

Une nouvelle méthode cinétique locale et explicite pour les équations de Navier-Stokes compressibles

Gauthier Wissocq¹ Rémi Abgrall¹

¹Université de Zürich, Suisse

Groupe de travail “Schémas de Boltzmann sur réseau”,
24 avril 2024

- Méthodes nées des travaux de Jin et Xin en 1995¹.
- Similitudes avec les méthodes de Boltzmann sur réseau :
 - dans les choix de modélisation : description statistique,
 - dans la résolution approchée par méthodes numériques.
- **Avantages :**
 - Construction de méthodes numériques simples, efficaces et faiblement dissipatives.
 - **Stabilité numérique** assurée par des considérations d'entropie.
- **Limite : restriction au cadre purement hyperbolique.**
 - **Problème d'introduction d'effets diffusifs.**
 - **Ex : viscosité et dissipation thermique de Navier-Stokes**

1. S. JIN et Z. XIN, Communications on Pure and Applied Mathematics **48**, 235-276 (1995).

1 Méthodes cinétiques pour les systèmes hyperboliques

2 Introduction des effets visqueux en 1D

- Chapman-Enskog
- Matrice de relaxation

3 Généralisation en multi-D

- Espace des moments
- Régularisation

4 Conclusion

1 Méthodes cinétiques pour les systèmes hyperboliques

2 Introduction des effets visqueux en 1D

- Chapman-Enskog
- Matrice de relaxation

3 Généralisation en multi-D

- Espace des moments
- Régularisation

4 Conclusion

On s'intéresse aux systèmes hyperboliques de la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^p. \quad (1)$$

- Ex :
- Advection scalaire ($p = 1$) : $\mathbf{u} = u$, $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = cu$, $c = cte$,
 - Equation de Burgers ($p = 1$) : $\mathbf{u} = u$, $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = u^2/2$,
 - Euler compressible ($p = 3$) : $\mathbf{u} = [\rho, \rho u, \rho E]^T$, $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = [\rho u, \rho u^2 + p, (\rho E + p)u]^T$.

On s'intéresse aux systèmes hyperboliques de la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^p. \quad (1)$$

- Ex :
- Advection scalaire ($p = 1$) : $\mathbf{u} = u$, $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = cu$, $c = cte$,
 - Equation de Burgers ($p = 1$) : $\mathbf{u} = u$, $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = u^2/2$,
 - Euler compressible ($p = 3$) : $\mathbf{u} = [\rho, \rho u, \rho E]^T$, $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = [\rho u, \rho u^2 + p, (\rho E + p)u]^T$.

Principe du modèle Jin-Xin [1] : remplacer Eq. (1) par

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + a^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{v}), \quad a = cte. \quad (3)$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, la solution de (2)-(3) tend vers la solution de (1).

Intérêt du modèle Jin-Xin : le transport peut être diagonalisé :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\begin{bmatrix} \mathbb{M}_1 \\ \mathbb{M}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \right), \quad (4)$$

où :

- $\mathbf{u} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$: *moment d'ordre 0*,
- $\mathbf{v} = a(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2)$: *moment d'ordre 1*,
- $\begin{bmatrix} \mathbb{M}_1 \\ \mathbb{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{u}}{2} \begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u})}{2a}$: *Maxwellienne ou fonction d'équilibre*,
- Si $a > |\mathbf{f}'(\mathbf{u})|$, (4) possède des propriétés d'entropie.


Intérêt du modèle Jin-Xin : le transport peut être diagonalisé :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\begin{bmatrix} \mathbb{M}_1 \\ \mathbb{M}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \right), \quad (4)$$

où :

- $\mathbf{u} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$: moment d'ordre 0,
- $\mathbf{v} = a(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2)$: moment d'ordre 1,
- $\begin{bmatrix} \mathbb{M}_1 \\ \mathbb{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{u}}{2} \begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u})}{2a}$: Maxwellienne ou fonction d'équilibre,
- Si $a > |\mathbf{f}'(\mathbf{u})|$, (4) possède des propriétés d'entropie.

Note : Similitude avec une équation de Boltzmann à deux vitesses discrètes (D1Q2) :

$$e_2 = -a \qquad e_1 = a$$


$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + e_i \frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (f_i^{eq} - f_i) \quad (5)$$

Ecriture générale d'une méthode cinétique BGK^{2, 3} en 2D :

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \Lambda_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{1}{\varepsilon} (\mathbb{M}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}), \quad \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{kp}. \quad (6)$$

- k est le nombre d'ondes considérées (Jin-Xin : $k = 2$),
- $\mathbf{u} = \mathbb{P}\mathbf{F}$, avec $\mathbb{P} : \mathbb{R}^{kp} \rightarrow \mathbb{R}^p$ un opérateur linéaire (*projecteur*),
- Λ_x et Λ_y : matrices diagonales à coefficients constants,
- ε est un temps de relaxation constant.

2. P. L. BHATNAGAR et al., *Physical Review* **94**, 511-525 (1954).

3. R. NATALINI, *Journal of Differential Equations* **148**, 292-317 (1998).

Ecriture générale d'une méthode cinétique BGK^{2, 3} en 2D :

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \Lambda_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{1}{\varepsilon} (\mathbb{M}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}), \quad \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{kp}. \quad (6)$$

- k est le nombre d'ondes considérées (Jin-Xin : $k = 2$),
- $\mathbf{u} = \mathbb{P}\mathbf{F}$, avec $\mathbb{P} : \mathbb{R}^{kp} \rightarrow \mathbb{R}^p$ un opérateur linéaire (*projecteur*),
- Λ_x et Λ_y : matrices diagonales à coefficients constants,
- ε est un temps de relaxation constant.

On veut que (6) approche, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, le système hyperbolique :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial y} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Quelle(s) condition(s) sur la Maxwellienne \mathbb{M} ?

2. P. L. BHATNAGAR et al., *Physical Review* **94**, 511-525 (1954).

3. R. NATALINI, *Journal of Differential Equations* **148**, 292-317 (1998).

Appliquons \mathbb{P} à Eq. (6) :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbb{P} \Lambda_x \mathbf{F}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbb{P} \Lambda_y \mathbf{F}) = \frac{1}{\varepsilon} (\mathbb{P} \mathbf{M}(\mathbf{u}) - \mathbf{u}). \quad (8)$$

Appliquons \mathbb{P} à Eq. (6) :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbb{P} \Lambda_x \mathbf{F}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbb{P} \Lambda_y \mathbf{F}) = \frac{1}{\varepsilon} (\mathbb{P} \mathbf{M}(\mathbf{u}) - \mathbf{u}). \quad (8)$$

1ere condition : conservation

$$\mathbb{P} \mathbf{M}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$$

Appliquons \mathbb{P} à Eq. (6) :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbb{P} \Lambda_x \mathbf{F}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbb{P} \Lambda_y \mathbf{F}) = \frac{1}{\varepsilon} (\mathbb{P} \mathbf{M}(\mathbf{u}) - \mathbf{u}). \quad (8)$$

