

Conception aérodynamique robuste: *maîtrise de l'observation scalaire*

Ludovic MARTIN

Mercredi 27 avril 2011



Contexte général: simulation numérique

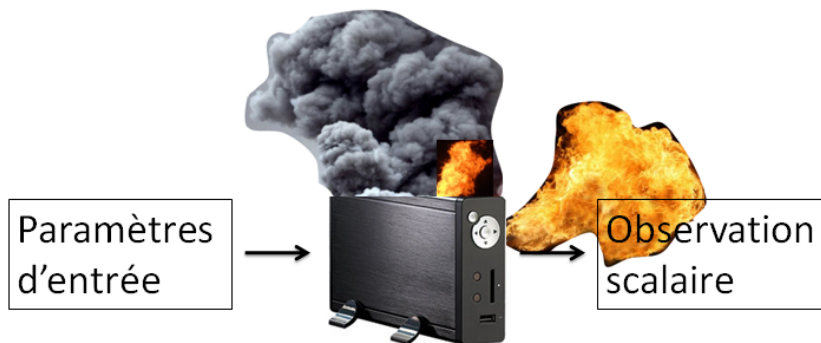
Lien paramètres-observation donné par:

- essai en vol
- test en soufflerie
- **simulation numérique**

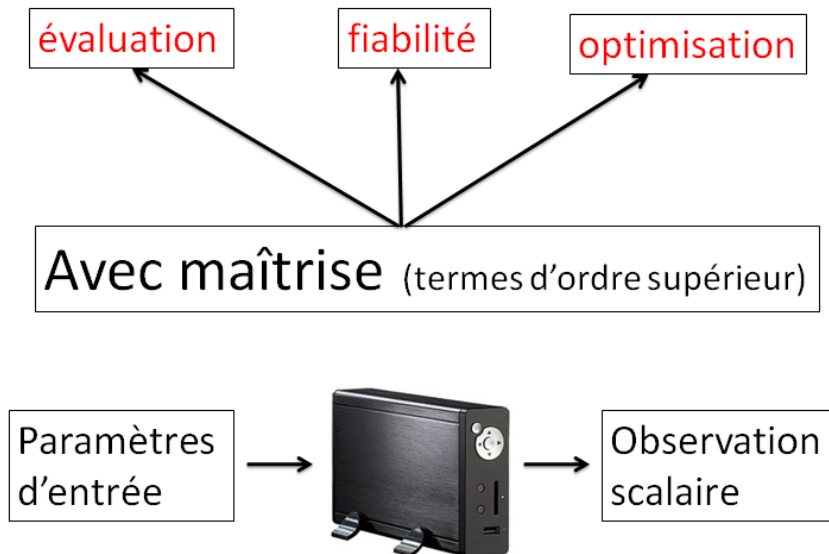


Contexte général: simulation numérique

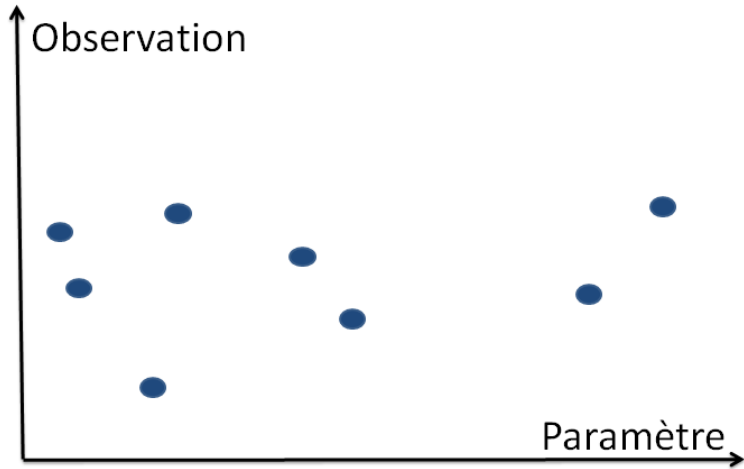
Sans maîtrise (calculs bruts)



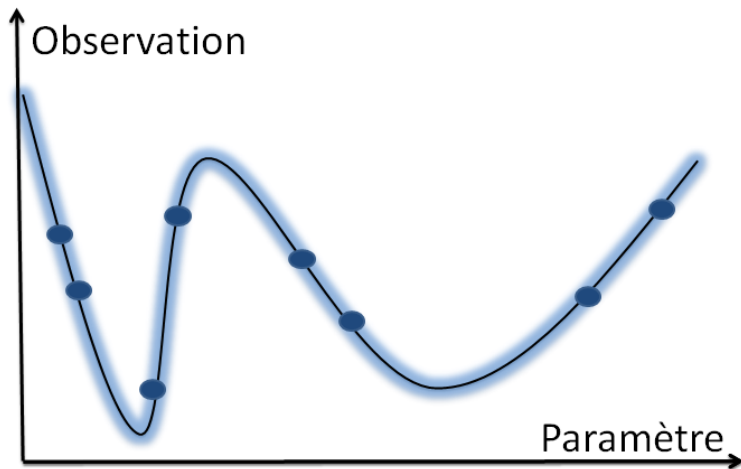
Contexte général: simulation numérique



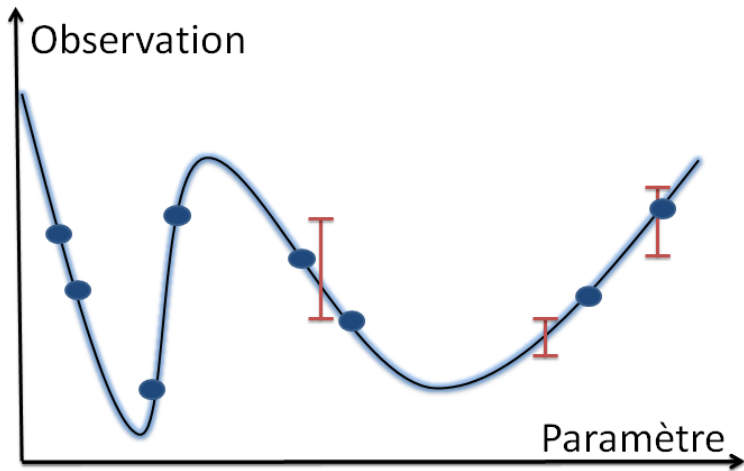
Sans maîtrise: connaissance points par points



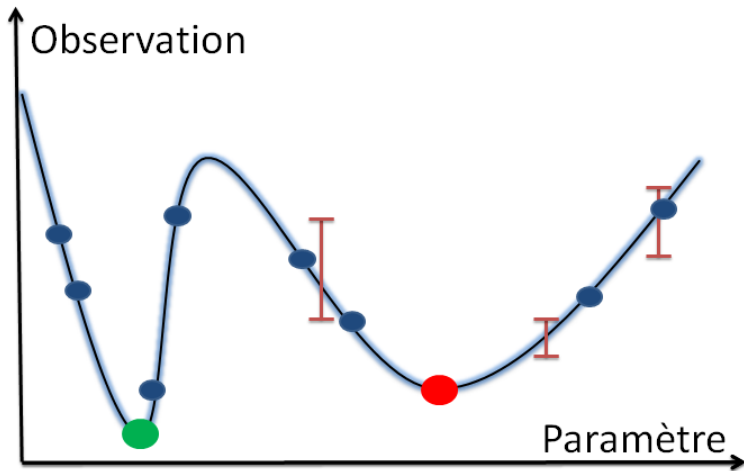
Avec maîtrise: **évaluation**



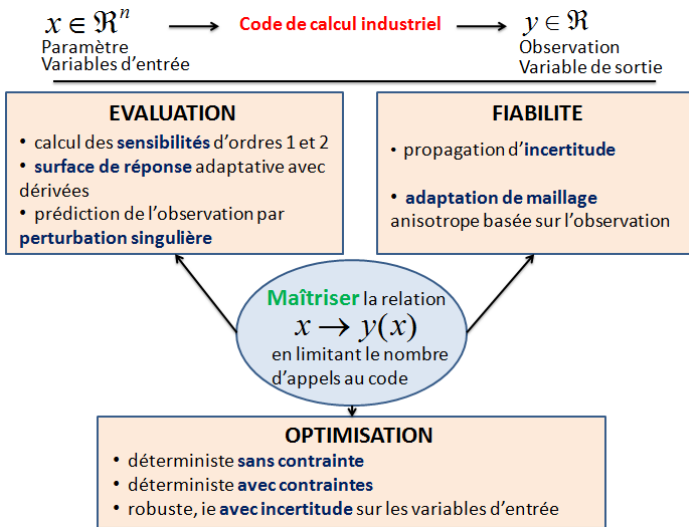
Avec maîtrise: **fiabilité**



Avec maîtrise: optimisation



Maîtrise de l'observation: thèmes abordés



Plan de l'exposé

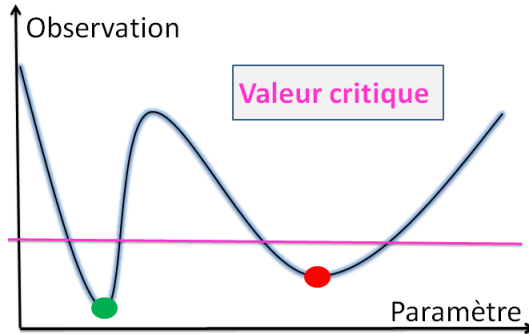
- 1 Termes d'ordre supérieur par différentiation automatique
- 2 Intérêt des termes d'ordre supérieur
 - EVALUATION: construction d'un modèle approché
 - FIABILITE: propagation d'incertitude
 - FIABILITE: adaptation de maillage anisotrope liée à une fonctionnelle
 - OPTIMISATION: déterministe sans/avec contrainte ou sous incertitude
- 3 Termes d'ordre supérieur par perturbations singulières

