h^\beta \Phi(u_{j+1}^h, t^{j+1}) \\ = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} h^\beta \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{j-k} f_{k+\frac{1}{2}}^h + \frac{h^\beta}{2\Gamma(\beta+1)} \Phi(u_j^h, t^j) \end{array} \right.$$

qui, jointe à la relation (26) et à la relation

$$(35) \quad f_{k+\frac{1}{2}}^h = \frac{1}{2} [\Phi(u_k^h, t^k) + \Phi(u_{k+1}^h, t^{k+1})]$$

explicite complètement l'équation d'inconnue u_{j+1}^h à résoudre numériquement.

- Si on utilise le second schéma de collocation mixte, il faut également préciser l'expression algébrique du gradient discret $g_{k+\frac{1}{2}}^h$ en fonction du flux $\Phi(u^h(\cdot), \cdot)$.

Proposition 3. Gradient discret pour schéma P_1Q_1 .

Dans le cas où $f^h(\cdot)$ est représentée par la relation (24), la relation (22) conduit à l'expression suivante du gradient discret $g_{k+\frac{1}{2}}^h$:

$$(36) \quad g_{k+\frac{1}{2}}^h = \frac{12}{h} \int_0^1 \Phi(u_k^h(1-\theta) + u_{k+1}^h\theta, kh + k\theta h) \left(\theta - \frac{1}{2}\right) d\theta.$$

Preuve de la proposition 3.

On introduit la relation (13) au sein de la relation (24). Compte tenu de la

propriété $\int_{kh}^{(k+1)h} \eta_{k+1/2}^h d\theta = 0$, on a

$$g_{k+\frac{1}{2}}^h = \frac{1}{\int_{kh}^{(k+1)h} \eta_{k+\frac{1}{2}}^h(\theta) d\theta} \int_{kh}^{(k+1)h} \Phi(u^h(\theta), \theta) \eta_{k+\frac{1}{2}}^h d\theta.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{kh}^{(k+1)h} \eta_{k+\frac{1}{2}}^h(\theta) \, d\theta &= \int_{kh}^{(k+1)h} \left(\theta - \left(k + \frac{1}{2} \right) h \right)^2 \, d\theta \\ &= \int_0^1 \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 h^3 \, d\xi = \frac{2h^3}{3 \cdot 8} = \frac{h^3}{12}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \int_{kh}^{(k+1)h} \Phi(u^h(\theta), \theta) \eta_{k+\frac{1}{2}}^h \, d\theta &= \\ &= \int_0^1 \Phi(u_k^h(1-\theta) + u_{k+1}^h\theta, kh + \xi h) h^2 \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \, d\xi \end{aligned}$$

et jointe aux relations précédentes, la formule (36) s'en déduit facilement. \square

• Le second schéma de collocation mixte ($u^h(\bullet) \in P_1^h$, $f^h(\bullet) \in Q_1^h$) est donc complètement défini par les relations (28), (31) et (36). Lorsque la fonctionnelle $\Phi(\bullet, \bullet)$ n'est pas élémentaire à intégrer, il est naturel d'utiliser une formule de quadrature approchée qui utilise explicitement l'annulation du polynôme $(\theta - \frac{1}{2})$ dans l'intervalle $[0, 1]$. Nous avons utilisé la formule de Simpson :

$$(37) \quad \int_0^1 \psi(\theta) \, d\theta \simeq \frac{1}{6} \psi(0) + \frac{2}{3} \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6} \psi(1)$$

qui intègre exactement les polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Utilisée pour les relations (31) et (36), la relation (37) conduit aux relations approchées :

$$(38) \quad f_{k+\frac{1}{2}}^h = \frac{1}{6} \Phi(u_k^h, t^k) + \frac{2}{3} \Phi\left(\frac{1}{2}(u_k^h + u_{k+1}^h), \left(k + \frac{1}{2}\right)h\right) + \frac{1}{6} \Phi(u_{k+1}^h, t^{k+1})$$

$$(39) \quad g_{k+\frac{1}{2}}^h = \frac{1}{h} (\Phi(u_{k+1}^h, t^{k+1}) - \Phi(u_k^h, t^k)).$$

On injecte ensuite ces relations au sein de (28) pour expliciter l'équation d'inconnue u_{j+1}^h à résoudre à la j^{eme} étape du schéma :

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} &u_{j+1}^h - \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \left[\frac{1}{6} \Phi(u_{j+1}^h, t^{j+1}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \Phi\left(\frac{1}{2}(u_j^h + u_{j+1}^h), \left(j + \frac{1}{2}\right)h\right) \right] \\ &- \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+2)} \frac{1-\beta}{2h} \Phi(u_{j+1}^h, t^{j+1}) = \\ &= u_0 + \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{j-k} f_k^h + \frac{h^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+2)} \sum_{k=0}^{j-1} \Phi(u_j^h, t^j), \end{aligned} \right.$$

soit

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} & u_{j+1}^h - \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \left[\frac{2-\beta}{3(\beta+1)} \Phi(u_{j+1}^h, t^{j+1}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{3} \Phi\left(\frac{1}{2}(u_j^h + u_{j+1}^h), (j + \frac{1}{2})h\right) \right] = \\ & = u_0 + \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{j-k} f_k^h + \\ & + \frac{h^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+2)} \sum_{k=0}^{j-1} \gamma_{j-k} g_{k+\frac{1}{2}}^h + \frac{2-\beta}{3} \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+2)} \Phi(u_j^h, t^j) . \end{aligned} \right.$$

3 Présentation de quelques tests numériques

3.1 Tests élémentaires

• Nous reprenons ici les tests élémentaires obtenus dans [DM2k] avec les quatre schémas suivants : schémas de Grünwald-Letnikov à deux et à trois points, schéma de Msallam et schéma par éléments finis nommés en abrégé GL2, GL3, Msallam et EFP₁ respectivement dans la suite. Nous comparons les résultats de la méthode mixte avec ces schémas. Ces tests sont tous effectués avec une semi-différentiation, c'est à dire $\beta = 0.5$. On choisit une dynamique $(u, t) \mapsto \Phi(u, t)$ paramétrée par les fonctions $u \mapsto f(u(t))$ et $t \mapsto g(t)$ et les nombres réels θ_f et θ_g :

$$(42) \quad \Phi(u, t) \equiv \theta_f f(u) + \theta_g g(t) .$$

Les paramètres θ_f et θ_g sont choisis de manière à ce que les solutions conduisent à :

$$(43) \quad u_j(t) \equiv (\sqrt{t})^j, \quad j = 1, \dots, 5 .$$

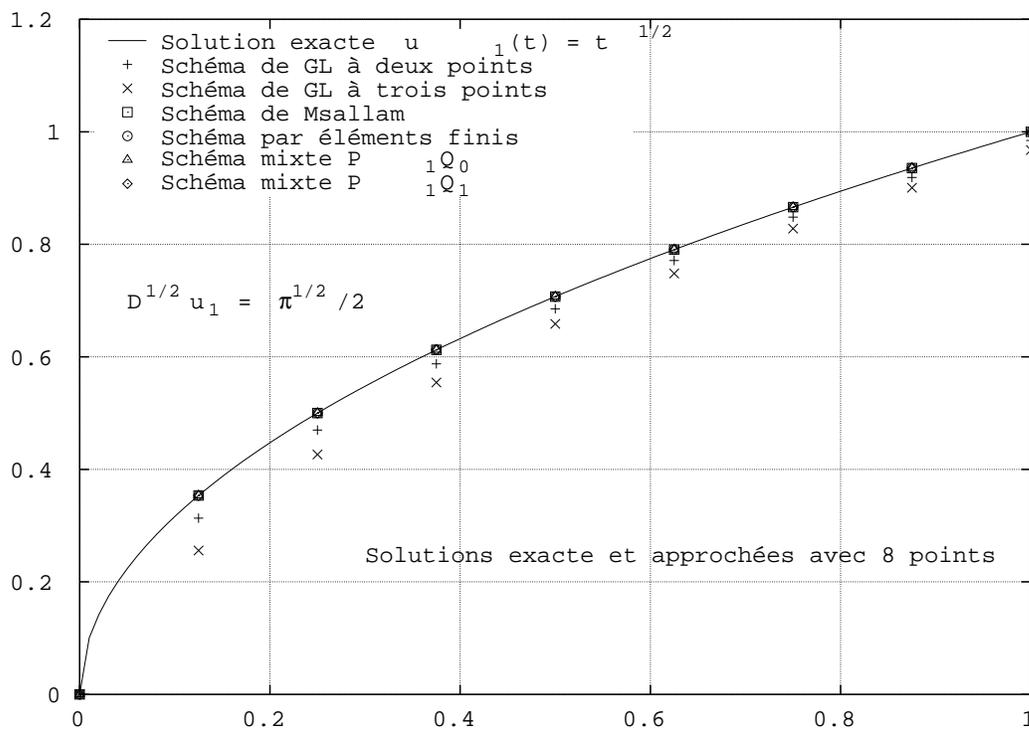
Dans une première approche, nous prenons $\theta_f = 0$ et $\theta_g = 1$; le calcul à effectuer est une simple semi-quadrature. L'équation (1) correspond alors au choix des fonctions particulières $t \mapsto g(t)$ suivantes :

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} g_1(t) &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \\ g_2(t) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} \\ g_3(t) &= \frac{3}{4} \sqrt{\pi} t \\ g_4(t) &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t \sqrt{t} \\ g_5(t) &= \frac{15}{16} \sqrt{\pi} t^2 . \end{aligned} \right.$$

Dans une seconde approche, nous prenons $\theta_f \equiv 1$ et $\theta_g \equiv 0$. On dispose alors des dynamiques associées aux fonctions :

$$(45) \quad \begin{cases} f_1(u) &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\ f_2(u) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{u} \\ f_3(u) &= \frac{3}{4}\sqrt{\pi}u^{\frac{2}{3}} \\ f_4(u) &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}}u^{\frac{3}{4}} \\ f_5(u) &= \frac{15}{16}\sqrt{\pi}u^{\frac{4}{5}}. \end{cases}$$

• Les simulations sont effectuées avec notre logiciel “Semidif”. Les figures suivantes (figures 2 à 11) présentent les résultats des quatre schémas proposés dans [DM00] et les résultats de la méthode mixte, pour les dix équations avec les choix $g_i(t)$, $i = 1, \dots, 5$ et $f_i(u)$, $i = 1, \dots, 5$. Sauf indication contraire, la condition initiale est toujours $u_0 = 0$. Pour une visibilité optimale des courbes, nous présentons nos simulations numériques en utilisant huit points de calcul, soit un pas de maillage $h = \frac{1}{2^n}$ avec $n = 3$. Nous comparons les résultats calculés par les six schémas existants implantés dans le logiciel “Semidif”.



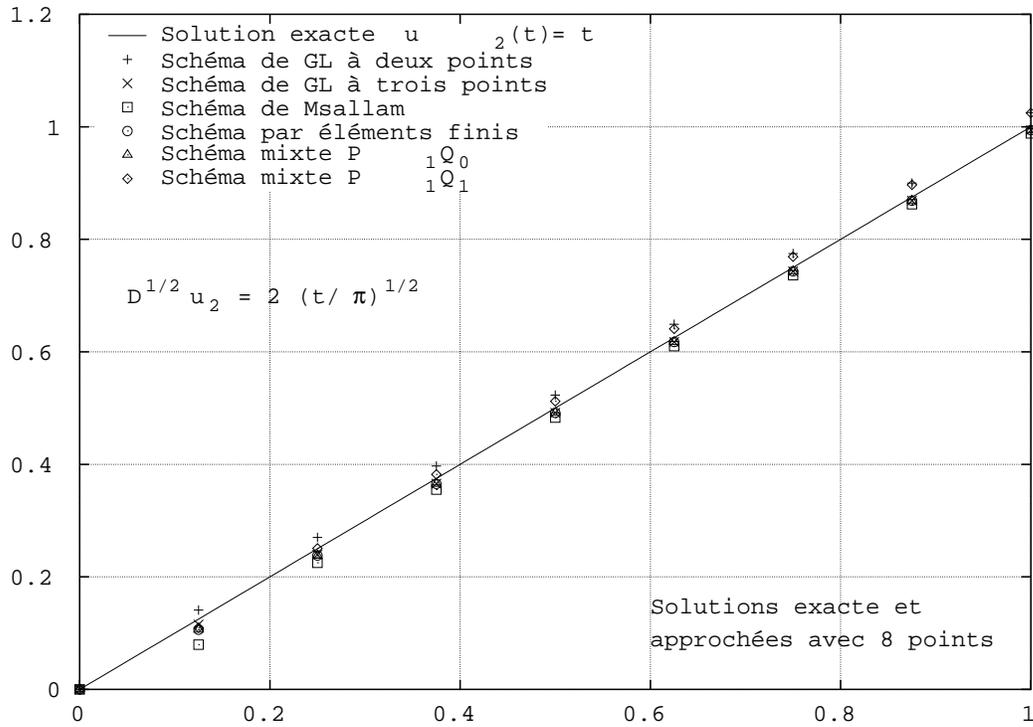


Figure 3. Résolution numérique de $D^{1/2}u = g_2(t)$; $u(t) = t$.