1ere condition : conservation

$$\mathbb{P} \mathbf{M}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbb{P} \Lambda_x \mathbf{F}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbb{P} \Lambda_y \mathbf{F}) = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Mais $\mathbf{F} \rightarrow \mathbb{M}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Appliquons \mathbb{P} à Eq. (6) :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbb{P} \Lambda_x \mathbf{F}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbb{P} \Lambda_y \mathbf{F}) = \frac{1}{\varepsilon} (\mathbb{P} \mathbf{M}(\mathbf{u}) - \mathbf{u}). \quad (8)$$

1ere condition : conservation

$$\mathbb{P} \mathbf{M}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbb{P} \Lambda_x \mathbf{F}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbb{P} \Lambda_y \mathbf{F}) = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Mais $\mathbf{F} \rightarrow \mathbb{M}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

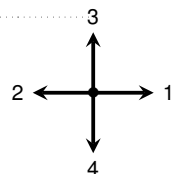
2e condition : flux

$$\mathbb{P} \Lambda_x \mathbf{M}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u})$$

$$\mathbb{P} \Lambda_y \mathbf{M}(\mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{u})$$

Exemple : scalaire en 2D à 4 ondes

Prenons $p = 1$ (équation scalaire), $k = 4$ (4 ondes) en 2D, et

$$\Lambda_x = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{bmatrix},$$


$$\mathbb{P} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1], \quad \mathbb{M} = \frac{\mathbf{u}}{4} + \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \\ -\mathbf{f}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{u}) \\ -\mathbf{g}(\mathbf{u}) \end{bmatrix}.$$

On peut vérifier que : $\mathbb{P}\mathbb{M} = \mathbf{u}$, $\mathbb{P}\Lambda_x\mathbb{M} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$, $\mathbb{P}\Lambda_y\mathbb{M} = \mathbf{g}(\mathbf{u})$.

Similaire à un réseau D2Q4 en lattice Boltzmann.

Méthodes cinétiques BGK

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \Lambda_j \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j} = \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{M} - \mathbf{F})$$

Méthodes Boltzmann

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + e_{i,j} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = C_i$$

- Transport linéaire à vitesses constantes
 - Méthodes numériques **simples, peu dissipatives**
 - CFL élevé en tout point du maillage
 - Problèmes de **Riemann** simples à traiter (Xu 2001 [4])
- Collision (relaxation) locale : **Efficacité** des méthodes numériques

- $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{kp}$,
- Propriétés d'entropie si $|\mathbf{M}'(\mathbf{u})| > 0$ (Bouchut, 1999 [5])
 - **Stabilité** numérique
- **Cadre strict hyperbolique. Effets diffusifs ??**

- $(f_i) \in \mathbb{R}^k$
- **Stabilité** numérique difficile à établir
- Effets visqueux et diffusifs à l'ordre 1 de Chapman-Enskog

Problématique des effets visqueux : limite diffusive des méthodes Jin-Xin

On modifie le système Jin-Xin comme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p(u)}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} (f(u) - v), \quad p'(u) > 0. \quad (11)$$

Problématique des effets visqueux : limite diffusive des méthodes Jin-Xin

On modifie le système Jin-Xin comme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p(u)}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} (f(u) - v), \quad p'(u) > 0. \quad (11)$$

Eq. (11) donne :

$$v = f(u) - \frac{\partial p(u)}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(u) - \frac{\partial p(u)}{\partial x},$$

et donc dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, l'équation (10) devient une équation de transport-diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \frac{\partial^2 p(u)}{\partial x^2}. \quad (12)$$

Une diagonalisation du modèle Jin-Xin diffusif donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \right), \quad (13)$$

où :

- $u = F_1 + F_2$: moment d'ordre 0,
- $v = a(F_1 - F_2)$: moment d'ordre 1,
- $\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{u}{2} \begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix} \frac{f(u)}{2a}$: Maxwellienne ou fonction d'équilibre,
- $a = \sqrt{p'(u)/\varepsilon}$.

Une diagonalisation du modèle Jin-Xin diffusif donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \right), \quad (13)$$

où :

- $u = F_1 + F_2$: moment d'ordre 0,
- $v = a(F_1 - F_2)$: moment d'ordre 1,
- $\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{u}{2} \begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix} \frac{f(u)}{2a}$: Maxwellienne ou fonction d'équilibre,
- $a = \sqrt{p'(u)/\varepsilon}$.

Problème de cette approche (schéma explicite pour le transport)

$$\Delta t = \frac{\text{CFL}}{a} \Delta x = \text{CFL} \sqrt{\frac{\varepsilon}{p'(u)}} \Delta x \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

1 Méthodes cinétiques pour les systèmes hyperboliques

2 Introduction des effets visqueux en 1D

- Chapman-Enskog
- Matrice de relaxation

3 Généralisation en multi-D

- Espace des moments
- Régularisation

4 Conclusion

Approche proposée : Analogie avec l'obtention de Navier-Stokes à partir de Boltzmann (Chapman-Enskog [6])

Chapman-Enskog

$$\begin{aligned}\text{Boltzmann} &= \text{Euler} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \underbrace{\text{Euler} + \varepsilon \text{ ("effets visqueux/diffusifs")}}_{=\text{Navier-Stokes}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

où ε est le nombre de Knudsen.

Approche proposée : Analogie avec l'obtention de Navier-Stokes à partir de Boltzmann (Chapman-Enskog [6])

Chapman-Enskog

$$\begin{aligned}\text{Boltzmann} &= \text{Euler} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \underbrace{\text{Euler} + \varepsilon (\text{"effets visqueux/diffusifs"})}_{=\text{Navier-Stokes}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

où ε est le nombre de Knudsen.

Peut-on appliquer cette approche aux méthodes cinétiques pour introduire des effets visqueux ?

- 1) Définir un nombre de Knudsen ε
- 2) Faire un développement asymptotique pour $\varepsilon \ll 1$ (et non étudier la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$)
- 3) Identifier les termes $\mathcal{O}(\varepsilon)$ comme des termes diffusifs.

1) Définition du nombre de Knudsen

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (\mathbb{M} - \mathbf{F})$$

1) Définition du nombre de Knudsen

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (\mathbb{M} - \mathbf{F})$$

Adimensionnement : considérons une taille caractéristique du problème ℓ et une vitesse caractéristique $a = \|\Lambda_x\|$.

$$t^* = \frac{at}{\ell}, \quad x^* = \frac{x}{\ell}, \quad \Lambda_x^* = \frac{\Lambda}{a}$$

1) Définition du nombre de Knudsen

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (\mathbb{M} - \mathbf{F})$$

Adimensionnement : considérons une taille caractéristique du problème ℓ et une vitesse caractéristique $a = \|\Lambda_x\|$.

$$t^* = \frac{at}{\ell}, \quad x^* = \frac{x}{\ell}, \quad \Lambda_x^* = \frac{\Lambda}{a}$$

Système cinétique adimensionné :

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t^*} + \Lambda_x^* \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x^*} = \frac{1}{\varepsilon} (\mathbb{M} - \mathbf{F}),$$

Définition du Knudsen en BGK

$$\varepsilon = \frac{a\tau}{\ell}$$

Note : En théorie cinétique des gaz BGK, $\varepsilon \approx c\tau/\ell$, où c est la vitesse du son, caractéristique de l'agitation moléculaire.