Intérêt de l'estimation de la non-linéarité

dérivée seconde \rightarrow non-linéarité de l'observation

Intérêt de la captation de la non-linéarité:

- Caractérisation de l'évolution autour d'un optimum: souci de robustesse

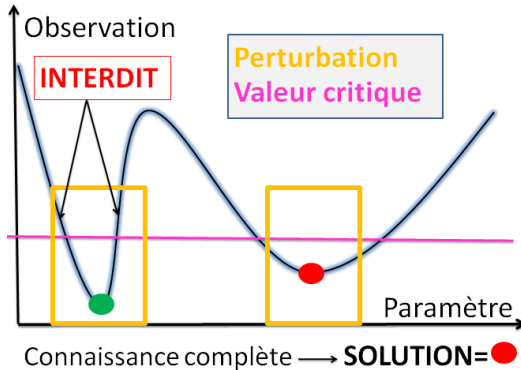


Intérêt de l'estimation de la non-linéarité

dérivée seconde \rightarrow non-linéarité de l'observation

Intérêt de la captation de la non-linéarité:

- Caractérisation de l'évolution autour d'un optimum: souci de robustesse

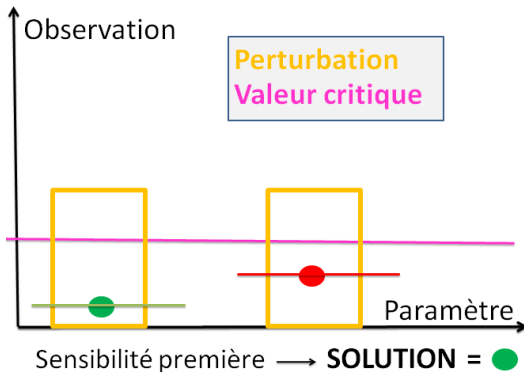


Intérêt de l'estimation de la non-linéarité

dérivée seconde \rightarrow non-linéarité de l'observation

Intérêt de la captation de la non-linéarité:

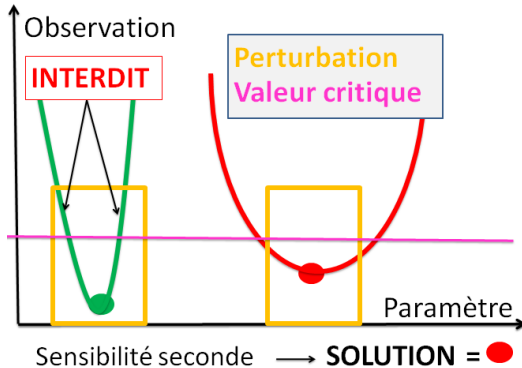
- Caractérisation de l'évolution autour d'un optimum: souci de robustesse



Intérêt de l'estimation de la non-linéarité

dérivée seconde \rightarrow non-linéarité de l'observation
Intérêt de la captation de la non-linéarité:

- Caractérisation de l'évolution autour d'un optimum: souci de robustesse

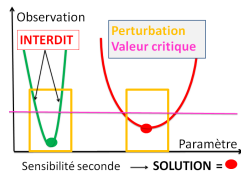
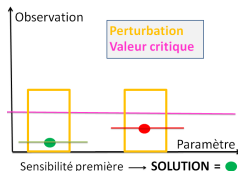
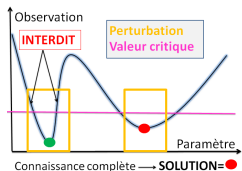


le passage à l'ordre deux indispensable pour sélectionner la bonne solution !

Intérêt de l'estimation de la non-linéarité

dérivée seconde \rightarrow non-linéarité de l'observation
Intérêt de la captation de la non-linéarité:

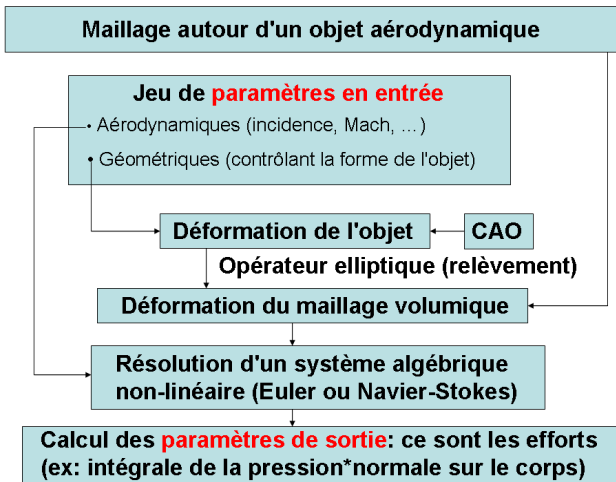
- Caractérisation de l'évolution autour d'un optimum: souci de robustesse



Ici, ordre deux indispensable pour sélectionner la bonne solution !

- impact dans de nombreux domaines: propagation d'incertitude, modèle approché adaptatif, optimisation ...

Chaîne industrielle à différentier



différentiateur automatique = **TAPENADE** (INRIA)

Formulation des dérivées

Observation scalaire à différentier = J

$$\begin{cases} E(W) = 0 & \text{équations fluides (Euler ou Navier-Stokes), adjoint } \psi \\ L(X_p) = 0 & \text{équations de déformation, adjoint } \phi \end{cases}$$

- Technique de Giles (2007): paramètre de dérivation **aérodynamique** (λ)

$$\frac{d^2 J}{d\lambda^2} = D_\lambda^{(1)} J - \psi^T D_\lambda^{(1)} E$$

- Extension à un paramètre de dérivation **géométrique** (ν)

$$\frac{d^2 J}{d\nu^2} = D_{W,\nu}^{(2)} J - \psi^T D_{W,\nu}^{(2)} E - \phi^T \frac{\partial L}{\partial X_p} \frac{d^2 X_p}{d\nu^2}$$

Euler 3D: aile ONERA m6 ($M=0.84$; $\alpha=3.06$)

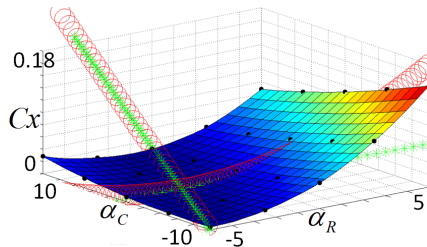
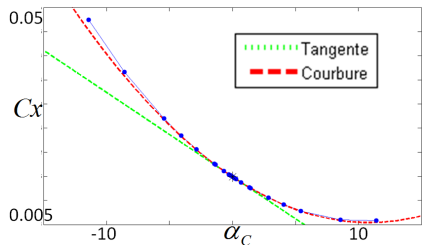
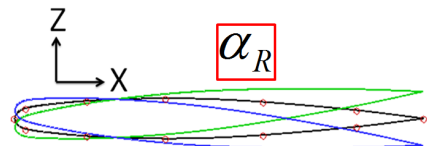
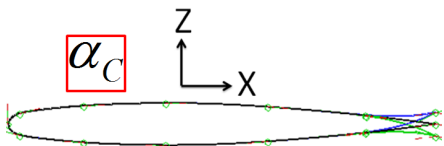


Figure: traînée C_x vis-à-vis de l'angle de cambrure α_C et de l'angle de rotation α_R

Navier-Stokes 2D et 3D: RAE2822 ($M=0.734$; $\alpha=1$)

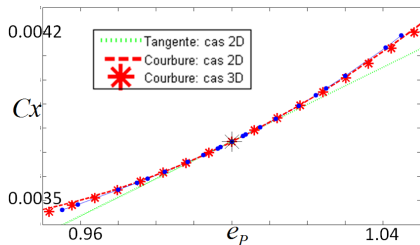
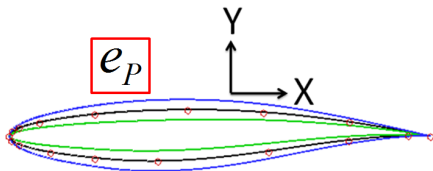
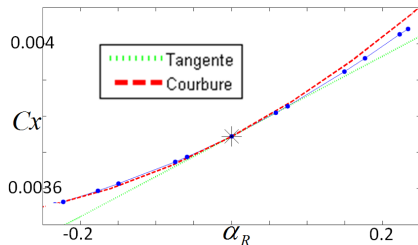
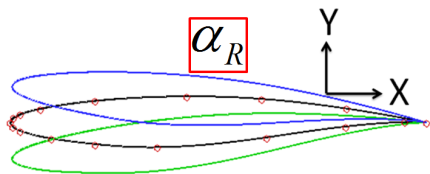


Figure: traînée C_x vis-à-vis de l'angle de rotation α_R et de l'épaisseur relative e_P

Surface de réponse de Duchon avec dérivées premières et secondes

Objectif: trouver une fonction f^* approchant la fonction f à partir de D données exactes

Point de départ: travaux de Kybic, Blu et Unser (2002).