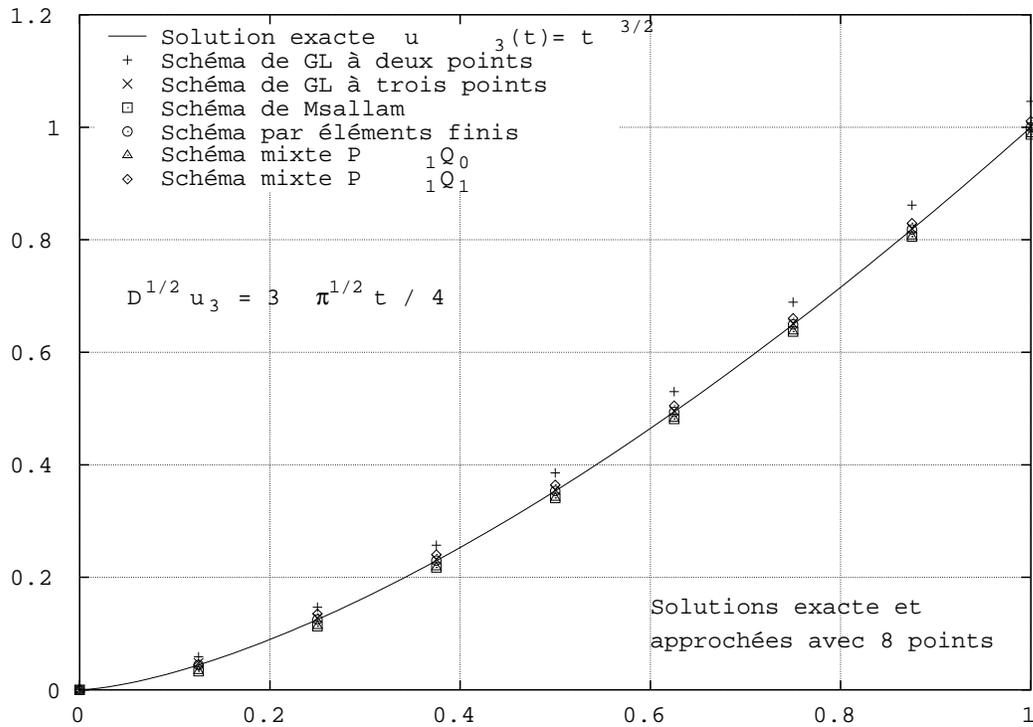
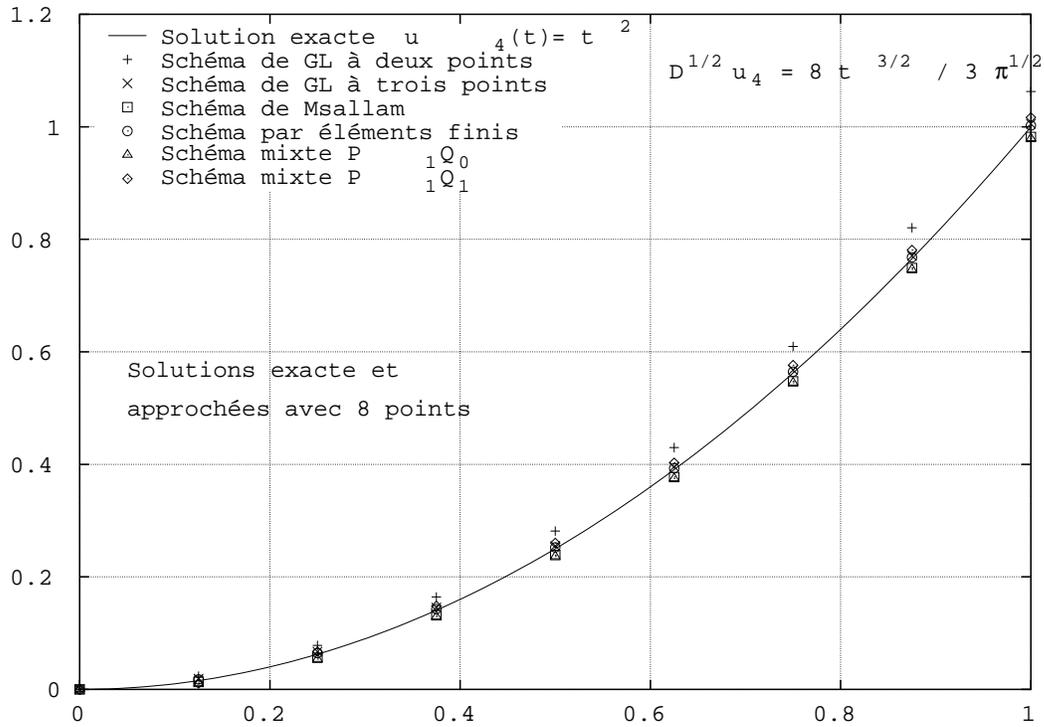
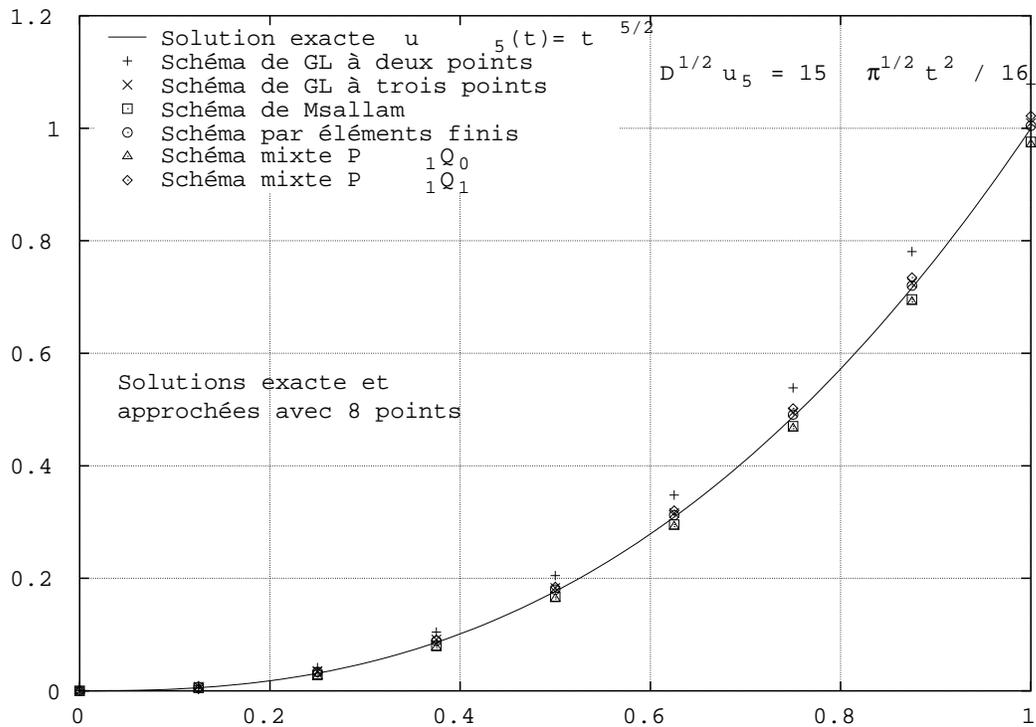


Figure 4. Résolution numérique de $D^{1/2}u = g_3(t)$; $u(t) = t\sqrt{t}$.

Figure 5. Résolution numérique de $D^{1/2}u = g_4(t)$; $u(t) = t^2$.Figure 6. Résolution numérique de $D^{1/2}u = g_5(t)$; $u(t) = t^2 \sqrt{t}$.

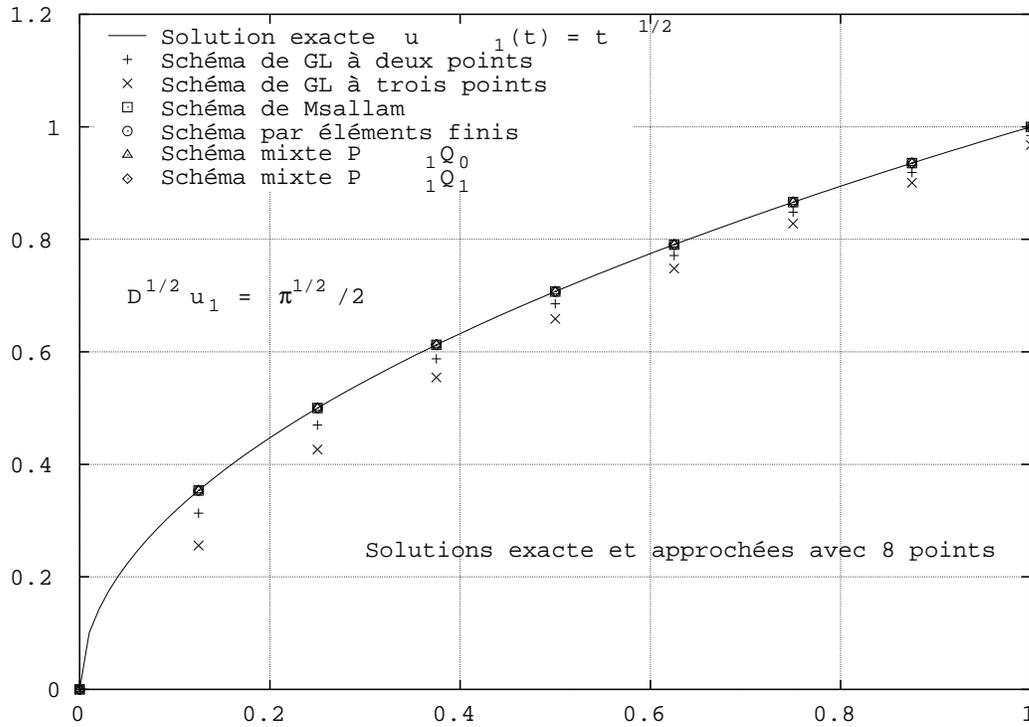


Figure 7. Résolution numérique de $D^{1/2}u = f_1(u)$; $u(t) = \sqrt{t}$.