2) Développement asymptotique pour $\varepsilon \ll 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbb{M} - \varepsilon \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t^*} + \Lambda_x^* \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x^*} \right) \\ &= \mathbb{M} - \varepsilon \left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial t^*} + \Lambda_x^* \frac{\partial \mathbb{M}}{\partial x^*} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \mathbb{M} - \tau \left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial \mathbb{M}}{\partial x} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

2) Développement asymptotique pour $\varepsilon \ll 1$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \mathbb{M} - \varepsilon \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t^*} + \Lambda_x^* \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x^*} \right) \\
 &= \mathbb{M} - \varepsilon \left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial t^*} + \Lambda_x^* \frac{\partial \mathbb{M}}{\partial x^*} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= \mathbb{M} - \tau \left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial \mathbb{M}}{\partial x} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
 \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}\Lambda_x \mathbf{F} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \tau \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial t} + \frac{\partial (\mathbf{m}_2(\mathbf{u}))}{\partial x} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \mathbf{m}_2 = \mathbb{P}\Lambda_x^2 \mathbb{M}$$

∴ (chain rules)

$$\mathbb{P}\Lambda_x \mathbf{F} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \tau [(\mathbf{f}'(\mathbf{u}))^2 - \mathbf{m}'_2(\mathbf{u})] \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

3) Identification des termes diffusifs

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial(\Lambda_x \mathbf{F})}{\partial x} = \frac{1}{\tau}(\mathbb{M} - \mathbf{F})$$

Multiplions par \mathbb{P} et remplaçons $\mathbb{P}\Lambda_x \mathbf{F}$ par son dév. asymptotique :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau [\mathbf{m}'_2(\mathbf{u}) - (\mathbf{f}'(\mathbf{u}))^2] \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

3) Identification des termes diffusifs

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial (\Lambda_x \mathbf{F})}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (\mathbb{M} - \mathbf{F})$$

Multiplions par \mathbb{P} et remplaçons $\mathbb{P} \Lambda_x \mathbf{F}$ par son dév. asymptotique :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau [\mathbf{m}'_2(\mathbf{u}) - (\mathbf{f}'(\mathbf{u}))^2] \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Equation cible :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right), \quad \mathbf{D} : \text{matrice de diffusion}$$

Identification pour une équation scalaire : $\tau = \frac{D}{m'_2(u) - (f'(u))^2}$.

Mais pas d'identification possible en général.

Comment introduire de nouveaux paramètres pour contrôler le terme en $\mathcal{O}(\varepsilon)$ dans le cas général ?

Idée : Introduction d'une matrice de relaxation

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \Omega(\mathbb{M} - \mathbf{F})$$

Comment introduire de nouveaux paramètres pour contrôler le terme en $\mathcal{O}(\varepsilon)$ dans le cas général ?

Idee : Introduction d'une matrice de relaxation

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \Omega (\mathbb{M} - \mathbf{F})$$

- Condition de conservation : $\mathbb{P}\Omega(\mathbb{M} - \mathbf{F}) = \mathbf{0}$.
 - Choix d'une matrice par blocs : $\Omega = \mathbf{Id}_k \otimes \tilde{\Omega}$.

Comment introduire de nouveaux paramètres pour contrôler le terme en $\mathcal{O}(\varepsilon)$ dans le cas général ?

Idée : Introduction d'une matrice de relaxation

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \Omega (\mathbb{M} - \mathbf{F})$$

- Condition de conservation : $\mathbb{P} \Omega (\mathbb{M} - \mathbf{F}) = \mathbf{0}$.
 - Choix d'une matrice par blocs : $\Omega = \mathbf{Id}_k \otimes \tilde{\Omega}$.

Exemple : Navier-Stokes 1D, système à deux ondes

\mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1
 \parallel \parallel
 $\begin{pmatrix} \rho_2 \\ j_2 \\ E_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \rho_1 \\ j_1 \\ E_1 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ j_1 \\ E_1 \end{pmatrix} + a \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ j_1 \\ E_1 \end{pmatrix} = \tilde{\Omega} \begin{pmatrix} \mathbb{M}_1^\rho - \rho_1 \\ \mathbb{M}_1^j - j_1 \\ \mathbb{M}_1^E - E_1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho_2 \\ j_2 \\ E_2 \end{pmatrix} - a \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho_2 \\ j_2 \\ E_2 \end{pmatrix} = \tilde{\Omega} \begin{pmatrix} \mathbb{M}_2^\rho - \rho_2 \\ \mathbb{M}_2^j - j_2 \\ \mathbb{M}_2^E - E_2 \end{pmatrix}.$$

- 1) Définir un nombre de Knudsen ε ,
- 2) Faire un développement asymptotique pour $\varepsilon \ll 1$,
- 3) Identifier les termes $\mathcal{O}(\varepsilon)$ comme des termes diffusifs.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\Omega}^{-1} [\mathbf{m}'_2(\mathbf{u}) - (\mathbf{f}'(\mathbf{u}))^2] \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Equation cible :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right), \quad \mathbf{D} : \text{matrice de diffusion}$$

Matrice de relaxation : identification des termes diffusifs

- 1) Définir un nombre de Knudsen ε ,
- 2) Faire un développement asymptotique pour $\varepsilon \ll 1$,
- 3) Identifier les termes $\mathcal{O}(\varepsilon)$ comme des termes diffusifs.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\Omega}^{-1} [\mathbf{m}'_2(\mathbf{u}) - (\mathbf{f}'(\mathbf{u}))^2] \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Equation cible :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right), \quad \mathbf{D} : \text{matrice de diffusion}$$

Condition sur la matrice Ω

$$\tilde{\Omega}^{-1} = \mathbf{D} \underbrace{[\mathbf{m}'_2(\mathbf{u}) - (\mathbf{f}'(\mathbf{u}))^2]}_{\text{invertible quand } a > |(f)'(\mathbf{u})|}^{-1}, \quad \varepsilon = \frac{\|\mathbf{D}\|}{al}$$

Note : En théorie cinétique des gaz BGK, $\varepsilon \approx \nu/(cl)$, où c est la vitesse du son, caractéristique de l'agitation moléculaire.

Schémas numériques d'ordre arbitraire (Abgrall & Torlo, 2020 [7]) :

- **Ordre 1** en temps et en espace : implicite-explicite upwind
 - **stabilité linéaire** : $a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$
- **Ordre 2** en temps et en espace : Deferred Correction (DeC)
 - **stabilité linéaire** : $a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 0.87$
- **Ordre 4** en temps et en espace : Deferred Correction (DeC)
 - **stabilité linéaire** : $a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1.04$

Schémas numériques d'ordre arbitraire (Abgrall & Torlo, 2020 [7]) :

- **Ordre 1** en temps et en espace : implicite-explicite upwind
 - **stabilité linéaire** : $a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$
- **Ordre 2** en temps et en espace : Deferred Correction (DeC)
 - **stabilité linéaire** : $a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 0.87$
- **Ordre 4** en temps et en espace : Deferred Correction (DeC)
 - **stabilité linéaire** : $a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1.04$

Particularité de ces schémas : ils font intervenir $\tilde{\Omega}^{-1}$ et non $\tilde{\Omega}$.