- Minimisation d'un critère de qualité J sur l'ensemble des fonctions F_{Q_1, \dots, Q_D} passant par les données exactes Q_i

$$f^* = \min_{f \in F_{Q_1, \dots, Q_D}} J(f)$$

- J = critère de qualité basé sur la **semi-norme de Duchon**
- Intérêt de Duchon: noyau inclus dans l'ensemble des polynômes
- f^* = noyau polynomial + autres fonctions

Extension de l'interpolateur de Duchon à l'ordre 2.

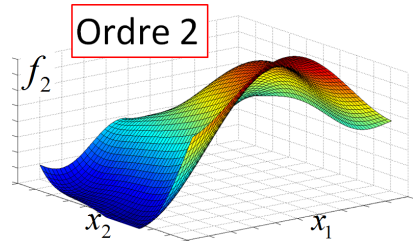
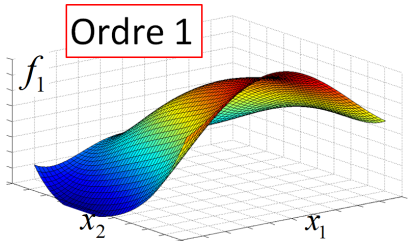
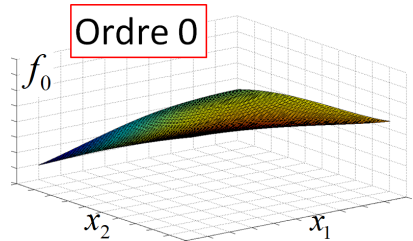
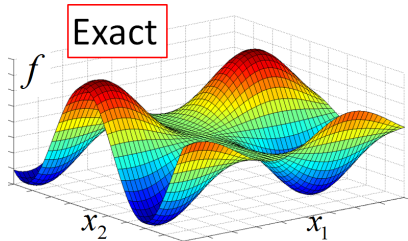
Ce modèle respecte valeurs de l'observation + tangentes et courbures.

Surface de réponse de Duchon avec dérivées premières et secondes

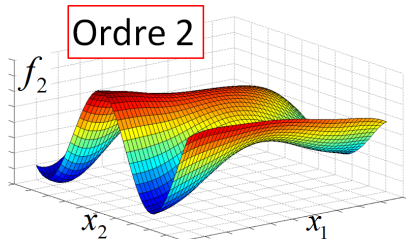
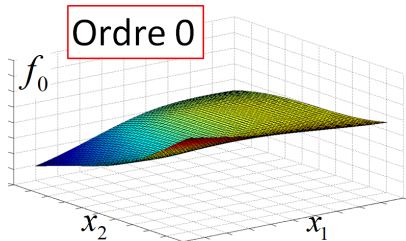
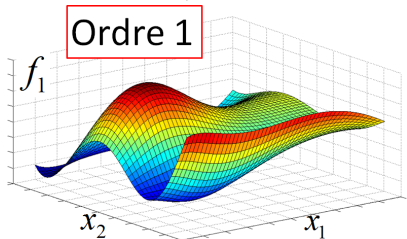
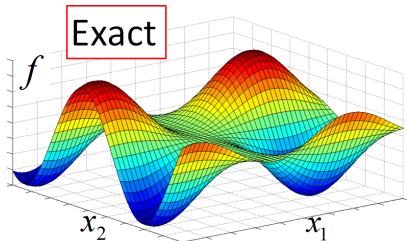
Contributions pour rendre l'interpolation avec dérivées très avantageuse:

- Prédiction de l'erreur a priori: différence entre modèles d'ordres différents (avantage par rapport au krigeage: pas l'aspect statistique)
- Capacité d'enrichir automatiquement les données pour réduire l'erreur d'interpolation. Algorithme d'**enrichissement** D_{ik} : calcul exact de la fonction au point d'écart maximal entre les modèles D_i et D_k .
- Possibilité d'intégrer des **données de natures différentes** (points sans dérivée, points avec dérivées 1, points avec dérivées 1 et 2)

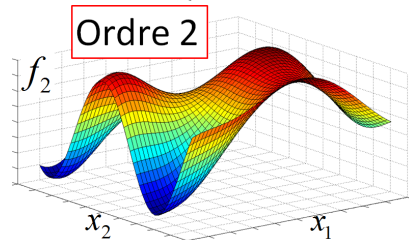
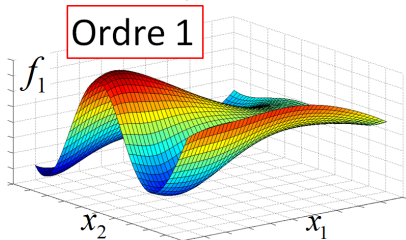
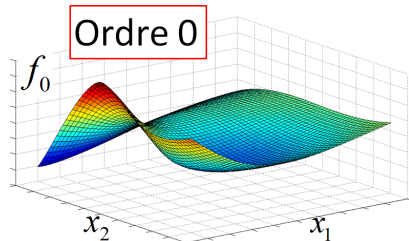
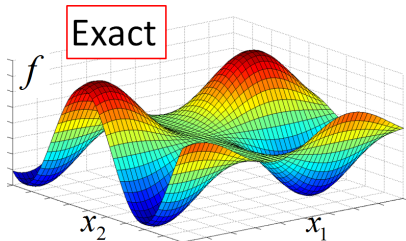
Film: enrichissement D_{12} d'une fonction analytique (itération 1/10)



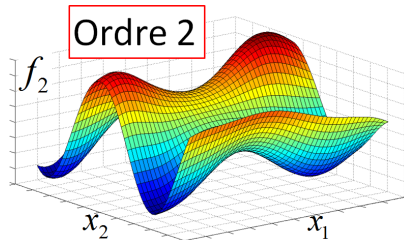
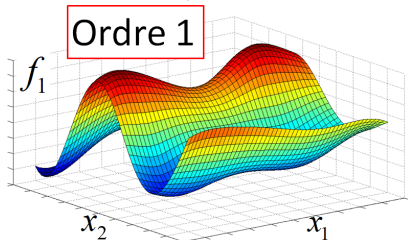
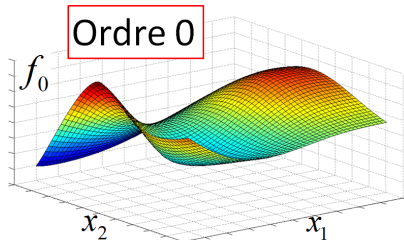
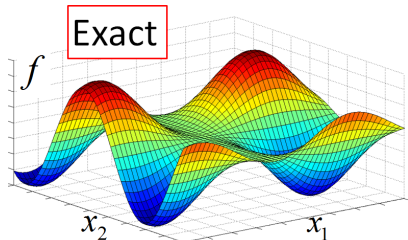
Film: enrichissement D_{12} d'une fonction analytique (itération 2/10)



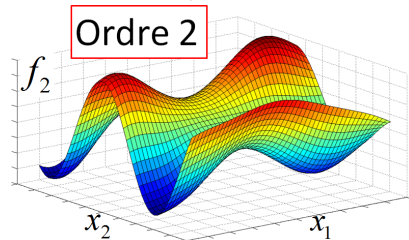
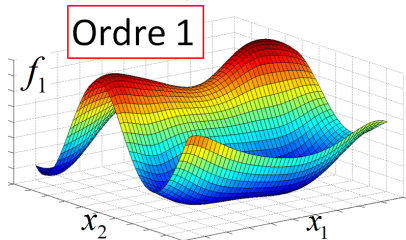
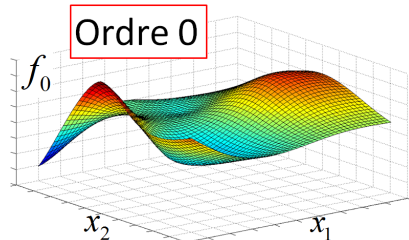
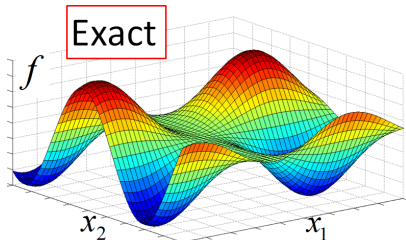
Film: enrichissement D_{12} d'une fonction analytique (itération 3/10)