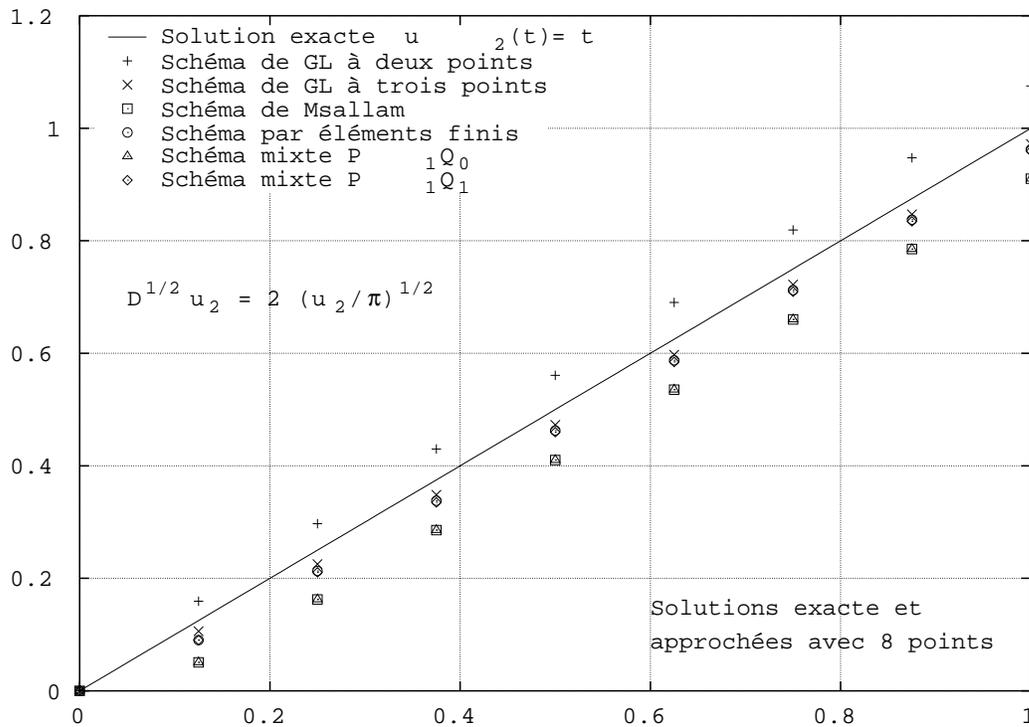
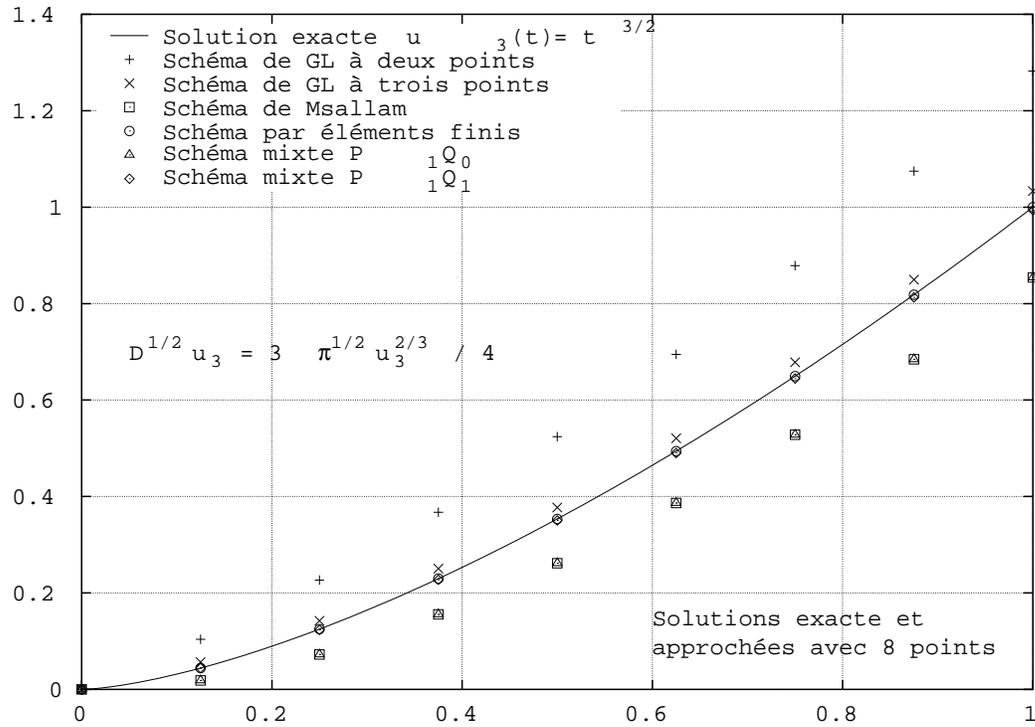
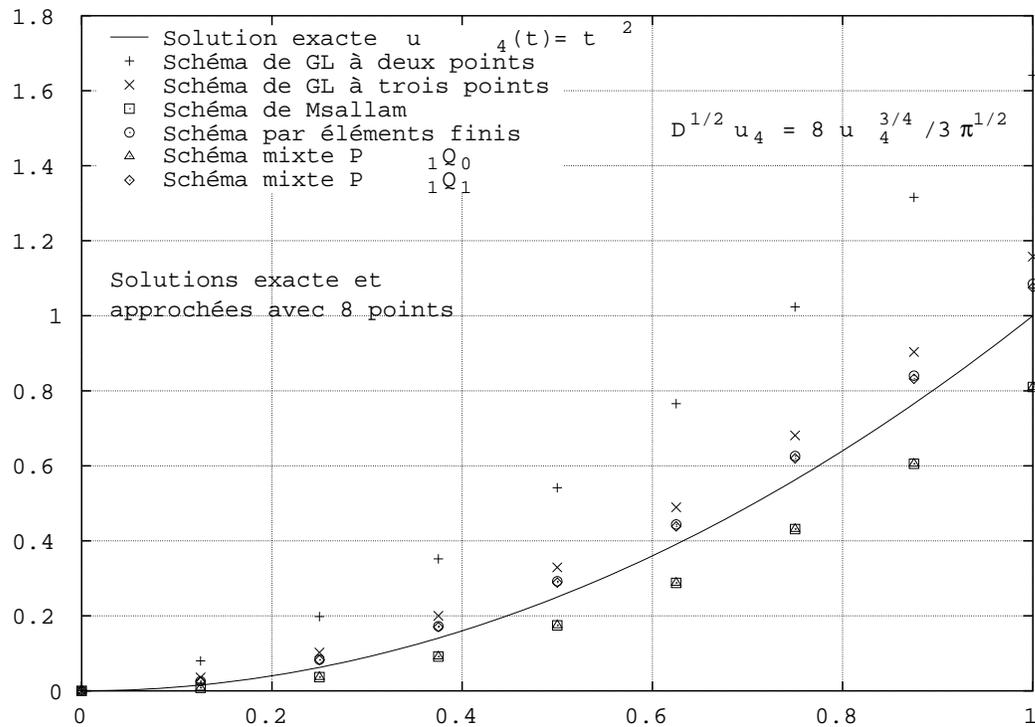


Figure 8. Résolution numérique de $D^{1/2}u = f_2(u)$; $u(t) = t$.

Figure 9. Résolution numérique de $D^{1/2}u = f_3(u)$; $u(t) = t\sqrt{t}$.Figure 10. Résolution numérique de $D^{1/2}u = f_4(u)$; $u(t) = t^2$.

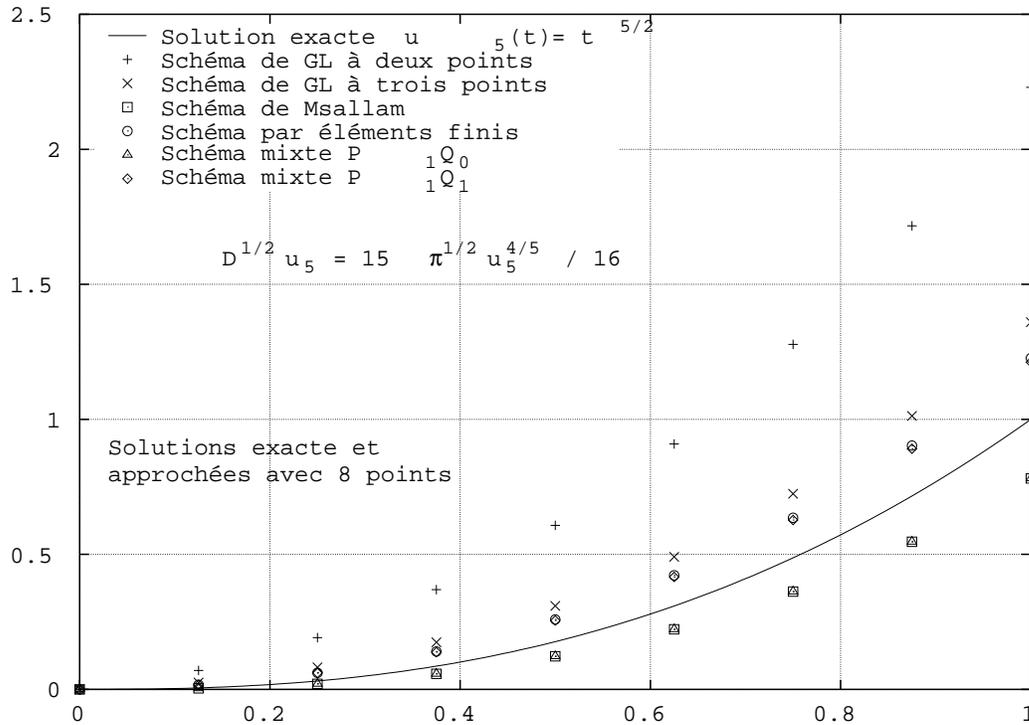


Figure 11. Résolution numérique de $D^{1/2}u = f_5(u)$; $u(t) = t^2 \sqrt{t}$.

- Les conclusions sont similaires à celles exposées dans [DM00]. Remarquons toutefois que pour les cas test avec $g_{3,4,5}$ les schémas les plus précis sont ceux de Grünwald-Letnikov à trois points et par éléments finis tandis que pour les systèmes $f_{3,4,5}$ le schéma par éléments finis et le schéma de collocation mixte P_1Q_1 sont les plus précis.
- Nous avons aussi effectué de façon systématique le calcul des ordres de convergence avec des pas de maillage h de la forme $\frac{1}{2^n}$. Pour cela, nous avons mesuré les erreurs e_2^n en norme L^2 et e_∞^n en norme L^∞ :

$$(46) \quad e_\infty^n \equiv \max\{|u(jh) - u^j|, \quad j = 0, \dots, 2^n\}$$

$$(47) \quad e_2^n \equiv \sqrt{h} \sqrt{\frac{1}{2} |u(0) - u_0|^2 + \sum_{j=1}^{2^n-1} \left| u\left(\frac{j}{2^n}\right) - u_j \right|^2 + \frac{1}{2} |u(1) - u_{2^n}|^2}.$$

Nous en avons déduit les ordres de convergence qui sont rassemblés dans les tableaux suivants :

Schéma mixte P_1Q_0			Schéma mixte P_1Q_1		
	L^∞	L^2		L^∞	L^2
$g_1(t)$	∞	∞	$g_1(t)$	∞	∞
$g_2(t)$	1.0000	1.3982	$g_2(t)$	1.0617	1.4217
$g_3(t)$	1.4850	1.4677	$g_3(t)$	1.4954	1.4463
$g_4(t)$	1.4722	1.4627	$g_4(t)$	1.4542	1.4526
$g_5(t)$	1.4613	1.4564	$g_5(t)$	1.4104	1.4116

Nous obtenons toujours un ordre de convergence de un pour les cas tests f_2 à f_5 . Nous avons constaté que la méthode de collocation mixte n'apporte donc pas d'amélioration notable pour les ordres de convergence, pour les cinq cas tests de base.

3.2 Comparaison avec des résultats publiés

- Nous avons implanté au sein du logiciel "Semidif" les problèmes suivants :

$$(48) \quad \begin{cases} D^{1/2}u &= -u + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}}, & t > 0 \\ u &= 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$(49) \quad \begin{cases} D^{1/2}u &= u, & t > 0 \\ u &= 1, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$(50) \quad \begin{cases} D^{1/2}u &= -u, & t > 0 \\ u &= 1, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$(51) \quad \begin{cases} D^{1/2}u &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \sqrt{t}, & t > 0 \\ u &= 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

qui ont pour solutions respectivement :

$$(52) \quad u(t) = t^2$$

$$(53) \quad u(t) = e^t \left(\operatorname{erf} \sqrt{t} + 1 \right)$$

$$(54) \quad u(t) = e^t \left(1 - \operatorname{erf} \sqrt{t} \right)$$

$$(55) \quad u(t) = \sqrt{t} J_1(\sqrt{t}).$$

Nous avons comparé nos résultats numériques avec ceux de K. Diethelm [Di97], Diethelm et Ford [DF02], Diethelm et Luchko [DL2k], Blank [Bl96] et Lubich [Lu86].

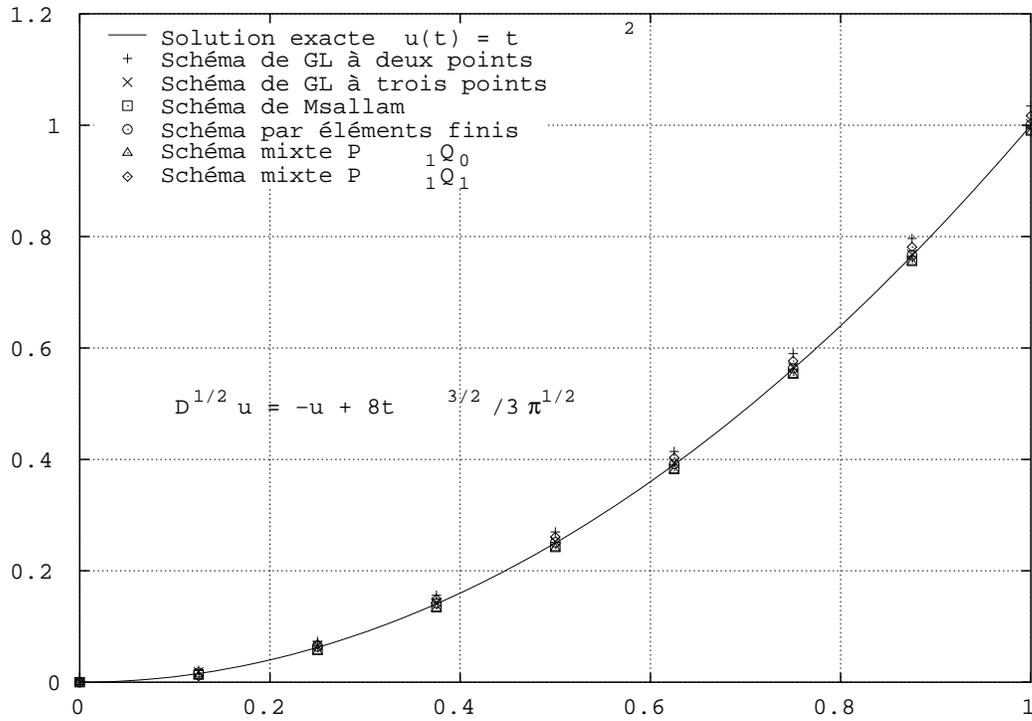


Figure 12. Comparaison de quelques schémas pour l'équation (48).