- Asymptotic preservation (AP) : quand $\tilde{\Omega}^{-1} = \mathbf{0}$, consistance avec le système hyperbolique ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$).
 - Ex : Euler : $\tilde{\Omega} = \mathbf{0}$
- $\tilde{\Omega}^{-1}$ peut être non inversible.
 - Ex : Navier-Stokes : $\tilde{\Omega}^{-1} \propto \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}$

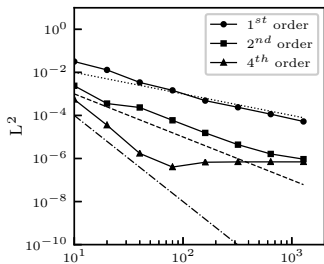
Validation : propagation acoustique linéaire

$$\mathbf{u}(x, 0) = \bar{\mathbf{u}} + |\hat{\mathbf{u}}| \cos(2\pi x + \phi(\hat{\mathbf{u}})), \quad |\hat{\mathbf{u}}| \ll \bar{\mathbf{u}},$$

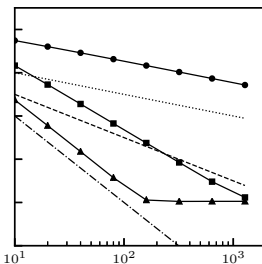
$$\bar{\rho} = 1, \quad \bar{P} = 1, \quad \overline{Ma} = 2, \quad \gamma = 1.4, \quad Pr = 0.71,$$

$$\mathbf{u}_{exact}(x, t) = \bar{\mathbf{u}} + |\hat{\mathbf{u}}| \cos(2\pi x - \text{Re}(\omega)t + \phi(\hat{\mathbf{u}})) e^{\text{Im}(\omega)t}$$

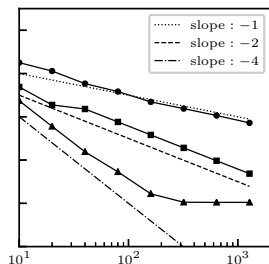
(solution exacte issue de von Neumann)



(a) $\mu = 10^{-3}, \epsilon \approx 1.6 \cdot 10^{-3},$
 $a = 1.1 \max(|u| + c)$



(b) $\mu = 10^{-3}, \epsilon \approx 1.8 \cdot 10^{-4},$
 $a = 10 \max(|u| + c)$



(c) $\mu = 0, \epsilon = 0,$
 $a = 1.1 \max(|u| + c)$

- Ordres de convergence attendus observés
- Plateau observé = erreur de consistance en ϵ ($\epsilon = \mu/(al)$)

Etude de convergence de l'erreur en ε

Même cas réalisé avec :

$N = 1000$, $\mu = 0.1$, schéma ordre 4

(but : s'affranchir des erreurs numériques)

$a / \max(u + c)$	ε	L^2	r
1.1	0.16	$4.6585 \cdot 10^{-4}$	-
2.2	0.08	$2.8028 \cdot 10^{-4}$	0.73
4.4	0.04	$9.7336 \cdot 10^{-5}$	1.53
8.8	0.02	$2.5826 \cdot 10^{-5}$	1.91
17.6	0.01	$6.5393 \cdot 10^{-6}$	1.98
35.2	0.005	$1.6399 \cdot 10^{-6}$	2.00

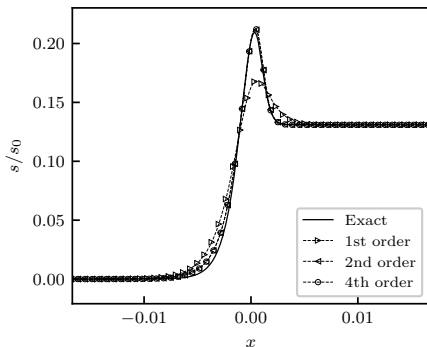
- On observe bien une erreur de consistance en $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$

Choc visqueux simulé avec :

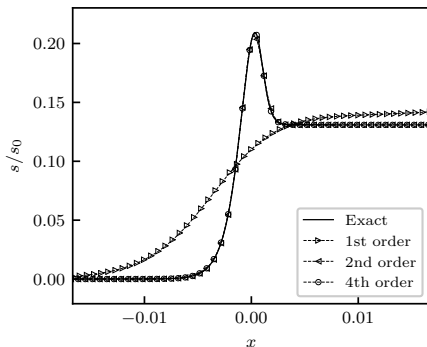
$$\text{Ma} = 2, \quad \mu = 0.001, \quad \text{Pr} = 3/4, \quad \gamma = 1.4$$

$N = 10$ points dans l'épaisseur caractéristique du choc.

Intérêt de ce cas test : solution analytique de Navier-Stokes



(a) $a = 1.1 \max(|u| + c)$ ($\varepsilon \approx 0.16$)



(b) $a = 10 \max(|u| + c)$ ($\varepsilon \approx 0.017$)

1 Méthodes cinétiques pour les systèmes hyperboliques

2 Introduction des effets visqueux en 1D

- Chapman-Enskog
- Matrice de relaxation

3 Généralisation en multi-D

- Espace des moments
- Régularisation

4 Conclusion

Exemple : matrice de relaxation en deux dimensions

Ecriture d'un modèle cinétique à matrice de relaxation en 2D :

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \Lambda_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \mathbf{\Omega}(\mathbb{M} - \mathbf{F})$$

Equation de transport-diffusion cible :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{D}_{xx} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{D}_{xy} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{D}_{yx} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{D}_{yy} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Exemple : matrice de relaxation en deux dimensions

Écriture d'un modèle cinétique à matrice de relaxation en 2D :

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \Lambda_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \Omega(\mathbb{M} - \mathbf{F})$$

Equation de transport-diffusion cible :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{D}_{xx} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{D}_{xy} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{D}_{yx} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{D}_{yy} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Par rapport au cas 1D, deux difficultés :

- Comment prendre en compte les termes croisés entre les directions cartésiennes (\mathbf{D}_{xy} et \mathbf{D}_{yx}) ?
- Comment construire une matrice de relaxation Ω satisfaisant la condition de conservation : $\mathbb{P}\Omega(\mathbb{M} - \mathbf{F}) = \mathbf{0}$?