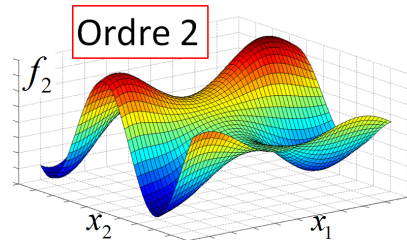
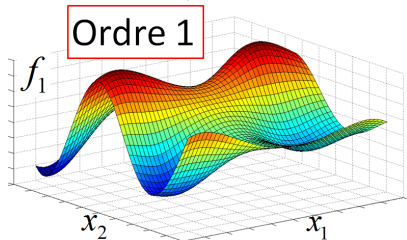
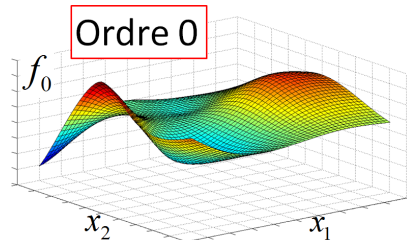
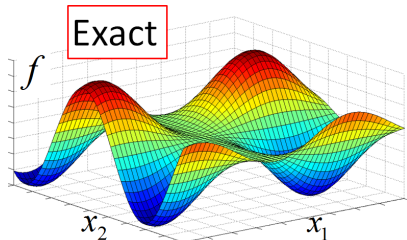
Film: enrichissement D_{12} d'une fonction analytique (itération 4/10)



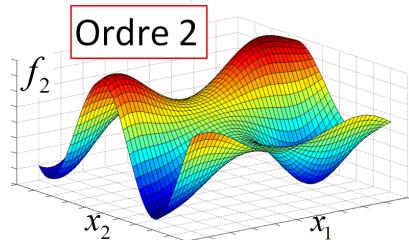
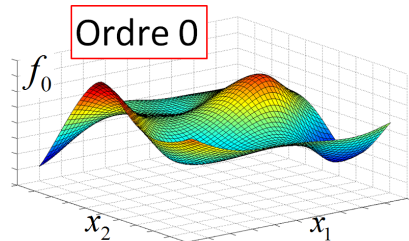
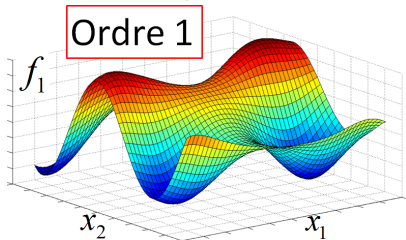
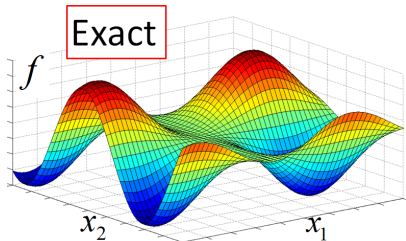
Film: enrichissement D_{12} d'une fonction analytique (itération 5/10)



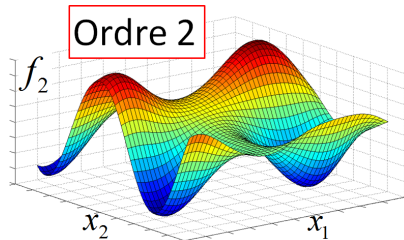
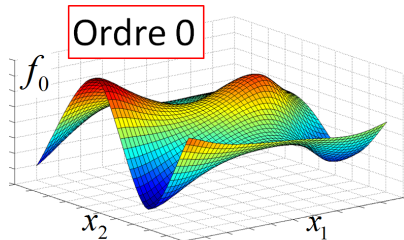
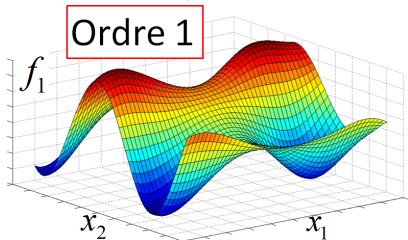
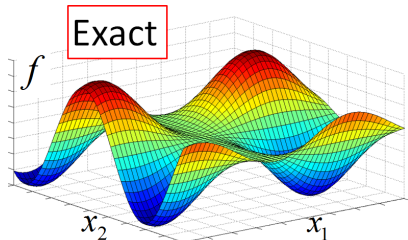
Film: enrichissement D_{12} d'une fonction analytique (itération 6/10)



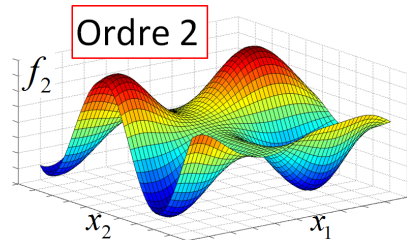
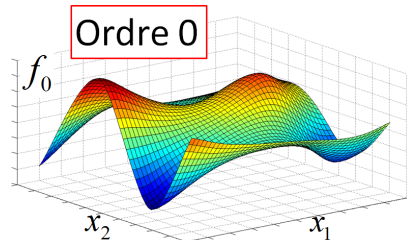
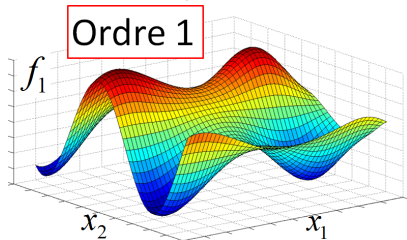
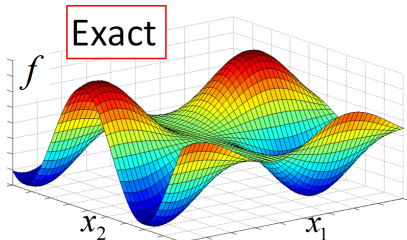
Film: enrichissement D_{12} d'une fonction analytique (itération 7/10)



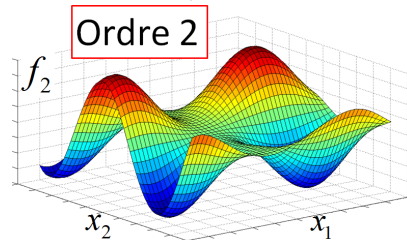
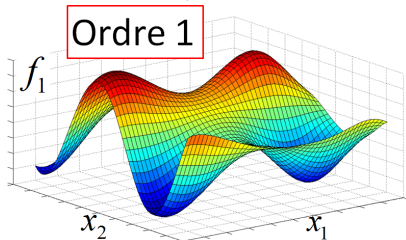
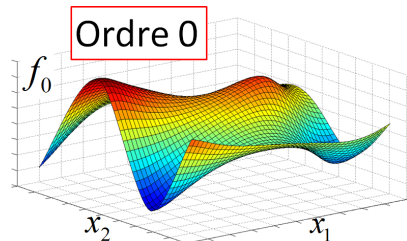
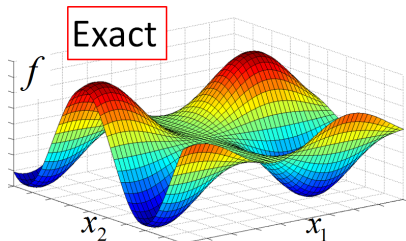
Film: enrichissement D_{12} d'une fonction analytique (itération 8/10)



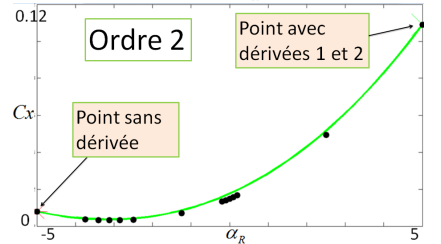
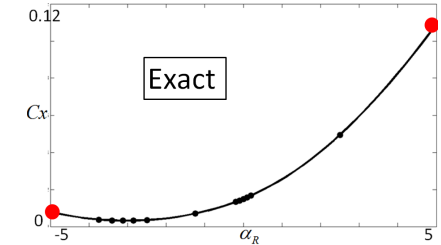
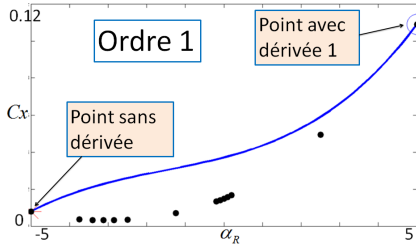
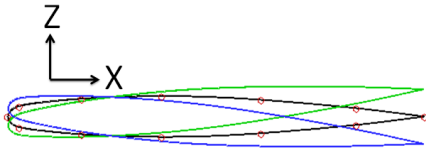
Film: enrichissement D_{12} d'une fonction analytique (itération 9/10)



Film: enrichissement D_{12} d'une fonction analytique (itération 10/10)



Points de natures différentes: aile ONERA m6 (Euler 3D avec $M=0.84$; $\alpha=3.06$)



Objectif: Paramètres d'entrée incertains \rightarrow loi de probabilité sur l'observation

Passage d'un problème de nature statistique à un problème de nature déterministe:
utilisation du **système de Pearson** (1916)

Influence des quatre premiers moments statistiques sur la loi de probabilité

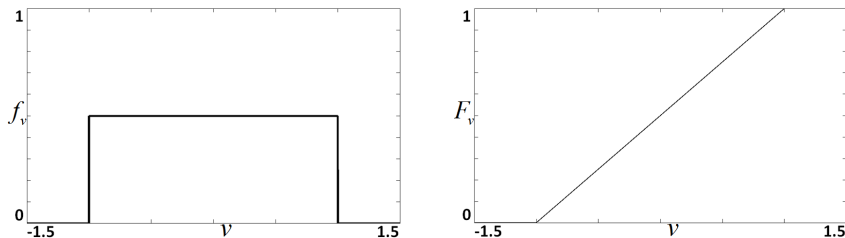


Figure: Loi de probabilité et fonction de répartition

Objectif: Paramètres d'entrée incertains \rightarrow loi de probabilité sur l'observation