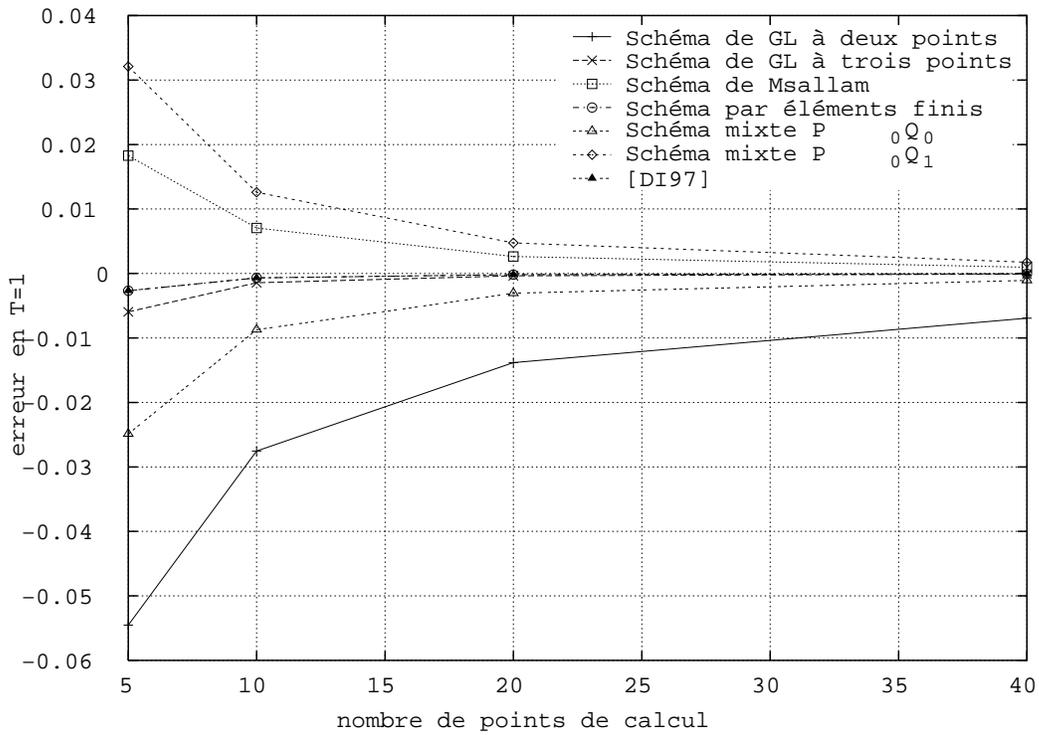


Figure 13. Comparaison de quelques schémas numériques pour l'équation (48) avec $N = 5, 10, 20$ et 40 points de grille.

- La comparaison avec les travaux de K. Diethelm [Di97] porte sur l'équation (48) dont la solution est donnée par la relation (52). L'auteur a calculé l'erreur à $t = 1$ pour différents nombres de points de calcul : $N = 5, 10, 20$ et 40 . Nous avons commencé par tracer (Figure 12) la solution exacte et les solutions numériques approchées avec huit points de calcul, pour tous les schémas.
- Les résultats des simulations faites avec les deux schémas mixtes montrent que les erreurs sont du même ordre de grandeur, ce que l'on peut mieux voir sur le graphe de la figure 13. Les schémas les plus précis sont de manière équivalente celui de Diethelm [Di97] et le schéma par éléments finis [DM2k]. En ce qui concerne la méthode mixte, le schéma P_1Q_0 approche la solution par valeurs inférieures et le second schéma P_1Q_1 approche la solution exacte par valeurs supérieures.
- Lorsqu'on compare les six schémas existants (Figure 12) et celui de Diethelm [Di97] en terme de précision sur le dernier point ($T = 1$), il apparaît que le schéma de Grünwald-Letnikov à deux points est médiocre, et que tous les autres schémas sont meilleurs et du même ordre de grandeur. Dans l'ordre on obtient donc le schéma par éléments finis, le schéma de Grünwald Letnikov à trois points, le schéma de Msallam, les deux schémas mixtes et le schéma de Grünwald-Letnikov à deux points. Mais, pour la résolution de cette équation là, la méthode mixte n'apporte pas d'amélioration spectaculaire, contrairement à d'autres types d'équations semi-différentielles.
- Les ordres de convergence, définis en (46) et (47), pour treize maillages raffinés successivement d'un facteur deux d'un maillage à l'autre montre un ordre de convergence en norme L^∞ et L^2 de 1.5 dans tous les cas. Plus précisément, on obtient le tableau ci-dessous.

	L^∞	L^2
Schéma mixte $u \in P_1^h, f \in Q_0^h$	1.5077	1.4983
Schéma mixte $u \in P_1^h, f \in Q_1^h$	1.4328	1.4266

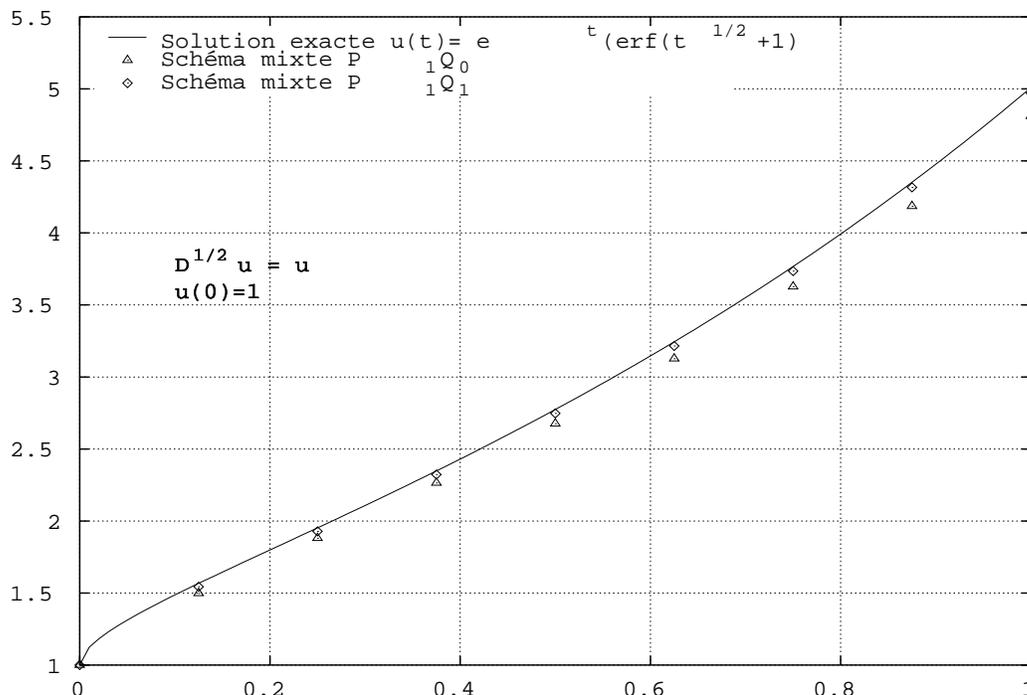


Figure 14. Résolution numérique de l'équation (49).

- Dans une contribution plus récente [DF02], K. Diethelm et N. Ford ont étudié les solutions de l'équation (48). Les auteurs ont calculé l'erreur finale pour des maillages comprenant successivement 10, 25 et 100 points par intervalle de temps unitaire. Nous comparons avec les résultats de leurs exemples numériques pour une valeur terminale de temps $T = 5$, et comme eux, avec 50, 125 et 500 points de grille. Nous avons analysé sept schémas numériques différents ; les quatre premiers, c'est à dire GL2, GL3, Msallam et EFP_1 , sont décrits en détail dans [DM2k]. Les deux suivants, à savoir P_1Q_0 et P_1Q_1 sont l'objet de la présente étude et nous comparons nos résultats avec le schéma de Diethelm et Ford. Nous obtenons les résultats suivants pour la solution (52) de l'équation (48) au temps $T = 5$:

Pas h	GL2	GL3	Msallam	EFP_1
0.10	25.0875	25.0007771	24.9893877	25.0003824
0.04	25.0350	25.000124	24.9972429	25.0000615
0.01	25.0087	25.0000077	24.9996476	25.0000039

Pas h	P_1Q_0	P_1Q_1	[DF02]
0.10	24.9877234	25.0317170	25.0109948
0.04	24.9969765	25.0083893	25.0028186
0.01	24.9996309	25.0010833	25.000356261

- C'est dans le cas des schémas de Grünwald-Letnikov à deux points, du schéma de Msallam, et des deux schémas mixtes que l'erreur est la plus élevée. Par contre les schémas Grünwald-Letnikov à trois points et par éléments finis donnent de bien meilleurs résultats en terme d'erreurs sur la valeur finale. Il semble, qu'à l'exception du schéma de Grünwald-Letnikov à deux points, toujours moins bon que les autres, que la précision et la convergence de la solution numérique des schémas dépendent de la forme du second membre de l'équation semi-différentielle.
- La comparaison avec Diethelm et Luchko [DL2k] porte sur l'équation (49). La solution exacte (voir par exemple le livre de Oldham et Spanier [OS74]) est donné par la relation (53). Les auteurs ont étudié la variation de la solution sur l'intervalle $[0,1]$ et ont calculé l'erreur à $t = 1$ pour des pas h de 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, soit en nombre de points $N = 10, 20, 40, 80$ pour trois de leurs schémas numériques. Ils ont calculé les ordres de convergence qui sont variables (1, 1.5 ou 2) suivant leur schémas. Un exemple avec huit points de calcul et les deux schémas mixtes est donné sur la figure 14.

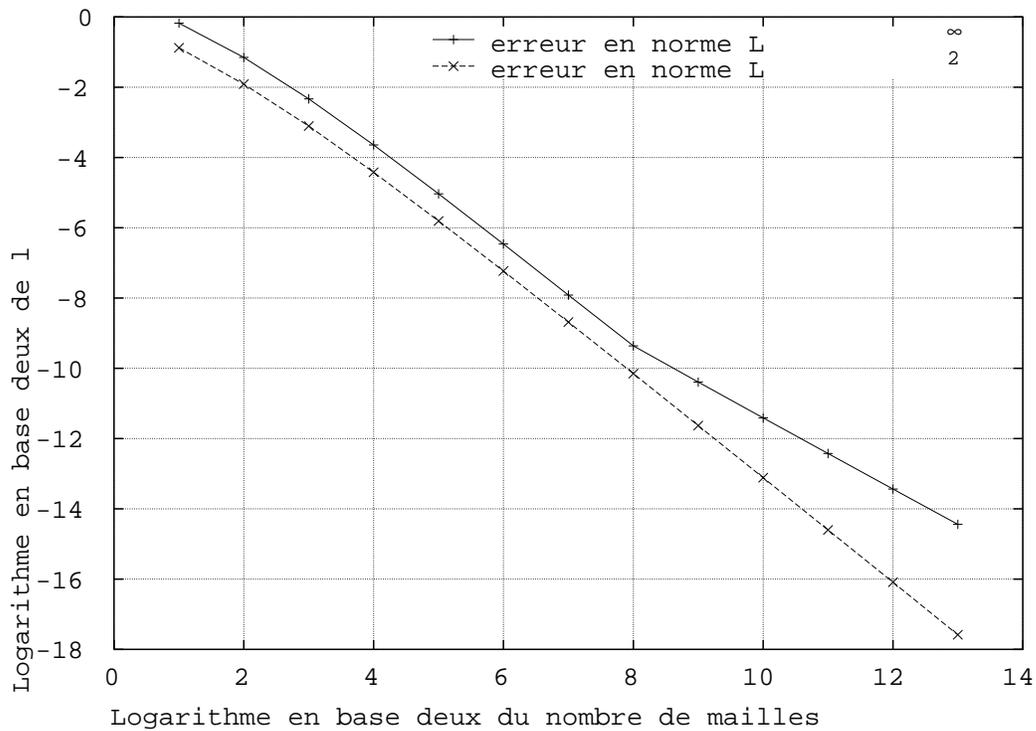


Figure 15. Ordres de convergence du schéma P_1Q_0 pour l'équation (49).

- Les ordres de convergences ponctuels calculés comme dans [DL00] sont de 1.3963 avec le schéma mixte P_1Q_0 et de 1.2174 avec le schéma mixte P_1Q_0 .

Les ordres de convergence pour le premier schéma mixte P_1Q_0 en norme L^2 et L^∞ sont donnés sur la figure 15. On obtient 1.2326 en norme L^∞ et 1.41608 en norme L^2 . Les ordres de convergence pour le second schéma mixte sont respectivement 1.06311 et 1.2922.

- La comparaison avec les travaux de L. Blank [Bl96] porte sur l'équation (50) dont la solution est proposée en (54) avec la fonction d'erreur erf définie par $\text{erf}(t) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du$. Il n'y a pas de valeurs numériques dans [Bl96] mais on retrouve bien l'allure de son graphe dans le cas où son ordre de dérivation est 0.5. Nous avons tracé sur la figure 16 la courbe théorique et les solutions numériques des deux schémas mixtes avec huit points de calcul. Il est à remarquer que la position du premier point est perfectible. Le schéma P_1Q_1 donne une meilleure approximation de ce premier point que le schéma P_1Q_0 . Nous avons calculé les ordres de convergence en norme L^2 et L^∞ pour le second schéma mixte (figure 17). On obtient un ordre de convergence de 0.904745 en norme L^∞ et de 1.29833 en norme L^2 .