Idée proposée : Réécriture du problème dans l'espace des moments

Définition : matrice des moments

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbb{P} \\ \mathbb{P}\Lambda_x \\ \mathbb{P}\Lambda_y \\ \mathbb{H} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{moment d'ordre 0} \\ \leftarrow \text{moment d'ordre 1} \\ \leftarrow \text{moment d'ordre 1} \\ \leftarrow \text{moments d'ordre élevé} \end{array} \quad \mathbf{Q} : \text{matrice carrée} \\ (kp \times kp) \text{ inversible}$$

\mathbb{H} : matrice construite **arbitrairement** afin de rendre \mathbf{Q} carrée et inversible
($\det(\mathbf{Q}) \neq 0$).

Idée proposée : Réécriture du problème dans l'espace des moments

Définition : matrice des moments

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbb{P} \\ \mathbb{P}\Lambda_x \\ \mathbb{P}\Lambda_y \\ \mathbb{H} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{moment d'ordre 0} \\ \leftarrow \text{moment d'ordre 1} \\ \leftarrow \text{moment d'ordre 1} \\ \leftarrow \text{moments d'ordre élevé} \end{array} \quad \mathbf{Q} : \text{matrice carrée} \\ (kp \times kp) \text{ inversible}$$

\mathbb{H} : matrice construite **arbitrairement** afin de rendre \mathbf{Q} carrée et inversible
($\det(\mathbf{Q}) \neq 0$).

Proposition

Si \mathbb{M} est une fonction linéaire de $(\mathbf{u}, \mathbf{f}(\mathbf{u}), \mathbf{g}(\mathbf{u}))$, alors on peut choisir \mathbb{H} tel que $\mathbb{H}\mathbb{M} = \mathbf{0}$.

Dans la suite, on se place dans le cas où $\mathbb{H}\mathbb{M} = \mathbf{0}$.

Exemple : modèle à 4 ondes

$$\Lambda_x = \text{diag}(a, -a, 0, 0), \quad \Lambda_y = \text{diag}(0, 0, a, -a), \quad \mathbb{M} = \frac{\mathbf{u}}{4} + \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \\ -\mathbf{f}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{u}) \\ -\mathbf{g}(\mathbf{u}) \end{bmatrix}.$$

On peut choisir la matrice des moments suivante :

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -a \\ a^2 & a^2 & -a^2 & -a^2 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier qu'avec ce choix :

$$\mathbf{QM} = [\mathbf{u}, \mathbf{f}(\mathbf{u}), \mathbf{g}(\mathbf{u}), \mathbf{0}]^T.$$

Note : $\mathbb{H} = (a^2 \quad a^2 \quad -a^2 \quad -a^2) = \mathbb{P}(\Lambda_x^2 - \Lambda_y^2)$, d'où la dénomination de *moment d'ordre élevé*.

Matrice de relaxation dans la base des moments

On choisit de décrire la matrice de relaxation Ω dans la base des moments comme

$$\Omega = \mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{Id}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \beta \mathbf{Id}_p \end{pmatrix} \mathbf{Q},$$

où :

- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont deux paramètres à fixer,
- \mathbf{C} est une matrice carrée de taille $(2p \times 2p)$, à déterminer.

Matrice de relaxation dans la base des moments

On choisit de décrire la matrice de relaxation Ω dans la base des moments comme

$$\Omega = \mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{Id}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \beta \mathbf{Id}_p \end{pmatrix} \mathbf{Q},$$

où :

- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont deux paramètres à fixer,
- \mathbf{C} est une matrice carrée de taille $(2p \times 2p)$, à déterminer.

Avec ce choix de matrice de collision, on a :

$$\mathbb{P}\Omega = \alpha\mathbb{P} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}\Omega(\mathbf{M} - \mathbf{F}) = \alpha\mathbb{P}(\mathbf{M} - \mathbf{F}) = \mathbf{0}.$$

- Comment prendre en compte les termes croisés entre les directions cartésiennes (\mathbf{D}_{xy} et \mathbf{D}_{yx}) ?
- Comment construire une matrice de relaxation Ω satisfaisant la condition de conservation : $\mathbb{P}\Omega(\mathbf{M} - \mathbf{F}) = \mathbf{0}$? ✓

Equation cible :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla_x \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{u}) \end{pmatrix} = \nabla_x (\mathbf{D} \nabla_x \mathbf{u}), \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{xx} & \mathbf{D}_{xy} \\ \mathbf{D}_{yx} & \mathbf{D}_{yy} \end{pmatrix}$$

Système cinétique avec matrice de relaxation :

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \begin{pmatrix} \Lambda_x \\ \Lambda_y \end{pmatrix} \cdot \nabla_x \mathbf{F} = \mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{Id}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \beta \mathbf{Id}_p \end{pmatrix} \mathbf{Q} (\mathbf{M} - \mathbf{F})$$

- 1) Définir un nombre de Knudsen ε ,
- 2) Faire un développement asymptotique pour $\varepsilon \ll 1$,
- 3) Identifier les termes $\mathcal{O}(\varepsilon)$ comme des termes diffusifs.

Construction de la matrice de relaxation (2/2)

- Comme en 1D, le Knudsen peut se définir comme :

$$\varepsilon = \frac{\|\mathbf{D}\|}{al}.$$

- Les termes d'ordre 1 en ε peuvent être identifiés à la diffusion souhaitée lorsque :

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{D}(\mathbf{J}_\Lambda - \mathbf{J}_f)^{-1}, \quad \mathbf{J}_\Lambda = \begin{pmatrix} P\Lambda_x^2 M'(\mathbf{u}) & P\Lambda_x \Lambda_y M'(\mathbf{u}) \\ P\Lambda_x \Lambda_y M'(\mathbf{u}) & P\Lambda_y^2 M'(\mathbf{u}) \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{J}_f = \begin{pmatrix} \mathbf{f}'(\mathbf{u})^2 & \mathbf{f}'(\mathbf{u})\mathbf{g}'(\mathbf{u}) \\ \mathbf{f}'(\mathbf{u})\mathbf{g}'(\mathbf{u}) & \mathbf{g}'(\mathbf{u})^2 \end{pmatrix}$$

- Comme en 1D, $\mathbf{J}_\Lambda - \mathbf{J}_f$ est inversible si $a > \max(\mathbf{f}'(\mathbf{u}), \mathbf{g}'(\mathbf{u}))$.