Passage d'un problème de nature statistique à un problème de nature déterministe: utilisation du **système de Pearson** (1916)

Influence des quatre premiers moments statistiques sur la loi de probabilité

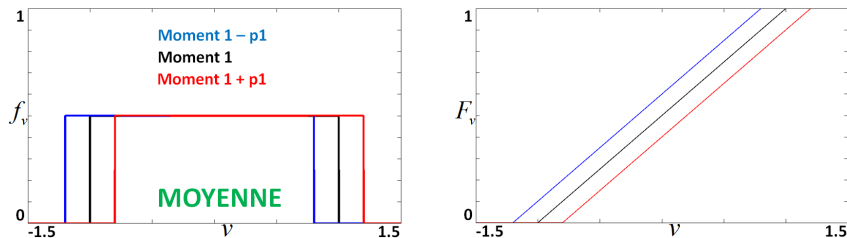


Figure: Effet du premier moment statistique: moyenne

Objectif: Paramètres d'entrée incertains \rightarrow loi de probabilité sur l'observation

Passage d'un problème de nature statistique à un problème de nature déterministe:
utilisation du **système de Pearson** (1916)

Influence des quatre premiers moments statistiques sur la loi de probabilité

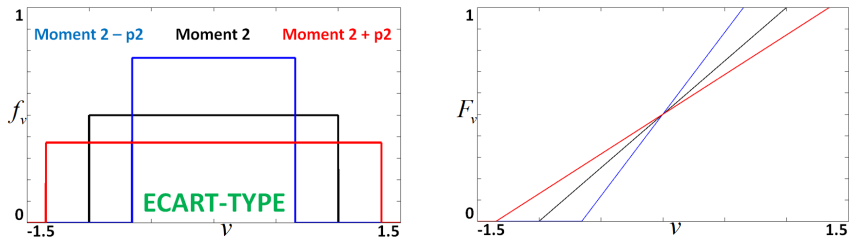


Figure: Effet du second moment statistique: écart-type

Objectif: Paramètres d'entrée incertains \rightarrow loi de probabilité sur l'observation

Passage d'un problème de nature statistique à un problème de nature déterministe:
utilisation du **système de Pearson** (1916)

Influence des quatre premiers moments statistiques sur la loi de probabilité

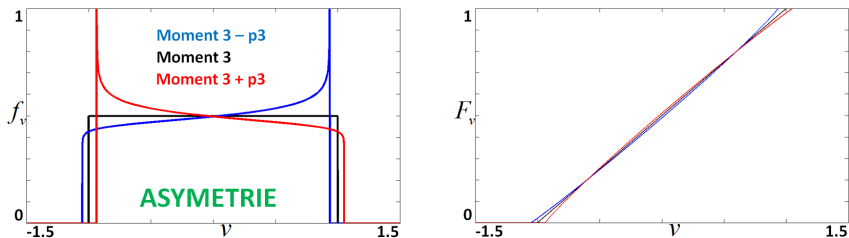


Figure: Effet du troisième moment statistique: asymétrie

Objectif: Paramètres d'entrée incertains \rightarrow loi de probabilité sur l'observation

Passage d'un problème de nature statistique à un problème de nature déterministe:
utilisation du **système de Pearson** (1916)

Influence des quatre premiers moments statistiques sur la loi de probabilité

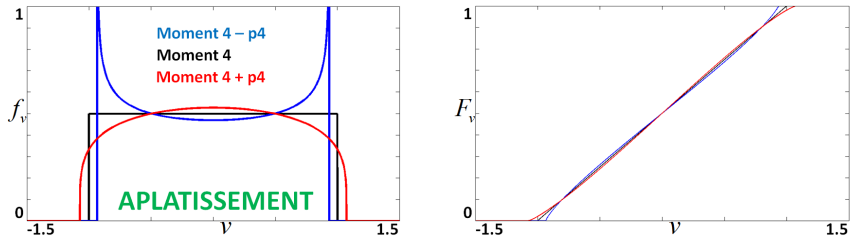
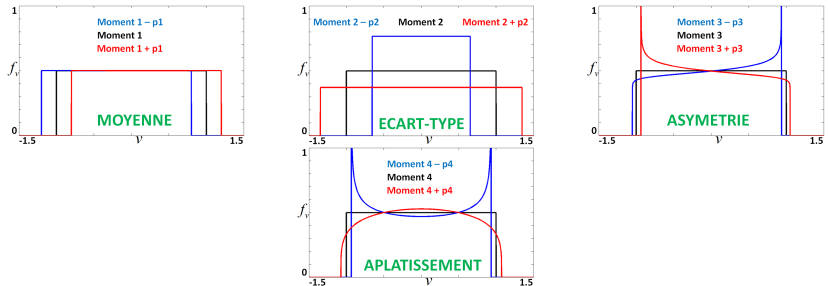


Figure: Effet du quatrième moment statistique: aplatissement

Objectif: Paramètres d'entrée incertains \rightarrow loi de probabilité sur l'observation

Passage d'un problème de nature statistique à un problème de nature déterministe:
utilisation du **système de Pearson** (1916)

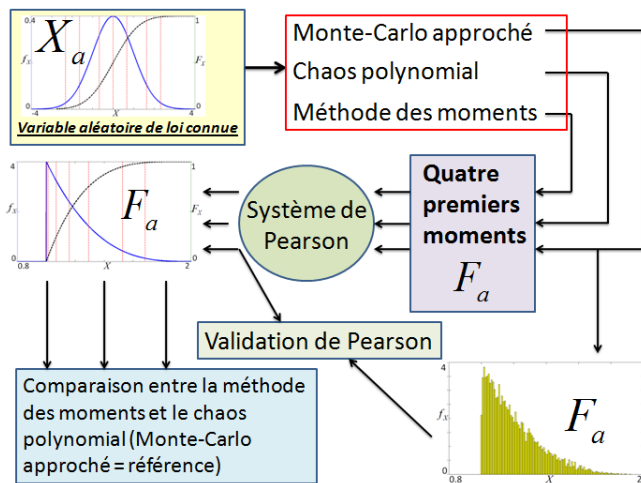
Influence des quatre premiers moments statistiques sur la loi de probabilité



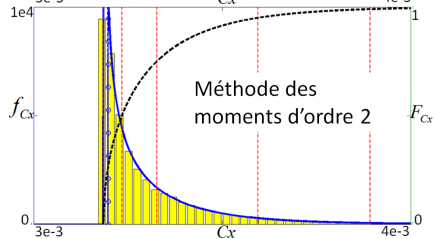
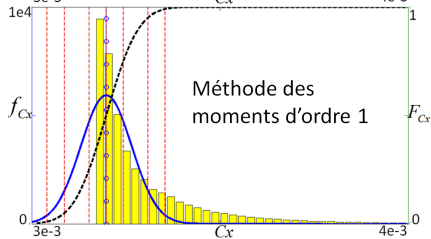
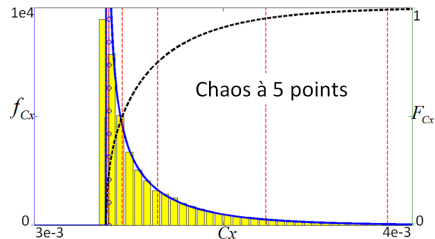
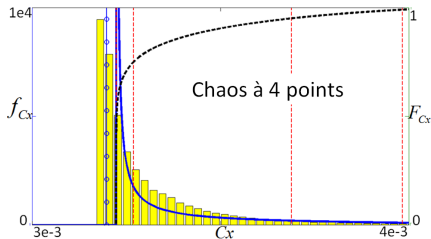
SYSTEME DE PEARSON: quatre moments statistiques \rightarrow loi de probabilité

La propagation d'incertitude revient donc à l'estimation de **quatre scalaires** (4 moments statistiques de l'observation)

Schéma récapitulatif de la stratégie d'incertitude



aléa sur la traînée (rotation incertaine): aile ONERA m6 (Euler 3D avec $M=0.84$; $\alpha=3.06$)



Nécessité de l'ordre 2 pour la méthode des moments

- Intérêt d'une loi de probabilité de l'observation: estimation de la **probabilité de défaillance**: $P[C_x > C_x^{TOL}]$
Méthode des moments (PM1: ordre 1, PM2: ordre 2) vs Monte-Carlo approché (MCa)

aile ONERA m6: loi uniforme en entrée			
-	PM1	PM2	MCa
$C_x^{TOL} = 33$ cts	9.4	39.8	37.3
$C_x^{TOL} = 35$ cts	0	12.6	12.3
$C_x^{TOL} = 37$ cts	0	3.1	3.3

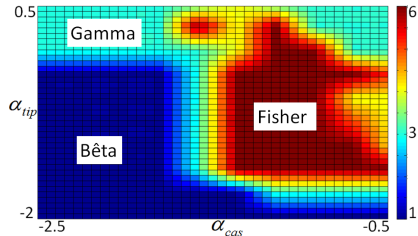
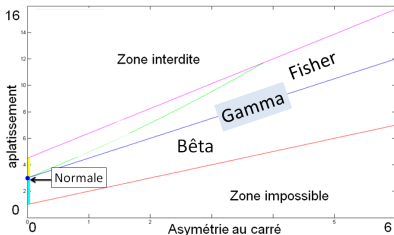
Passage de l'ordre 1 à 2 indispensable pour un résultat exploitable !