- La comparaison avec les travaux de C. Lubich [Lu86] porte sur le cas test (51). La solution exacte est donnée par (55) où J_1 est une fonction de Bessel. Sur la figure 18 on a indiqué les solutions exacte et approchées avec huit points de calcul pour les six schémas à notre disposition dans le logiciel "Semidif".

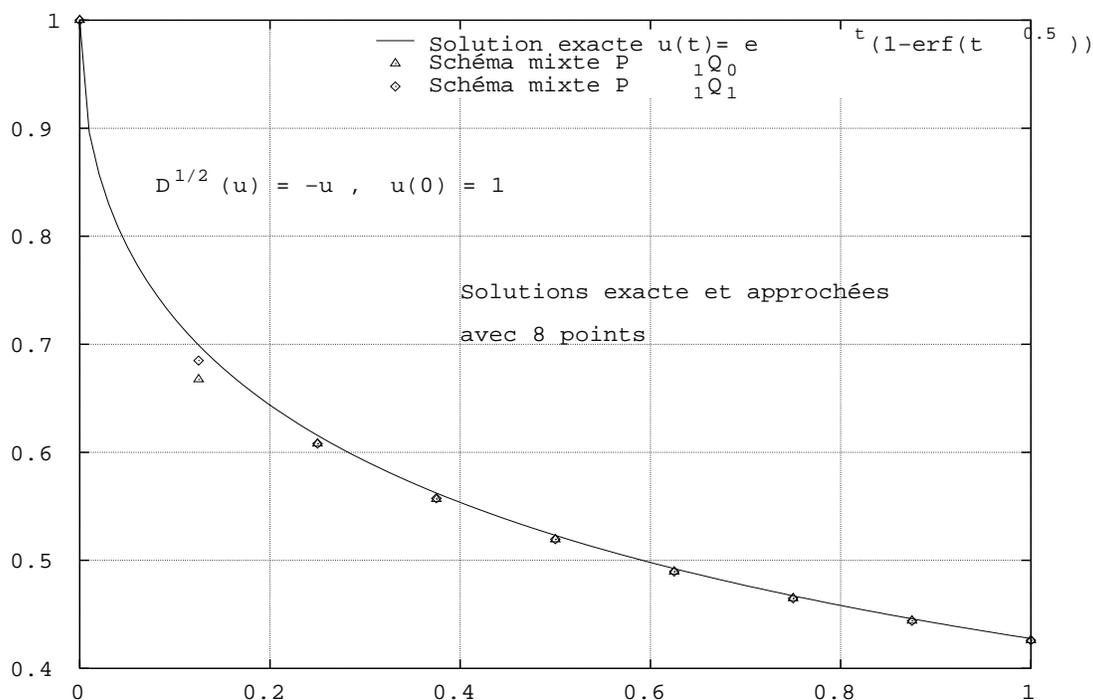


Figure 16. Résolution numérique de l'équation (50).

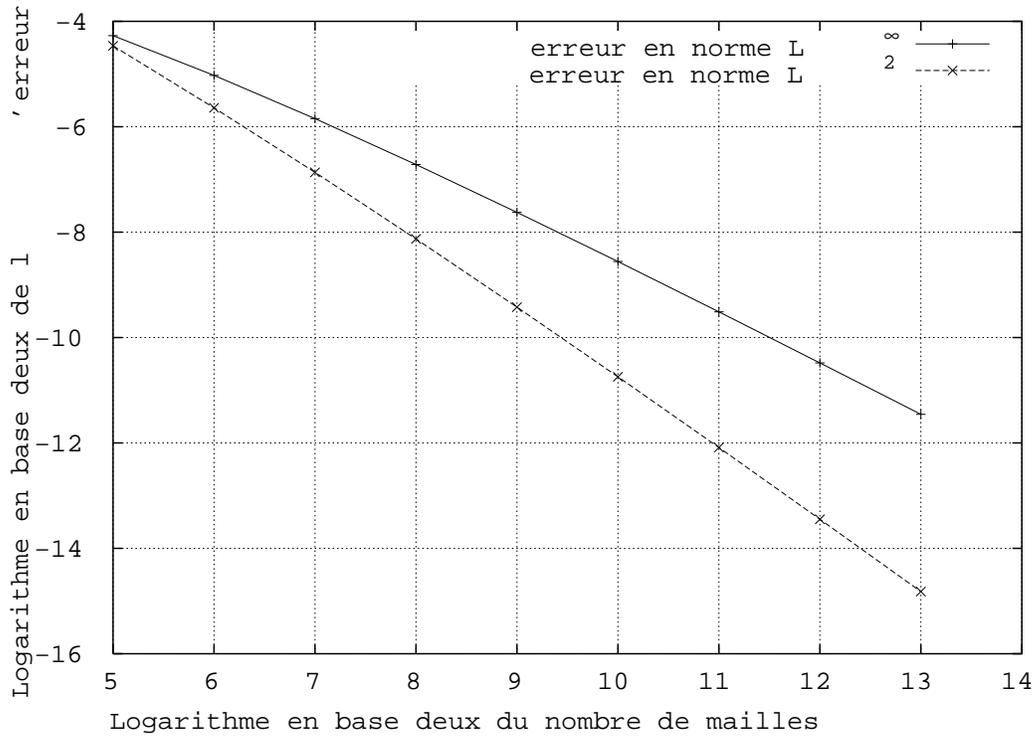


Figure 17. Ordre de convergence du schéma P_1Q_1 pour l'équation (50).

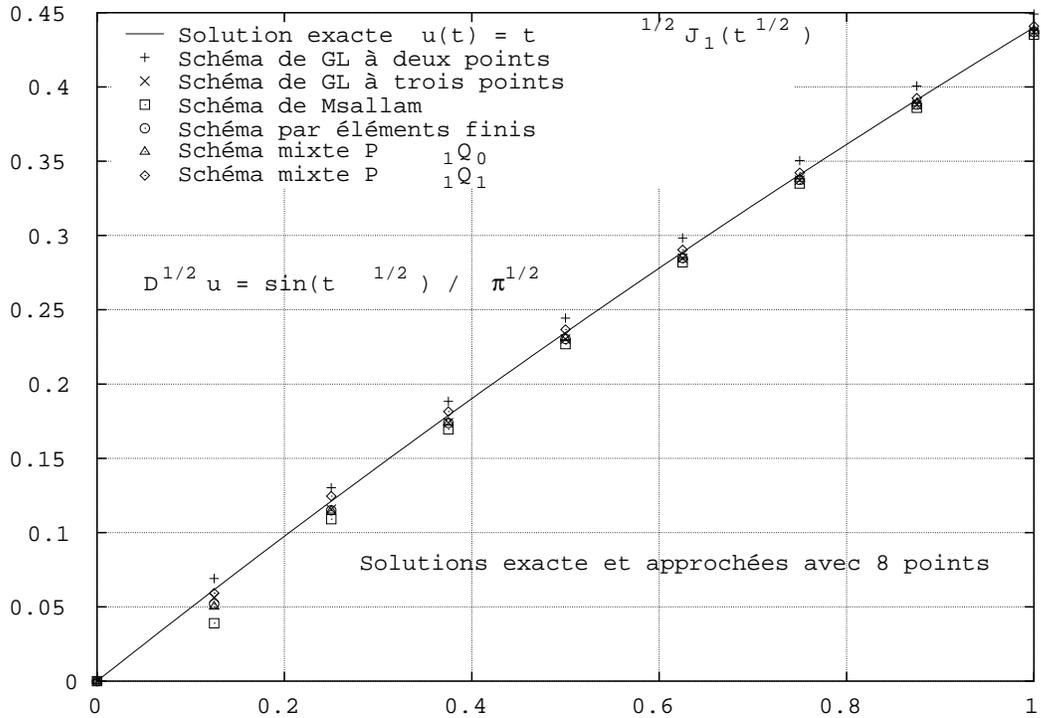


Figure 18. Résolution numérique de l'équation (51).

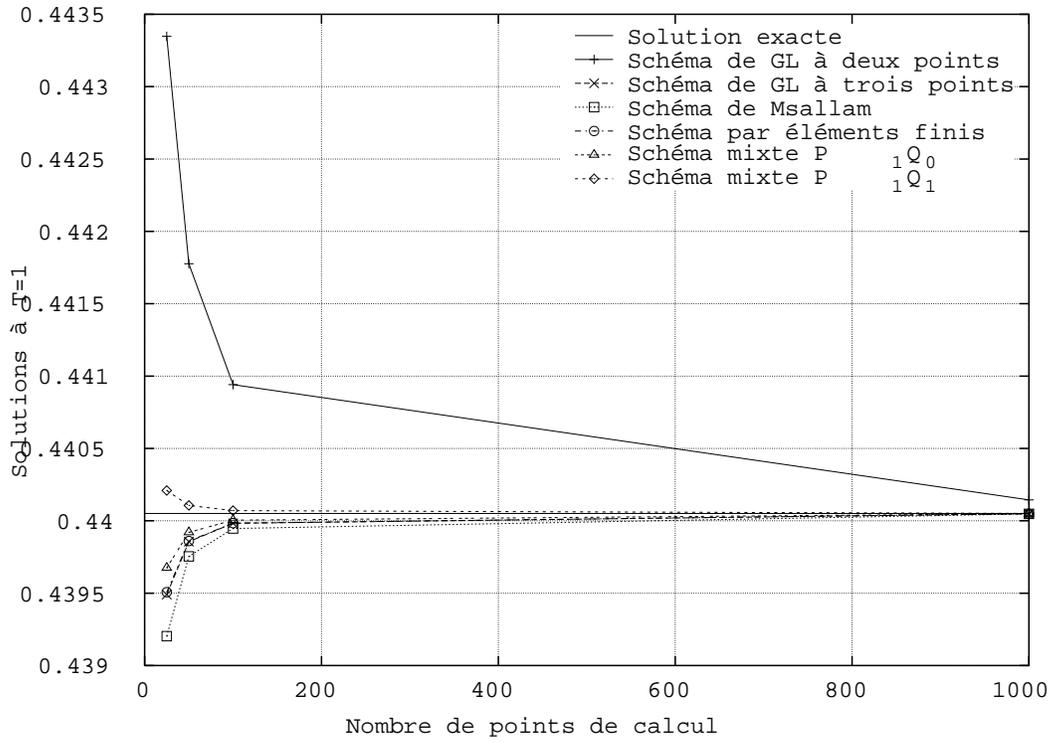


Figure 19. Résolution numérique de l'équation (51).

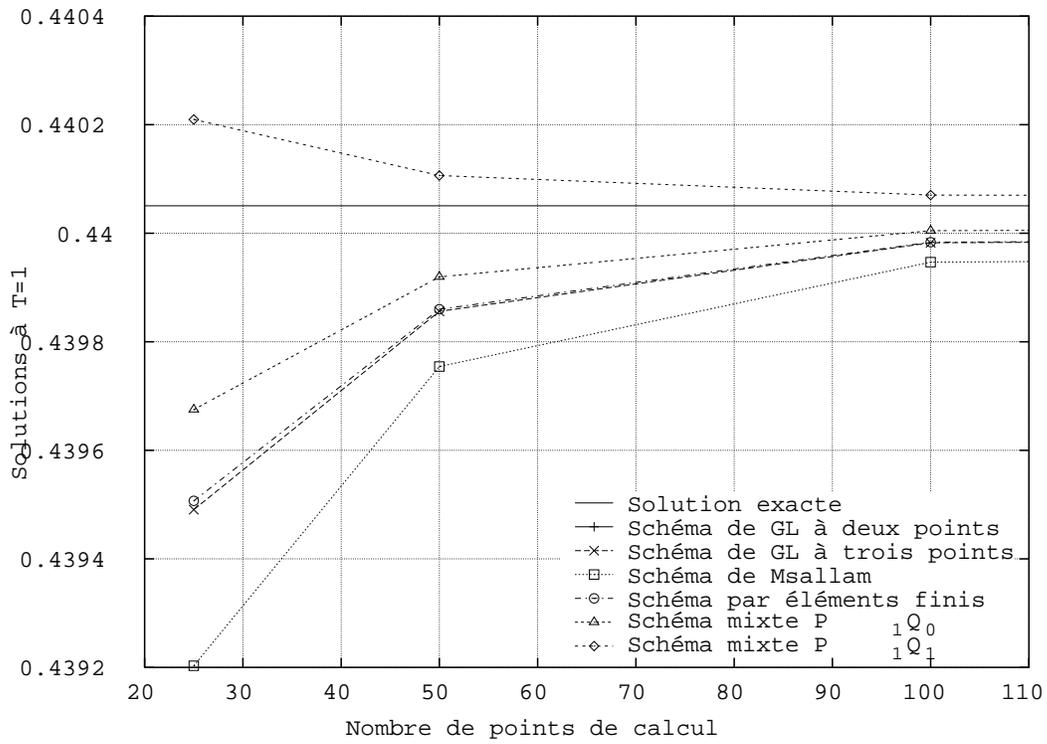


Figure 20. Zoom de la Figure 19.