Construction de la matrice de relaxation (2/2)

- Comme en 1D, le Knudsen peut se définir comme :

$$\varepsilon = \frac{\|\mathbf{D}\|}{a\ell}.$$

- Les termes d'ordre 1 en ε peuvent être identifiés à la diffusion souhaitée lorsque :

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{D}(\mathbf{J}_\Lambda - \mathbf{J}_f)^{-1}, \quad \mathbf{J}_\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbb{P}\Lambda_x^2 \mathbf{M}'(\mathbf{u}) & \mathbb{P}\Lambda_x \Lambda_y \mathbf{M}'(\mathbf{u}) \\ \mathbb{P}\Lambda_x \Lambda_y \mathbf{M}'(\mathbf{u}) & \mathbb{P}\Lambda_y^2 \mathbf{M}'(\mathbf{u}) \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{J}_f = \begin{pmatrix} \mathbf{f}'(\mathbf{u})^2 & \mathbf{f}'(\mathbf{u})\mathbf{g}'(\mathbf{u}) \\ \mathbf{f}'(\mathbf{u})\mathbf{g}'(\mathbf{u}) & \mathbf{g}'(\mathbf{u})^2 \end{pmatrix}$$

- Comme en 1D, $\mathbf{J}_\Lambda - \mathbf{J}_f$ est inversible si $a > \max(\mathbf{f}'(\mathbf{u}), \mathbf{g}'(\mathbf{u}))$.
- Les paramètres α et β n'interviennent pas dans le développement de Chapman-Enskog à l'ordre 1 en ε :
 - α n'intervient pas car lié à un invariant de collision
 - β interviendrait à des ordres supérieurs du développement, car lié à des moments d'ordre élevé

Comme en 1D, la matrice Ω intervient par son inverse :

$$\Omega^{-1} = \mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} 1/\alpha \mathbf{Id}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1/\beta \mathbf{Id}_p \end{pmatrix} \mathbf{Q}$$

Régularisation inspirée par la LBM régularisée (Latt 2006 [8])

“ $1/\alpha = 0$ ”, “ $1/\beta = 0$ ”, et donc :

$$\Omega^{-1} = \mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{Q}$$

Le système cinétique s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \Lambda_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \mathbf{\Omega}(\mathbb{M} - \mathbf{F}),$$

ou, de manière équivalente :

$$\mathbf{F} = \mathbb{M} - \mathbf{\Omega}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \Lambda_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right).$$

Multiplions à gauche par \mathbb{H} (matrice des moments d'ordre élevé) :

$$\mathbb{H}\mathbf{F} = \underbrace{\mathbb{H}\mathbb{M}}_{=0} - \underbrace{\mathbb{H}\mathbf{\Omega}^{-1}}_{=0} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \Lambda_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right) = \mathbf{0}$$

Principe de la régularisation : filtrer les moments d'ordre élevé

- Méthodes numériques similaires aux schémas présentés en 1D : ordres 1, 2 et 4
- Méthode utilisée dans la suite : système à 4 ondes (\sim D2Q4), avec matrice de relaxation régularisée
- $a = 2.1 \max(|u| + c, |v| + c)$ (existence d'une d'entropie)
- Système cinétique équivalent à un système Jin-Xin 2D à matrice de relaxation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v}_x \\ \mathbf{v}_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v}_x \\ \mathbf{v}_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a^2/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v}_x \\ \mathbf{v}_y \end{pmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{C} \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{v}_x \\ \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{v}_y \end{pmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Réduction du coût en mémoire

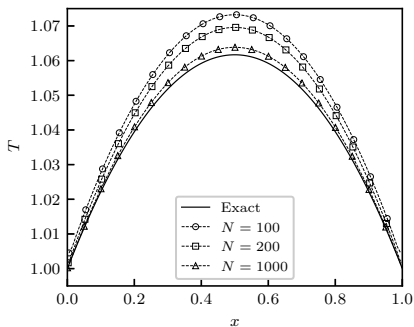
Validation : écoulement de Couette isotherme

Conditions initiales :

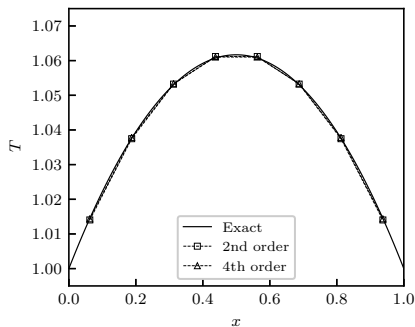
$$\begin{aligned} \rho_0 = 1, & \quad (u, v)_0 = (0, 0), & \quad P_0 = 1, \\ \gamma = 1.4, & \quad \text{Pr} = 0.73, & \quad \mu = 0.01. \end{aligned}$$

Conditions limites latérales de murs isothermes :

$$[u, v, T]_L = [0, 1.3\sqrt{\gamma}, 1], \quad [u, v, T]_R = [0, 0, 1].$$



(a) Ordre 1



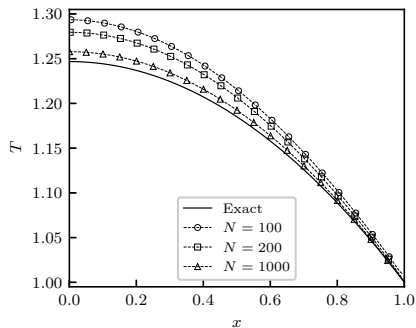
(b) Ordres 2 et 4 avec $N = 8$ points.

Validation : écoulement de Couette adiabatique

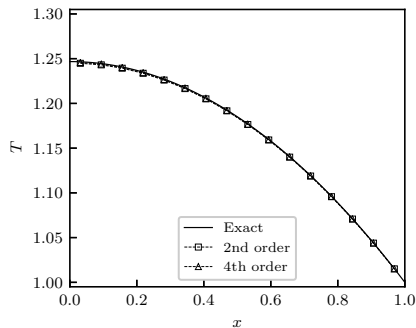
Conditions initiales :

$$\begin{aligned} \rho_0 = 1, & \quad (u, v)_0 = (0, 0), & \quad P_0 = 1, \\ \gamma = 1.4, & \quad \text{Pr} = 0.73, & \quad \mu = 0.01. \end{aligned}$$

Mur gauche adiabatique.



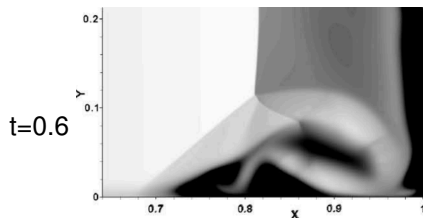
(a) Ordre 1



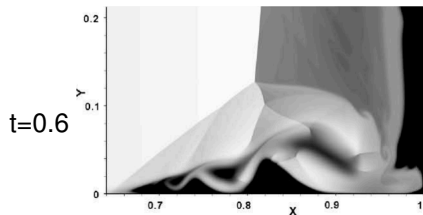
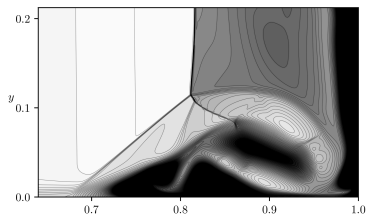
(b) Ordres 2 et 4 avec $N = 16$ points.

Interactions choc-couche limite

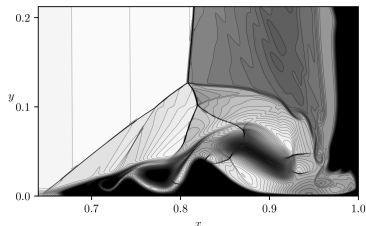
Gauche : référence (Daru & Tenaud, 2009 [9], OSMP7), droite : méthode cinétique d'ordre 4, (4000×2000) points.