- Plus généralement, passage ordre 1 \rightarrow ordre 2 plus important que passage ordre 2 \rightarrow ordre 3 car:
à l'ordre 1: pas d'information sur le moment 1, 3 ou 4
à l'ordre 2: information sur les 4 moments

Méthodologie d'incertitude retenue = **méthode des moments d'ordre deux** + **système de Pearson**

vision industrielle: voilure transsonique (Navier-Stokes 3D)

- **transmission des données:** chaque discipline transmet la loi de probabilité (loi connue paramétrée) issue du système de Pearson
- **interpolation de l'incertitude:** estimation rapide de l'incertitude pour réduire les délais. *A droite: type de loi du rayon d'action lorsque les angles de cassure et d'extrémité sont incertains*



Interpolation envisageable car existence d'une certaine **continuité du système de Pearson** (passage de Bêta à Fisher via Gamma)

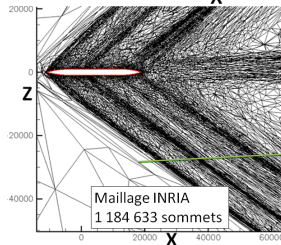
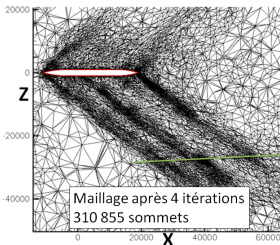
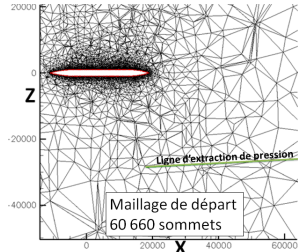
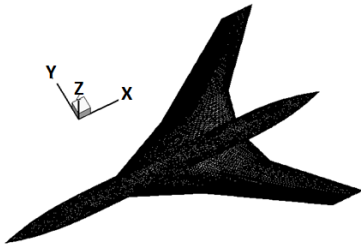
Méthodologie adoptée

Objectif: adapter le maillage pour améliorer la prédiction d'une observation scalaire

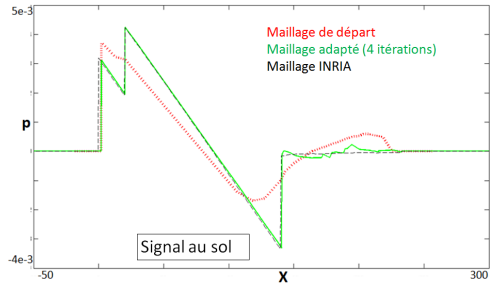
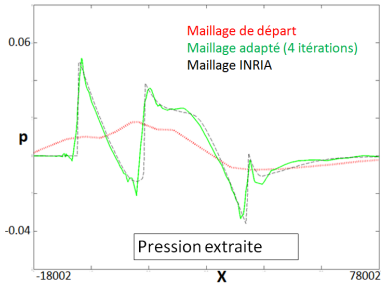
Alternance entre deux types d'itération:

itération de sous-maillage	itération de remaillage
découpage isoP2 d'éléments	régénération d'un maillage suivant une métrique
paramètre adjoint (produit résidu et adjoint lié à l'observation)	métrique (produit matrice hessienne et paramètre adjoint)
isotrope	anisotrope
raffinement de la peau	ne touche pas la peau
projection des sommets sur la géométrie	seuil du ratio d'anisotropie normalisation L_p spécification de la complexité gradation

Observation = pression à une longueur d'avion (forme HISAC, Euler 3D)



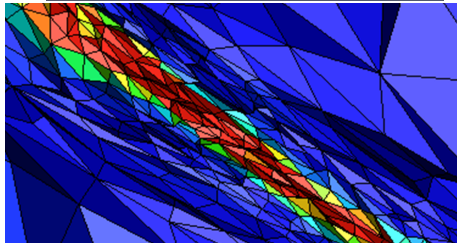
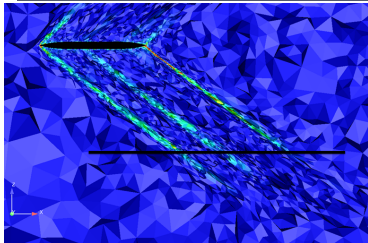
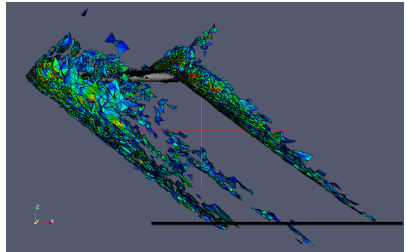
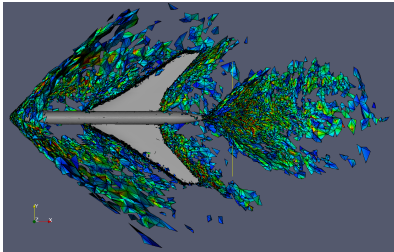
Observation = pression à une longueur d'avion (forme HISAC, Euler 3D)



- **maillage de départ: 82.2 dBA**
- **maillage adapté: 80.5 dBA**
- **référence INRIA: 80.6 dBA**

Validation de notre technique d'adaptation **par comparaison au résultat INRIA**

Observation = pression à une longueur d'avion (forme HISAC, Euler 3D)



Optimisation déterministe: contexte général

Objectif: trouver l'optimum **avec le plus faible coût de calcul**. Valorisation des **dérivées secondes exactes** de la fonction-coût déterminées par différentiation automatique.

Méthodes à base de direction de descente possibles:

- ordre 0: méthode de la section dorée (série d'optimisations mono-variable)
- ordre 1: gradient simple et **gradient conjugué**
- ordre 2: méthode de **quasi-Newton (BFGS)** et méthode de **Newton (robuste)**

Coût de calcul C_t donné par:

$$C_t = N_F + (1 + N_C) \frac{N_G}{20} + \frac{N_H N_X}{20}$$

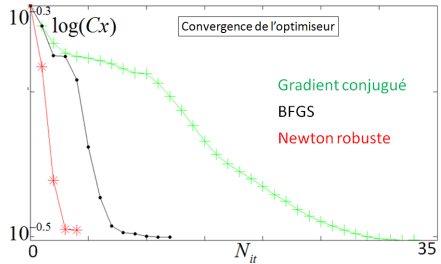
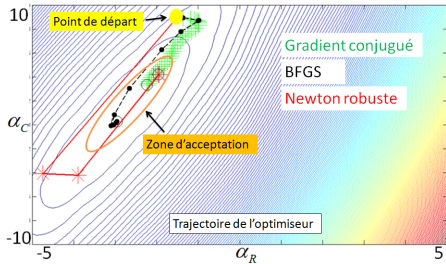
N_F , N_G , N_H = nombre d'appels de fonction, gradient et hessien

N_C = nombre de contraintes

N_X = nombre de variables d'optimisation

Résolution linéaire estimée à 1/20 d'une résolution non-linéaire

Optimisation déterministe sans contrainte: aile ONERA m6



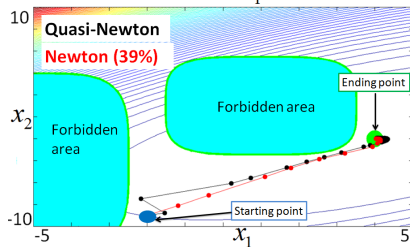
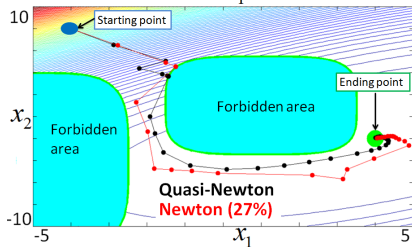
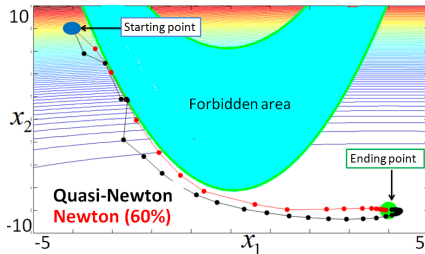
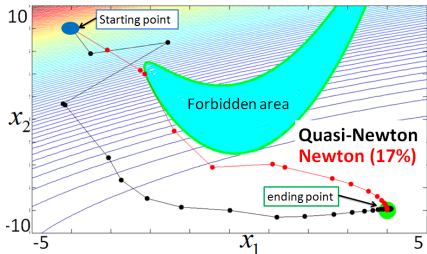
Minimisation de la traînée C_x vis-à-vis des angles de rotation α_R et de cambrure α_C

$(\alpha_R^{(0)}, \alpha_C^{(0)})$	méthode	N_F	N_G	N_H	C_t
(-1.5, 9)	Gradient conjugué	36	33	0	37.6
	BFGS	15	12	0	15.6
	Newton robuste	6	4	4	6.6