- Visuellement, on constate que les deux schémas mixtes sont plus proches du résultat théorique que les autres schémas. Lubich a calculé les valeurs finales (en $t = 1$) pour des pas de calcul h de 0.04, 0.02 et 0.01. A $t = 1$, la valeur numérique de $J_1(t)$ pour $t = 1$ calculée avec le logiciel Octave [Ea92] est 0.440050585744934. Nous reprenons ces tests en ajoutant une sortie pour $h = 1000$ et $h = 20000$. Nous calculons $u(1)$ avec les six schémas dont nous disposons. Les résultats sont synthétisés sur les figures 19 et 20. La seconde figure est un zoom de la première.
- Le schéma de Grünwald-Letnikov à deux points converge de façon nettement différente des autres (figure 19). Le meilleur schéma est le schéma mixte P_1Q_1 qui approche la solution par valeurs supérieures, suivi de près par le schéma mixte P_1Q_0 (par valeurs inférieures). Les schémas de Grünwald-Letnikov à trois points et par éléments finis donnent des résultats similaires et le schéma de Msallam est nettement moins bon.

4 Test non linéaire avec une singularité

4.1 Discrétisation

- Nous exposons ici comment adapter le schéma de collocation mixte d'ordre 1 pour le champ inconnu $t \mapsto u(t)$ (i.e. $u \in P_1^h$) et d'ordre 0 pour le flux ($f \in Q_0^h$) lorsqu'on étudie l'équation semi-différentielle proposée par Joulin [Jo85] pour les flammes sphériques. Il s'agit du système suivant :

$$(56) \quad \begin{cases} D^{1/2}(u) &= \Phi(u(t), t), & t > 0 \\ u &= 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$(57) \quad \Phi(u(t), t) = \log u + \frac{Et^\gamma(1-t)}{u} H(1-t),$$

où E et $\gamma = 0.3$ sont des constantes positives et $\theta \mapsto H(\theta)$ la fonction de Heaviside :

$$(58) \quad H(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta > 0 \\ 0, & \theta < 0. \end{cases}$$

- Le calcul du premier point $u_1^h \simeq u^h(h)$ demande un soin particulier. Nous décrivons ci-dessous l'algorithme retenu. On intègre l'équation (56) "une demi-fois" sur l'intervalle $[0, h]$. Il vient :

$$(59) \quad u_1^h = \int_0^h \frac{1}{\sqrt{\pi(h-\theta)}} \Phi(u^h(\theta), \theta) d\theta.$$

Puis nous faisons l'hypothèse que le "flux" $\Phi(\bullet, \bullet)$ est constant sur l'intervalle $[0, h]$, et identiquement égal à $f_{\frac{1}{2}}^h$:

$$(60) \quad f_{\frac{1}{2}}^h = \frac{1}{h} \int_0^h \Phi(u^h(\theta), \theta) \, d\theta.$$

Nous injectons cette hypothèse au membre de droite de l'équation (59); il vient:

$$(61) \quad u_1^h = 2\sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{h}}} \int_0^h \Phi(u^h(\theta), \theta) \, d\theta$$

et nous calculons ensuite le terme de droite de (61) en utilisant la fonction $\Phi(\bullet, \bullet)$ de la relation (57) (laquelle est singulière au voisinage de $u = 0$) et l'hypothèse de représentation affine de u entre 0 et h , ainsi que la relation

$$(62) \quad u^h(0) = 0$$

qui est loin d'être évidente compte-tenu des résultats des théorèmes de trace dans des espaces de Sobolev de type $H^{1/2}$, voir à ce sujet Lions et Magenes [LM68]. On déduit de (62) et de l'hypothèse de représentation affine

$$(63) \quad u^h(\theta) = u^h(h) \frac{\theta}{h}, \quad 0 \leq \theta \leq h$$

l'expression suivante:

$$\begin{aligned} \Phi(u^h(\theta), \theta) &= \log\left(u_1^h \frac{\theta}{h}\right) + E \theta^\gamma (1-\theta) \frac{1}{u_1^h \frac{\theta}{h}} \quad \text{si } h \leq 1 \\ &= \log(u_1^h) + \log \frac{\theta}{h} + E h \frac{\theta^{\gamma-1} (1-\theta)}{u_1^h}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^h \Phi(u^h(\theta), \theta) \frac{d\theta}{h} &= \log(u_1^h) + \int_0^1 \log t \, dt + \frac{E}{u_1^h} h^\gamma \int_0^1 t^{\gamma-1} (1-h t) \, dt \\ &= \log(u_1^h) + [t \log t - t]_0^1 + \frac{E}{u_1^h} \left[\frac{1}{\gamma} - \frac{h}{\gamma+1} \right] \\ &= \log(u_1^h) - 1 + \frac{E}{u_1^h} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{h}{\gamma+1} \right). \end{aligned}$$

Pour le premier point de calcul, la valeur u_1^h est solution de l'équation d'inconnue x

$$(64) \quad x = 2\sqrt{\frac{h}{\pi}} \left\{ \log x - 1 + \frac{E h^\gamma}{x} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{h}{\gamma+1} \right) \right\}.$$

Elle est résolue numériquement avec un algorithme de Newton.

- Le calcul du point courant s'effectue avec l'approche de collocation mixte proposée plus haut. On a :

$$(65) \quad u_{j+1}^h - \frac{\sqrt{h}}{\Gamma(3/2)} f_{j+\frac{1}{2}}^h = \frac{\sqrt{h}}{\Gamma(3/2)} \sum_{k=0}^{j-1} \left(\sqrt{j-k+1} - \sqrt{j-k} \right) f_{k+\frac{1}{2}}^h$$

$$(66) \quad f_{j+\frac{1}{2}}^h = \int_0^1 \Phi(u_j^h(1-\theta) + u_{j+1}^h\theta, jh + \theta h) d\theta.$$

L'équation pour u_{j+1}^h demande de calculer l'intégrale du membre de droite de la relation (66). On a si $(j+1)h \leq 1$:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \Phi(u_j^h(1-\theta) + u_{j+1}^h\theta, jh + \theta h) d\theta \\ &= \int_0^1 \log((1-\theta)u_j^h + \theta u_{j+1}^h) d\theta + E \int_0^1 \frac{(jh + \theta h)^{\gamma-1} - (jh + \theta h)^\gamma}{(1-\theta)u_j^h + \theta u_{j+1}^h} d\theta \\ &\simeq \frac{1}{u_{j+1}^h - u_j^h} \left\{ (u_{j+1}^h \log u_{j+1}^h - u_{j+1}^h) - (u_j^h \log u_j^h - u_j^h) \right\} \\ &\quad + \frac{E}{2} \left[(j)^{\gamma-1} (h)^{\gamma-1} \frac{1-jh}{u_j^h} + (j+1)^{\gamma-1} (h)^{\gamma-1} \frac{1-(j+1)h}{u_{j+1}^h} \right] \\ &= \log u_{j+1}^h + \frac{u_j^h}{u_{j+1}^h - u_j^h} \log \left(\frac{u_{j+1}^h}{u_j^h} \right) - 1 \\ &\quad + \frac{E h^{\gamma-1}}{2} \left(\frac{j^{\gamma-1} (1-jh)}{u_j^h} + \frac{(j+1)^{\gamma-1} (1-(j+1)h)}{u_{j+1}^h} \right). \end{aligned}$$

Le schéma numérique utilisé demande donc de résoudre l'équation d'inconnue u_{j+1}^h formée de la relation (65) et de la représentation suivante :

$$(67) \quad f_{j+\frac{1}{2}}^h = \begin{cases} \frac{1}{u_{j+1}^h - u_j^h} [u_{j+1}^h \log u_{j+1}^h - u_{j+1}^h] - 1 \\ + \frac{E h^{\gamma-1}}{2} \left(\frac{j^{\gamma-1} (1-jh)}{u_j^h} + \frac{(j+1)^{\gamma-1} (1-(j+1)h)}{u_{j+1}^h} \right). \end{cases}$$

Cette équation se réduit pour $(j+1)h > 1$ à :

$$(68) \quad f_{j+\frac{1}{2}}^h = \frac{u_{j+1}^h \log u_{j+1}^h - u_j^h \log u_j^h}{u_{j+1}^h - u_j^h} - 1.$$

4.2 Expériences numériques

- Dans une contribution récente, Audounet et Roquejoffre [AR98] ont effectué des simulations pour l'équation semi-différentielle (56) (57). Nous reprenons exactement les mêmes cas tests numériques, c'est-à-dire $\gamma = 0.3$ et $E = 7.7$ avec $t_{\max} = 10$ (Figure 21), puis $t_{\max} = 40$ (Figure 22), et $E = 7.8$ avec $t_{\max} = 40$ (Figure 23). Les auteurs ont fait ces calculs pour 500 et 1000 points, nous les faisons pour les mêmes paramètres (E, t_{\max}) et avec 50, 100, 500, 1000, 10000 et 100000 points de calcul. Nous obtenons des résultats légèrement différents, même si le comportement général est identique. En effet, si l'on compare par exemple la figure 21 avec $E = 7.7$ avec $t_{\max} = 10$, nous observons que le modèle (56) (57) simulé avec "Semidif" conduit à une valeur minimale du rayon de la flamme après un temps plus grand que celui proposé par [AR98].

- L'extrême sensibilité montrée par ces tests nous a amené à faire une étude systématique de deux paramètres qui mènent à des changements de comportement qualitatif entre une flamme dont le rayon croît indéfiniment en temps et une flamme qui s'éteint en temps fini. Nous avons choisi pour cette étude $E = 7.6$ et $t_{\max} = 40$. Nous étudions le changement de comportement en fonction du nombre de points de calcul. Par tâtonnement expérimental, nous avons repéré le pas exact pour lequel il y a bifurcation numérique du comportement, à savoir entre $np = 3930$ et $np = 3931$, (Figure 24). Ceci montre l'extrême sensibilité du problème.

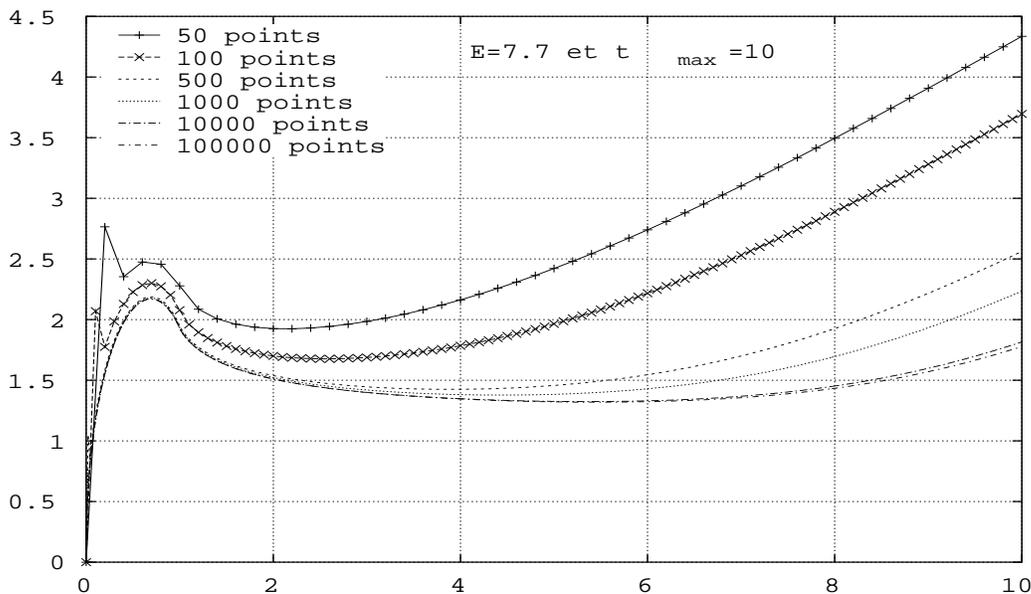


Figure 21. Résolution numérique de l'équation (56)(57).