(a) Contours de température, $Re = 200$

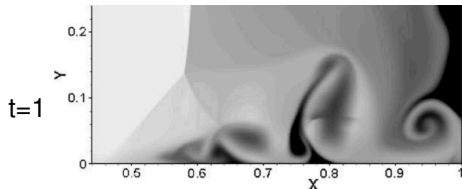


(b) Contours de température, $Re = 1000$

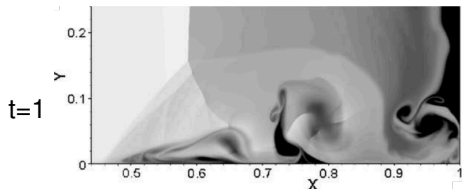
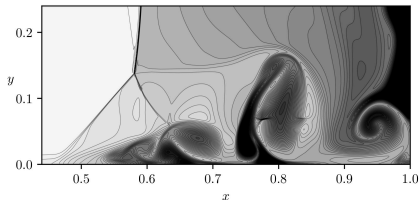


Interactions choc-couche limite

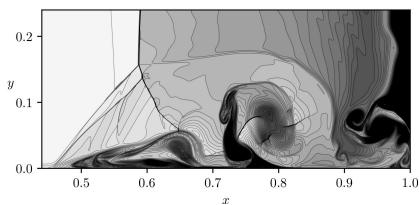
Gauche : référence (Daru & Tenaud, 2009 [9], OSMP7), droite : méthode cinétique d'ordre 4, (4000 × 2000) points.



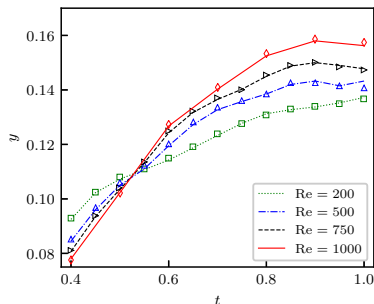
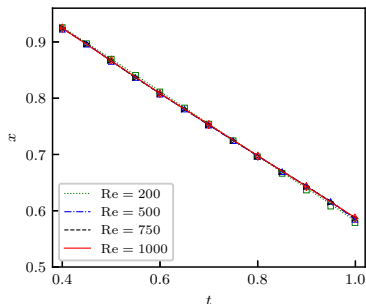
(a) Contours de température, $Re = 200$



(b) Contours de température, $Re = 200$



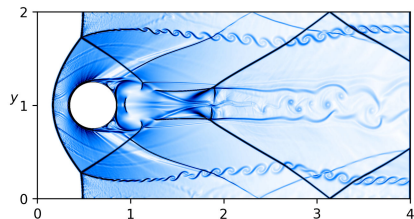
Suivi de la position du choc en lambda :



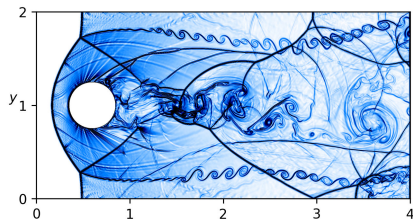
(Symboles : calcul de référence de Daru & Tenaud [9]).

Très bon accord qualitatif et quantitatif

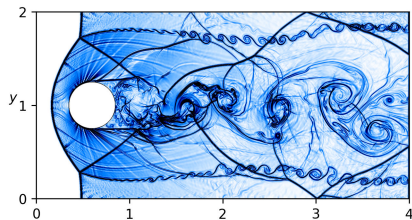
Ecoulement à Mach=3



(a) $Re_x = 10^4$



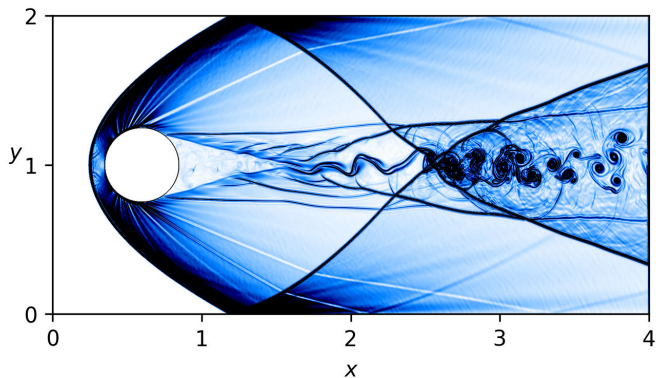
(b) $Re_x = 10^5$



(c) $Re_x = 10^7$

Note : Conditions limites “en escalier” sur le cylindre. A améliorer...

Écoulement Euler ($\mu = 0$) à Mach=100



1 Méthodes cinétiques pour les systèmes hyperboliques

2 Introduction des effets visqueux en 1D

- Chapman-Enskog
- Matrice de relaxation

3 Généralisation en multi-D

- Espace des moments
- Régularisation

4 Conclusion

- Preuve de concept : approximation des équations de NS par une **méthode cinétique explicite, locale, à Δt raisonnable**
 - Conditions de stabilité similaires au cas Euler
- Deux idées originales :
 - 1) Approcher les équations cibles par un développement au premier order en ε ,
 - 2) Introduction d'une matrice de relaxation.
- Deux articles en révision :
 - [G. WISSOCQ et R. ABGRALL, 10.48550/arXiv.2310.08356](https://arxiv.org/abs/10.48550/arXiv.2310.08356)
 - [G. WISSOCQ et R. ABGRALL, 10.48550/arXiv.2312.16323](https://arxiv.org/abs/10.48550/arXiv.2312.16323)
- Perspectives d'améliorations :
 - Performances de la méthode
 - Conditions limites inclinées (en cours)
 - Validations sur cas de complexité croissante.

- [1] S. JIN et Z. XIN, *Communications on Pure and Applied Mathematics* **48**, 235-276 (1995) (cf. pages 2, 5-6).
- [2] P. L. BHATNAGAR, E. P. GROSS et M. KROOK, *Physical Review* **94**, 511-525 (1954) (cf. pages 9-10).
- [3] R. NATALINI, *Journal of Differential Equations* **148**, 292-317 (1998) (cf. pages 9-10).
- [4] K. XU, *Journal of Computational Physics* **171**, 289-335 (2001) (cf. page 16).
- [5] F. BOUCHUT, *Journal of Statistical Physics* **95**, 113-170 (1999) (cf. page 16).
- [6] S. CHAPMAN et T. G. COWLING, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, 2nd edition (Cambridge University Press, 1953) (cf. pages 22-23).
- [7] R. ABGRALL et D. TORLO, *SIAM Journal on Scientific Computing* **42**, B816-B845 (2020) (cf. pages 36-37, 66-67).
- [8] J. LATT et B. CHOPARD, *Mathematics and Computers in Simulation* **72**, 165-168 (2006) (cf. page 52).
- [9] V. DARU et C. TENAUD, *Computers and Fluids* **38**, 664-676 (2009) (cf. pages 57-59).
- [10] G. WISSOCQ et R. ABGRALL, [10.48550/arXiv.2310.08356](https://arxiv.org/abs/10.48550/arXiv.2310.08356) (cf. page 63).
- [11] G. WISSOCQ et R. ABGRALL, [10.48550/arXiv.2312.16323](https://arxiv.org/abs/10.48550/arXiv.2312.16323) (cf. page 63).