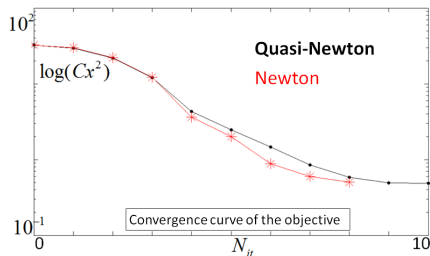
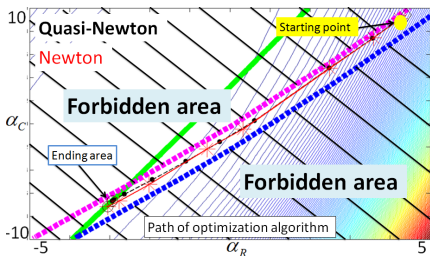
Newton robuste → **82%** de gain par rapport au gradient conjugué

Newton robuste → **58%** de gain par rapport à BFGS

Optimisations analytiques avec contrainte



Optim. déterministe avec contrainte: aile ONERA m6



Minimisation de la traînée au carré $(Cx)^2$ vis-à-vis des angles de rotation α_R et de cambrure α_C

Contraintes d'inégalité sur la portance C_z et le moment de tangage C_m

$(\alpha_R^{(0)}, \alpha_C^{(0)})$	contraintes	méthode	N_F	N_G	N_H	C_t
(4.4, 9.4)	$C_z > 0.2$ $-0.2 < C_m < -0.15$	Quasi-Newton	22	11	0	24.2
		Newton	17	9	9	19.7

Newton \rightarrow 19% de gain par rapport à BFGS

Optimisation sous incertitude: contexte général

Objectif: **contrôler l'aléa** d'une fonctionnelle en optimisant un ou plusieurs **objectifs statistiques**

Deux types d'objectif statistique (détermine la stratégie d'évaluation):

- moment statistique (moyenne, écart-type, asymétrie, ...) → méthode des moments d'ordre 2
- probabilité de défaillance → méthode des moments d'ordre 2 + système de Pearson

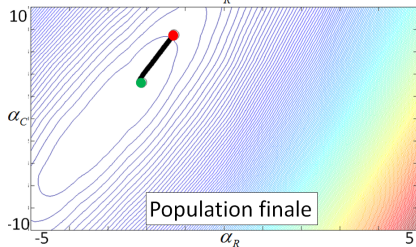
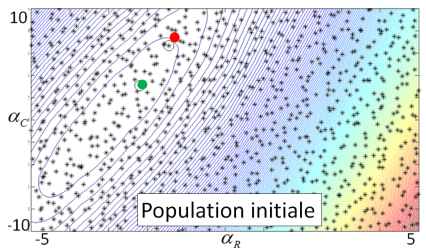
Formulation innovante de l'optimisation sous incertitude (front de Pareto):

AVANT: **moyenne - écart-type** exclusivement (optimisation robuste)

MAINTENANT: **moyenne - probabilité** possible

Utilisation d'un **algorithme génétique multi-objectif** → détermination de **l'ensemble des solutions possibles**.

Optimisation sous incertitude: aile ONERA m6

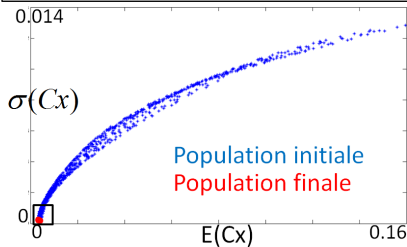


Population de **1000** individus
évoluant sur **16** générations

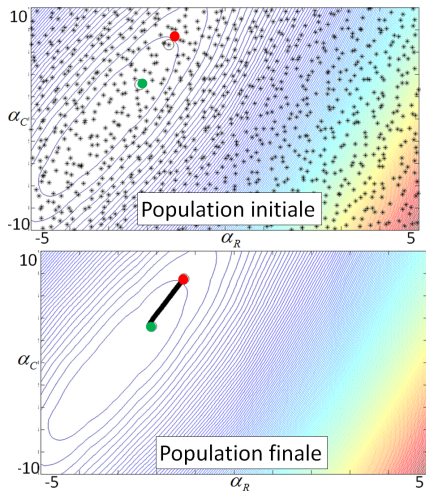
Minimisation de la **moyenne** et de l'**écart-type**
de *trainée* C_x vis-à-vis des angles de rotation α_R
et de cambrure α_C

Compromis **performance** - **robustesse**

Front de Pareto



Optimisation sous incertitude: aile ONERA m6

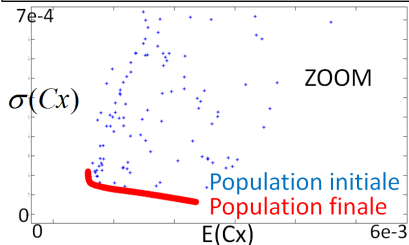


Population de **1000** individus
évoluant sur **16** générations

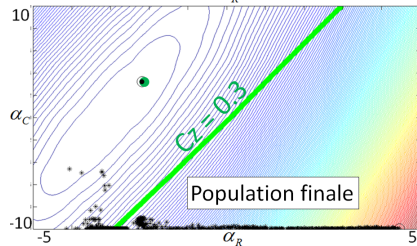
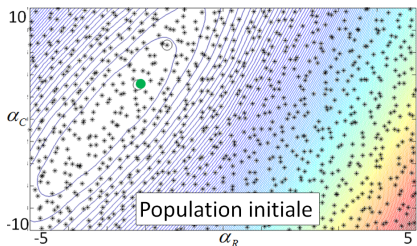
Minimisation de la **moyenne** et de l'**écart-type**
de *trainée* C_x vis-à-vis des angles de rotation α_R
et de cambrure α_C

Compromis **performance** - **robustesse**

Front de Pareto



Optimisation sous incertitude: aile ONERA m6

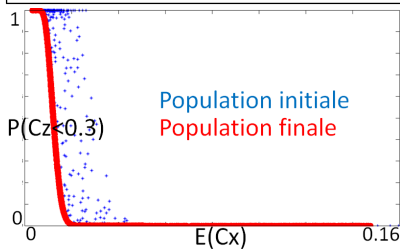


Population de 1000 individus
évoluant sur 16 générations

Minimisation de la **moyenne** de *trainée* C_x et
d'une **probabilité de défaillance** sur la *portance*
 C_z vis-à-vis des angles de *rotation* α_R et de
cambrure α_C

Compromis **performance** – **probabilité de défaillance**

Front de Pareto



Principe de la méthode des perturbations singulières M_{ps}

Objectif: correction d'une observation J devant une **perturbation géométrique**:
paramètre c , avec $c \rightarrow c + \delta c$

état u_c et adjoint ψ_c

lagrangien: $L(c, u_c, \psi_c) = J(c) + R(u_c, c) \cdot \psi_c$

$$\begin{aligned}\delta J &= L(c + \delta c, u_{c+\delta c}, \psi_c) - L(c, u_c, \psi_c) \\ &= [L(c + \delta c, u_{c+\delta c}, \psi_c) - L(c + \delta c, u_c, \psi_c)] \\ &\quad + [L(c + \delta c, u_c, \psi_c) - L(c, u_c, \psi_c)]\end{aligned}$$

- **second terme**: variation principale
- **premier terme**: singularité à capter

Variation $u_{c+\delta c} - u_c$: variation **locale haute fréquence** rapidement captée par schéma itératif

Approximation: $u_{c+\delta c} \rightarrow u_{c+\delta c}^{(ps)}$

$$\delta J \approx [L(c + \delta c, u_{c+\delta c}^{(ps)}, \psi_c) - L(c + \delta c, u_c, \psi_c)] + [L(c + \delta c, u_c, \psi_c) - L(c, u_c, \psi_c)]$$

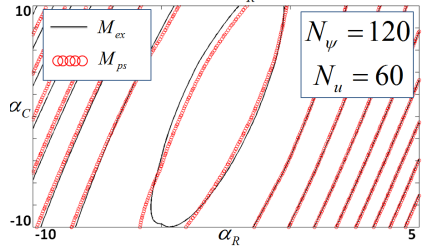
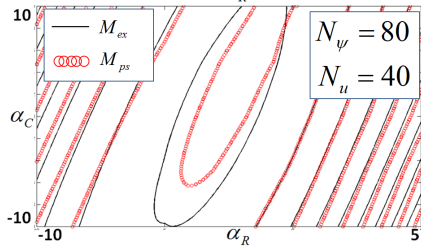
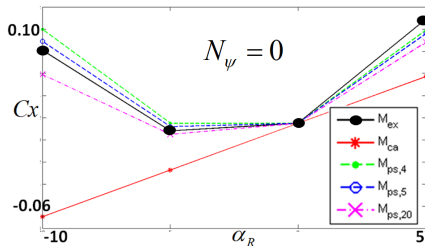
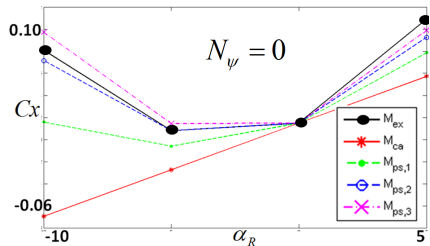
Principe de la méthode des perturbations singulières M_{ps}