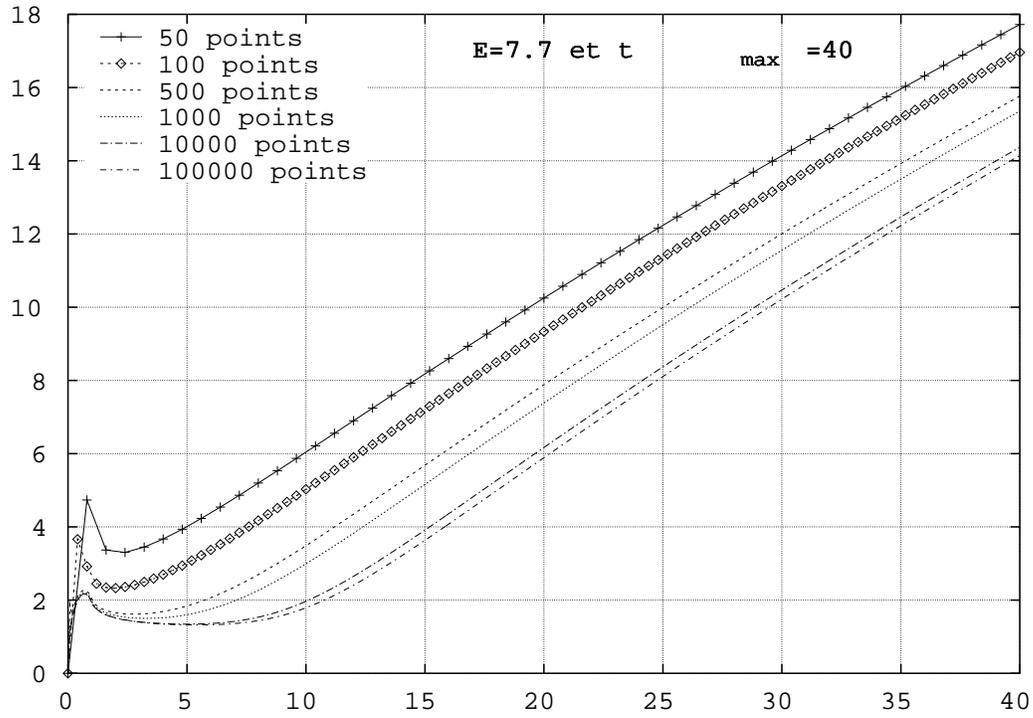


Figure 22. Résolution numérique de l'équation (56)(57).

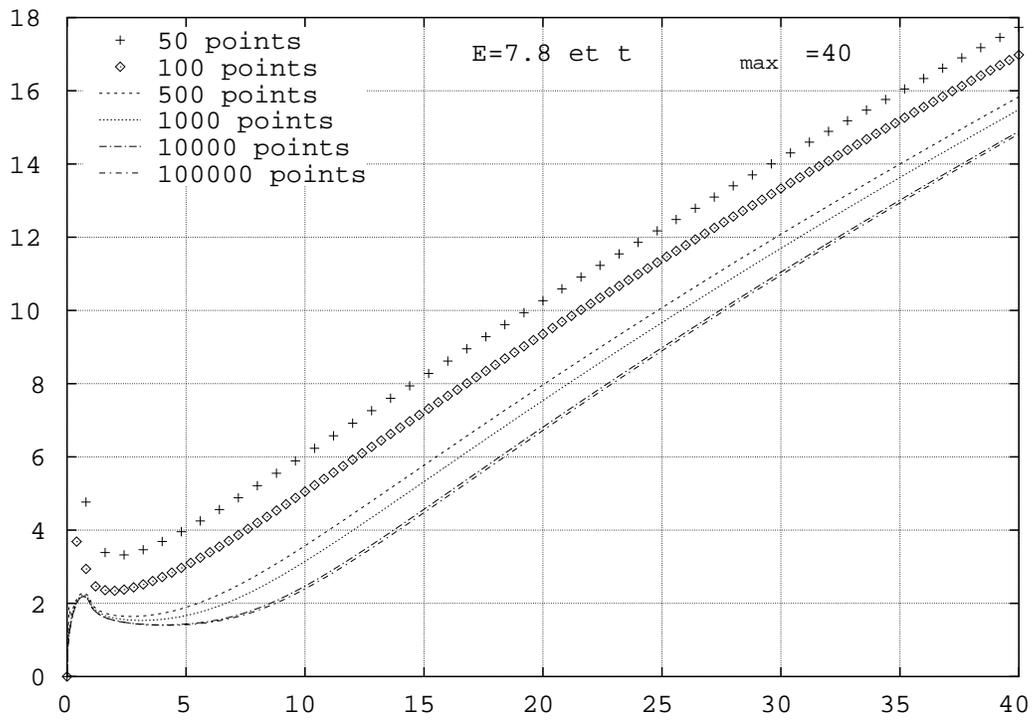


Figure 23. Résolution numérique de l'équation (56)(57).

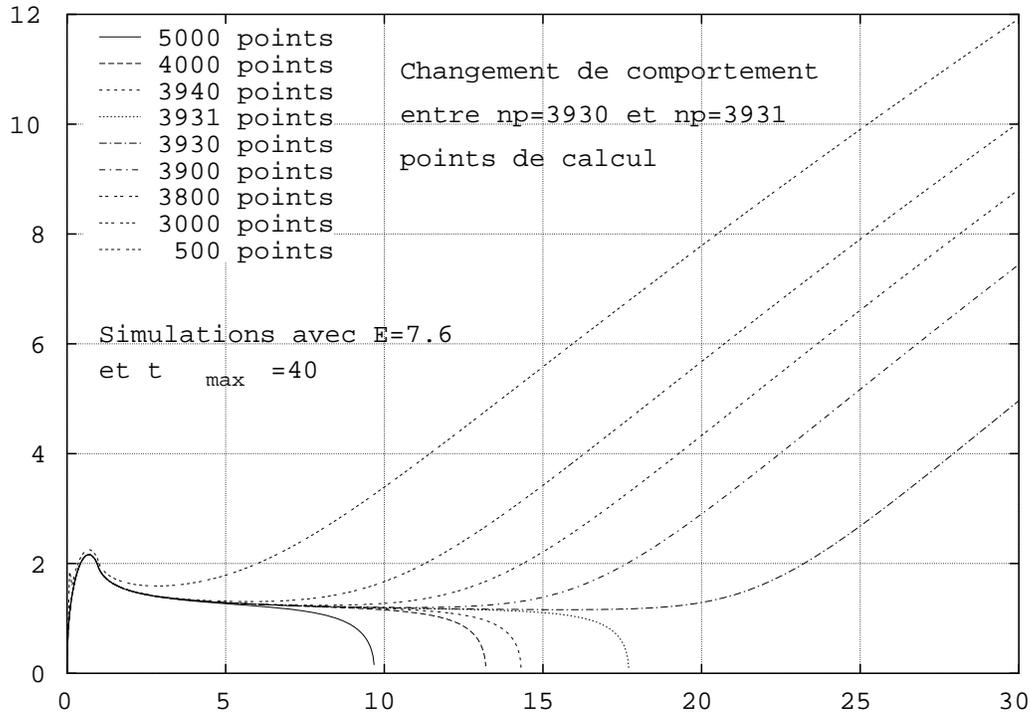


Figure 24. Changement de comportement en fonction du nombre de points de calcul.

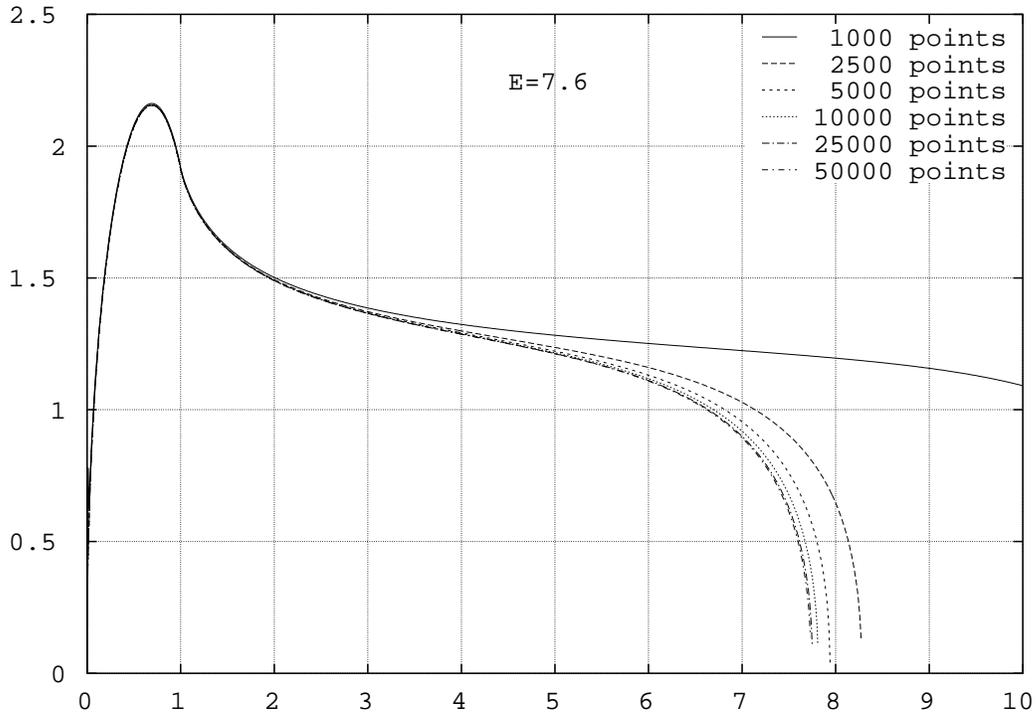


Figure 25. Solution numérique du modèle (56) (57), $E = 7.6$.

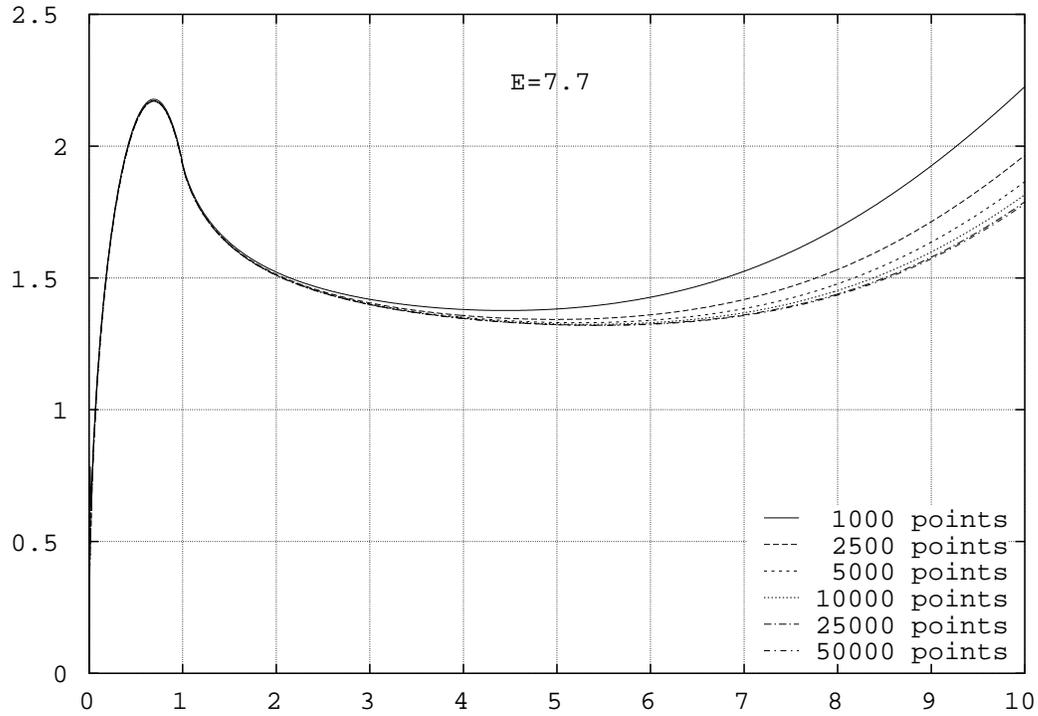


Figure 26. Solution numérique du modèle (56) (57), $E = 7.7$.

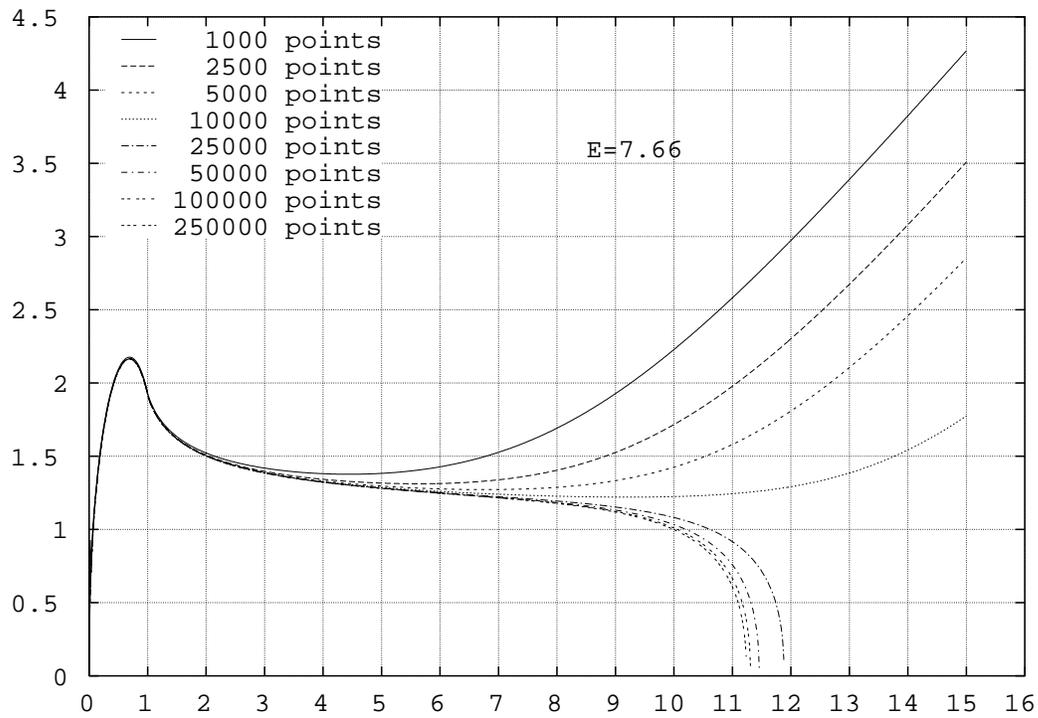


Figure 27. Solution numérique du modèle (56) (57), $E = 7.66$.