Schéma numérique d'ordre 1 (*Abgrall & Torlo, 2020 [7]*) :

- Intégration spatiale sur maillage cartésien : $\partial/\partial x \rightarrow \delta_x^{(1)}/\Delta x$ (dérivées spatiales upwind)

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = -\Lambda_x \frac{\delta_x^{(1)} \mathbf{F}}{\Delta x} + \Omega(\mathbb{P}\mathbf{F}) [\mathbb{M}(\mathbb{P}\mathbf{F}) - \mathbf{F}]$$

- Intégration temporelle implicite/explicite :
 - Transport : Euler explicite ordre 1,
 - Relaxation : Euler implicite ordre 1.

$$\mathbf{F}^{n+1} = \mathbf{F}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Lambda_x \delta_x^{(1)} \mathbf{F}^n + \Delta t \Omega_{n+1} [\mathbb{M}_{n+1} - \mathbf{F}^{n+1}]$$

Le schéma implicite peut être rendu explicite en deux étapes :

$$1) \quad \mathbf{u}^{n+1} := \mathbb{P}\mathbf{F}^{n+1} = \mathbf{u}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbb{P}\Lambda_x \delta_x^{(1)} \mathbf{F}^n,$$

$$2) \quad \mathbf{F}^{n+1} = (\Omega_{n+1}^{-1} + \Delta t \mathbf{Id})^{-1} \left\{ \Omega_{n+1}^{-1} \left[\mathbf{F}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Lambda_x \delta_x^{(1)} \mathbf{F}^n \right] + \Delta t \mathbb{M}_{n+1} \right\}$$

Schéma numérique d'ordre arbitraire (Abgrall & Torlo, 2020 [7]) :

- Intégration spatiale sur maillage cartésien : $\partial/\partial x \rightarrow \delta_x^{(q)}/\Delta x$ (dérivées spatiales d'ordre q)

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = -\Lambda_x \frac{\delta_x^{(q)}\mathbf{F}}{\Delta x} + \Omega(\mathbb{P}\mathbf{F}) [\mathbb{M}(\mathbb{P}\mathbf{F}) - \mathbf{F}] := \mathcal{F}(\mathbf{F})$$

- Intégration temporelle : tentative par un Runge-Kutta implicite d'ordre q , à s sous-itérations, modélisé par $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^n + \Delta t \mathbf{A} \mathcal{F}(\hat{\mathbf{F}}), \quad \hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_s \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}^{n+1} = \mathbf{F}_s.$$

Exemple : Ordre 2, Lobato III C : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Problème : schéma implicite délicat à inverser...

Idée : Deferred correction (DeC, CITE)

- On définit un opérateur d'ordre élevé \mathcal{L}^2 :

$$\mathcal{L}^2(\hat{\mathbf{F}}) = \hat{\mathbf{F}} - \mathbf{F}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{A} \Lambda_x \delta_x^{(q)} \hat{\mathbf{F}} - \Delta t \mathbf{A} \Omega(\mathbf{P}\hat{\mathbf{F}}) \left[\mathbf{M}(\mathbf{P}\hat{\mathbf{F}}) - \hat{\mathbf{F}} \right].$$

Le schéma d'ordre élevé s'écrit : $\mathcal{L}^2(\hat{\mathbf{F}}) = 0$.

Problème difficile à résoudre.

- On définit un opérateur d'ordre 1, \mathcal{L}^1 , plus facile à résoudre :

$$\mathcal{L}^1(\hat{\mathbf{F}}) = \hat{\mathbf{F}} - \mathbf{F}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{C} \Lambda_x \delta_x^{(q)} \hat{\mathbf{F}} - \Delta t \mathbf{A} \Omega(\mathbf{P}\hat{\mathbf{F}}) \left[\mathbf{M}(\mathbf{P}\hat{\mathbf{F}}) - \hat{\mathbf{F}} \right],$$

où \mathbf{C} est une matrice diagonale associée à un Runge-Kutta [explicite](#). Le problème \mathcal{L}^1 peut être résolu de la même manière que le schéma d'ordre 1 présenté plus haut.

Principe de la methode DeC :

- 1) On définit : $\hat{\mathbf{F}}^{(0)} = \mathbf{F}_n$.
- 2) Résolution itérative du problème :

$$\mathcal{L}^1(\hat{\mathbf{F}}^{(p+1)}) = \mathcal{L}^1(\hat{\mathbf{F}}^p) - \mathcal{L}^2(\hat{\mathbf{F}}^p).$$

- 3) Après q itérations, $\hat{\mathbf{F}}^{(q)}$ approxime de $\mathbf{F}(t_{n+1})$ à l'ordre q .

On obtient le schéma numérique itératif suivant :

- 1) $\hat{\mathbf{u}}^{(p+1)} = \hat{\mathbf{u}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{A} \mathbb{P} \Lambda_x \delta_x^{(q)} \hat{\mathbf{F}}^{(p)}, \quad (\hat{\mathbf{u}}^{(p)} = \mathbb{P} \hat{\mathbf{F}}^p),$
- 2) $\hat{\mathbf{F}}^{(p+1)} = \Omega^{-1} [\Omega^{-1} + \mathbf{A} \Delta t]^{-1} \left(\mathbf{F}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{A} \Lambda_x \delta_x^{(q)} \hat{\mathbf{F}}^{(p)} \right) + \Delta t \mathbf{A} [\Omega^{-1} + \mathbf{A} \Delta t]^{-1} \mathbb{M}(\hat{\mathbf{u}}^{(p+1)}).$

Ordre 1 : schéma décentré upwind

$$\delta_x^{(1)} \mathbf{F} = \begin{cases} \mathbf{F}_k - \mathbf{F}_{k-1} & \text{si } a \geq 0, \\ \mathbf{F}_{k+1} - \mathbf{F}_k & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{stabilité linéaire : } a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1.$$

Ordre 2 :

$$\delta_x^{(2)} \mathbf{F} = \begin{cases} \mathbf{F}_{k+1}/3 + \mathbf{F}_k/2 - \mathbf{F}_{k-1} + \mathbf{F}_{k-2}/6 & \text{si } a \geq 0, \\ -\mathbf{F}_{k-1}/3 - \mathbf{F}_k/2 + \mathbf{F}_{k+1} - \mathbf{F}_{k+2}/6 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \text{stabilité linéaire : } a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 0.87.$$

Ordre 4 :

$$\delta_x^{(4)} = \begin{cases} \mathbf{F}_{k+1}/4 + 5\mathbf{F}_k/6 - 3\mathbf{F}_{k-1}/2 + \mathbf{F}_{k-2}/2 - \mathbf{F}_{k-3}/12 & \text{si } a \geq 0, \\ -\mathbf{F}_{k-1}/4 - 5\mathbf{F}_k/6 + 3\mathbf{F}_{k+1}/2 - \mathbf{F}_{k+2}/2 + \mathbf{F}_{k+3}/12 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 5/12 & -1/12 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{pmatrix}, \quad \text{stabilité linéaire : } a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1.04.$$