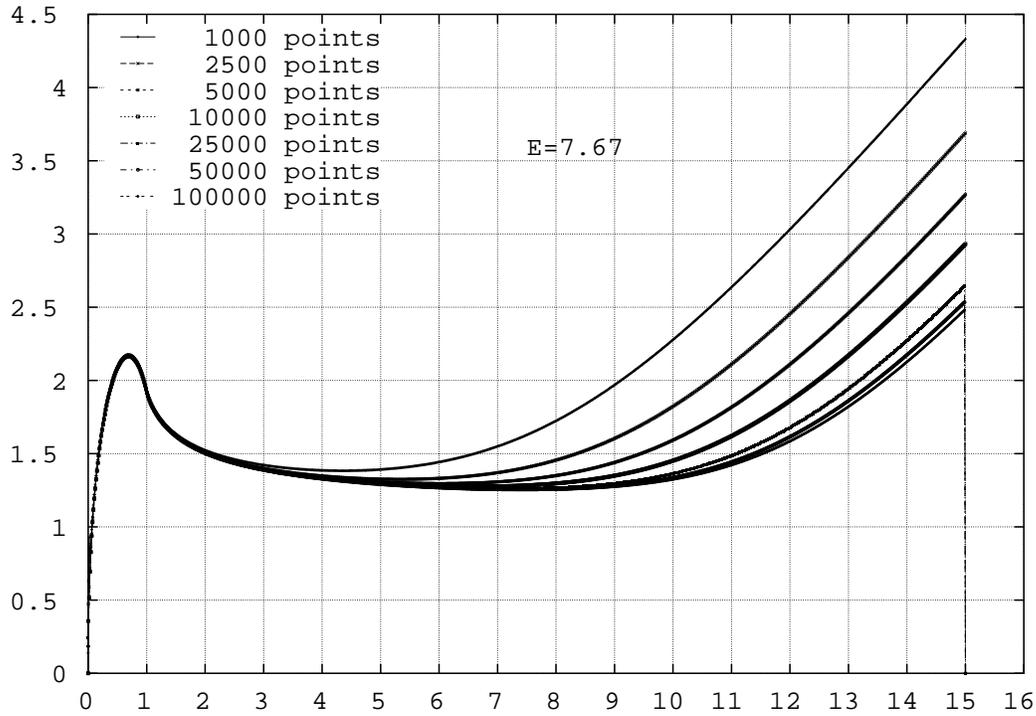


Figure 28. Solution numérique du modèle (56) (57), $E = 7.67$.

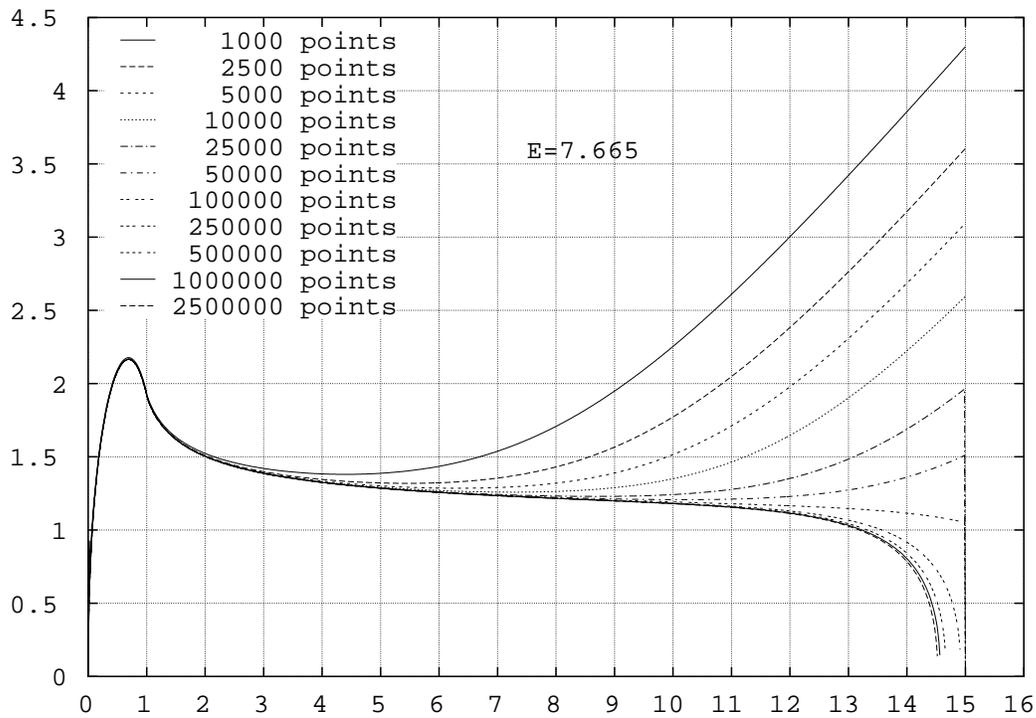


Figure 29. Solution numérique du modèle (56) (57), $E = 7.665$.

• Nous avons déterminé expérimentalement un encadrement de la valeur du paramètre E de bifurcation. Pour une valeur donnée de E , nous cherchons à observer des solutions de l'équation semi-différentielle à l'aide du logiciel "Semidif". Nous suivons un protocole expérimental fondé sur un nombre de mailles N qui suit une loi du type :

$$(69) \quad N = \dots, 10^k, 2.5 \cdot 10^k, 5 \cdot 10^k, 10^{k+1}, \dots$$

Pour $E = 7.6$ (Figure 25), on observe un arrêt de la flamme en temps fini et pour $E = 7.7$ (Figure 26), une croissance à l'infini de la solution $u(t)$ du modèle de Joulin. Il en est de même pour le couple formé des paramètres $E = 7.66$ (Figure 27) et $E = 7.67$ (Figure 28), mais la preuve demande des maillages allant jusqu'à 250000 points. Le cas $E = 7.665$ (Figure 29) montre une extinction en temps fini, mais avec un coût (plus de deux millions de mailles!) qui montre la limite de la version actuelle de la collocation mixte. Le paramètre de bifurcation E pour le modèle (56) (57) vérifie donc les inégalités

$$(70) \quad 7.665 < E < 7.67; \quad \gamma = 0.3.$$

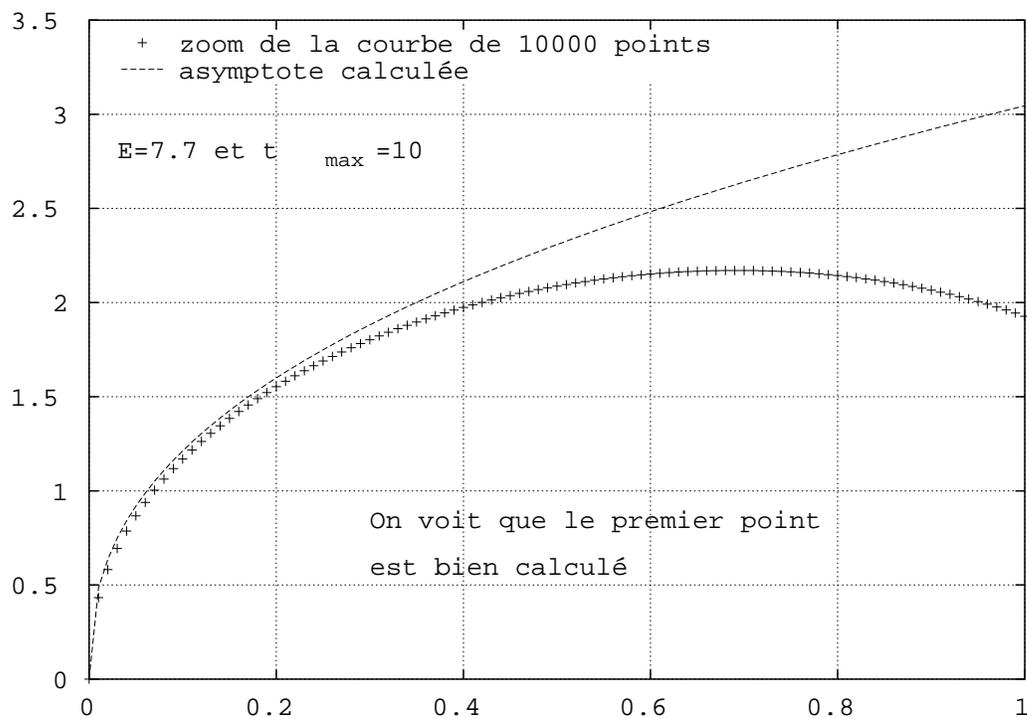


Figure 30. Précision de calcul du premier point.

- Soulignons que pour le cas test de Joulin, l'intérêt principal de la méthode de collocation mixte se situe au niveau de la précision de calcul du premier point, qui fait l'objet d'une attention particulière. Contrairement à [AR98], nous n'avons pas besoin dans notre approche de nous servir de la courbe asymptote à l'origine. Les premiers cas tests élémentaires ont bien montré que la méthode de collocation mixte donne une très bonne approximation de ce premier point, et nous pouvons le constater sur la figure 30 sur laquelle nous avons tracé la courbe asymptote en zéro ainsi que la solution numérique pour les mêmes paramètres que ceux de la figure 21, avec dix mille points de calcul.

5 Conclusion

- Nous avons proposé dans cette contribution deux variantes d'une nouvelle méthode numérique pour résoudre les équations différentielles d'ordre fractionnaire quelconque. Le schéma de collocation mixte consiste à choisir une inconnue $u(\bullet)$ affine continue et un "flux" $\Phi(u)$ discontinu constant ou affine par maille. L'approche a été validée numériquement (logiciel "Semi-dif") dans le cas où l'ordre fractionnaire est égal à un demi, avec des cas tests dont la solution exacte est connue. Ces résultats ont de plus été comparés à d'autres expériences numériques utilisant des méthodes différentes. La méthode de collocation mixte donne de bons résultats en termes de précision et de stabilité et nous avons aussi mis en évidence divers ordres de convergence. Nous avons appliqué la méthode mixte au cas d'une équation non linéaire où des singularités sont présentes (équation de la flamme de Joulin) et avons montré l'efficacité de cette approche qui ne demande pas de traitement "ad hoc" des points de calcul proches de la singularité.
- Le point principal à éclaircir concerne les ordres asymptotiques des erreurs observées dans les simulations. Même avec le schéma le plus précis, la méthode reste d'ordre un de précision dans les cas non linéaires, alors que l'erreur d'interpolation est a priori d'ordre deux en norme quadratique.

Références

- [AR98] J. Audounet and J.M. Roquejoffre, "An asymptotic fractional differential model of spherical flame", *ESAIM Proceedings*, volume 5, pages 15-27, 1998.

- [Bl96] L. Blank, “Numerical treatment of differential equations of fractional order”, *Numerical analysis report n°287*, Manchester University, March 1996.
- [Di97] K. Diethelm, “An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order”, *Electronic transactions on numerical analysis*, volume 5, pages 1-6, March 1997.
- [DF02] K. Diethelm and N. Ford, “Analysis of fractional differential equations”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, volume 265, numéro 2, pages 229-248, 2002.
- [DL2k] K. Diethelm and Y. Luchko, “Numerical solution of linear multi-term differential equations of fractional order”, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, to appear, voir aussi <http://www-public.tu-bs.de:8080/~diethelm/preprints.html>, 2000.
- [DM2k] F. Dubois and S. Mengué, “Schémas numériques implicites pour les équations semi-différentielles”, *IAT internal report n°334*, voir aussi <http://www.laas.fr/gt-opd/publications>, *Conservatoire National des Arts et Métiers*, Paris, juin 2000.
- [Ea92] J.W. Eaton, “The Octave free software”, <http://www.octave.org>, 1992.
- [Jo85] G. Joulin, “Point source initiation of lean spherical flames of light reactants: an asymptotic theory”, *Combustion Science and Technology*, volume 43, pages 99-113, 1985.
- [LM68] J.L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, 1968.
- [Lu86] C. Lubich, “Discretized fractional calculus”, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, volume 17, numéro 3, pages 704 - 719, mars 1986.
- [OS74] K.B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.
- [Wh74] G.B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, J. Wiley and Sons, New York, 1974.