Objectif: correction d'une observation J devant une **perturbation géométrique**:
 paramètre c , avec $c \rightarrow c + \delta c$

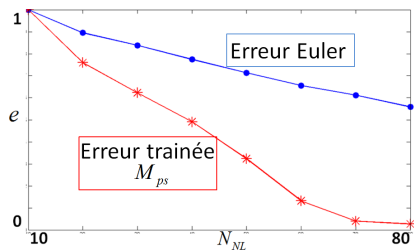
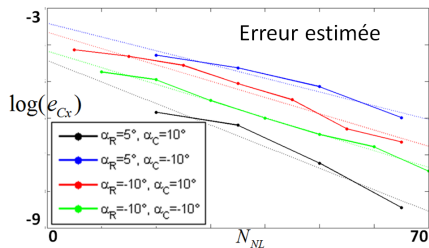
$$\left\{ \begin{array}{l} J_{ca}(c + \delta c) = J(c) + R(u_c, c + \delta c) \cdot \psi_c \quad \text{correction adjointe } M_{ca} \\ \\ u_c \xrightarrow{N_u \text{ itérations [locales]}} u_{c+\delta c}^{(ps)} \quad \text{captation des hautes fréquences} \\ \\ \psi_c \xrightarrow{N_\psi \text{ itérations globales}} \psi_{c+\delta c}^{(ps)} \quad \text{[captation des basses fréquences]} \\ \\ J_{ps}(c + \delta c) = J(c) + R(u_{c+\delta c}^{(ps)}, c + \delta c) \cdot \psi_{c+\delta c}^{(ps)} \quad \text{méthode } M_{ps} \end{array} \right.$$

- perturbation **singulière** de maillage (rajout de sommets): méthode M_{ps} indispensable (terme caché)
- perturbation **régulière** de maillage (déplacement de sommets): méthode M_{ps} pour estimer termes d'ordre supérieur (non linéarité)

Performance: aile ONERA m6 (Euler 3D avec $M=0.84$; $\alpha=3.06$)



Erreur: aile ONERA m6 (Euler 3D avec $M=0.84$; $\alpha=3.06$)



Erreur **estimée** = écart absolu entre 2 remises à jour successives

Progression **géométrique** de l'erreur estimée

→ **Majoration a priori** de l'erreur effective

Décroissance **rapide** de l'erreur effective (trainée Cx) par rapport au résidu Euler

Quelques notions de gain

Angle de rotation

93 % de gain sur la **précision** (vs M_{ca})

95 % de gain sur le **temps de calcul** (vs résolution complète)

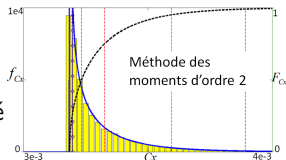
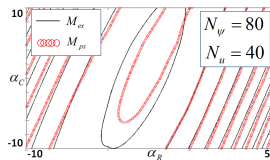
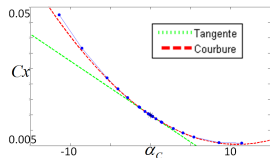
Angles de cambrure et de rotation

97 % de gain sur la **précision** (vs M_{ca})

95 % de gain sur le **temps de calcul** (vs résolution complète)

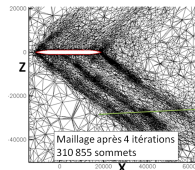
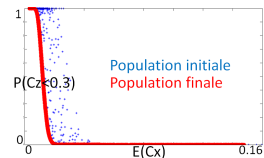
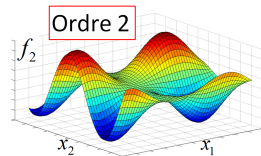
Récapitulatif des contributions (1/2)

- calcul de la **dérivée seconde** d'une observation aérodynamique par différentiation automatique et multiples valorisations (en optimisation, incertitude, modèle approché)
- **méthode des perturbations singulières**: alternative innovante aux dérivées secondes pour capter la non-linéarité de l'observation
- **méthodologie de propagation d'incertitude** (méthode des moments d'ordre 2 + système de Pearson) pour la construction d'une loi de probabilité



Récapitulatif des contributions (2/2)

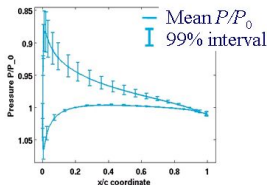
- extension de la **méthode d'interpolation de Duchon** aux dérivées secondes + technique d'enrichissement automatique
- prise en compte de **probabilité de défaillance** en optimisation sous incertitude grâce à la stratégie héritée de la propagation d'incertitude (méthode des moments d'ordre 2 + système de Pearson)
- mise en place d'une **adaptation anisotrope** multi-échelles avec métrique riemannienne et dédiée à l'amélioration d'une fonctionnelle scalaire



Perspectives

Pour prolonger le travail effectué, voici des pistes possibles:

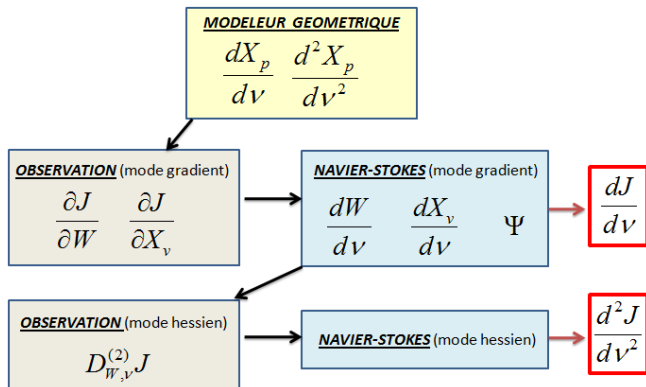
- continuer la **différentiation automatique** de la chaîne industrielle (modeleur géométrique, terme de turbulence pour les équations de Navier-Stokes, ...)
- appliquer la **méthode des perturbations singulières** à d'autres domaines (notamment l'adaptation, pour remplacer matrice hessienne)
- rendre l'adaptation **complètement anisotrope** (volume + **peau**)
- poursuivre l'**industrialisation de la quantification de l'incertitude** à l'aide de lois de probabilité
- passer de la maîtrise d'une observation scalaire à la maîtrise d'**un champ complet**, vivant sur le maillage



— Merci pour votre attention —

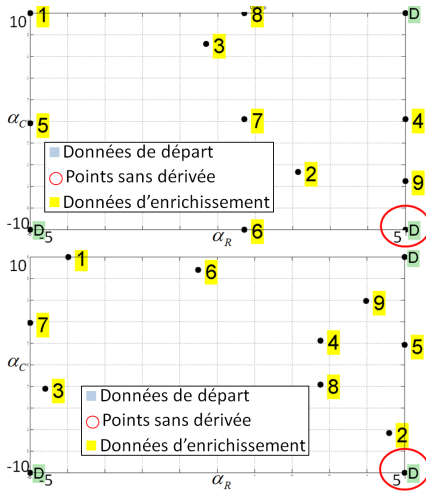
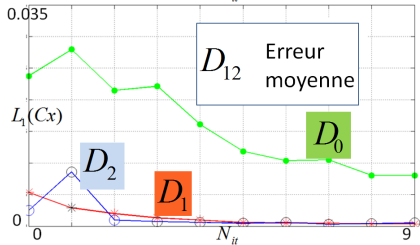
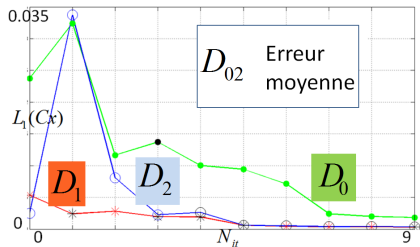
Implémentation et étapes de calcul

Dérivée seconde $\frac{d^2 J}{d\nu^2}$ Navier-Stokes (paramètre géométrique ν)



Coût de calcul: deux systèmes linéaires (ψ et $\frac{dW}{d\nu}$)

Algorithme d'enrichissement: aile ONERA m6 (Euler 3D avec $M=0.84$; $\alpha=3.06$)



Stratégie retenue pour la propagation d'incertitude

Objectif: estimation d'une **loi de probabilité** suivie par l'observation F_a , par **propagation** de l'aléa sur les paramètres d'entrée X_a à travers le code de calcul

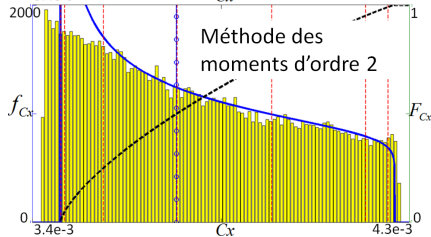
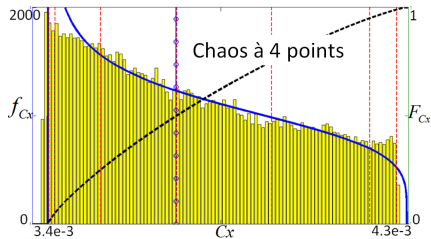
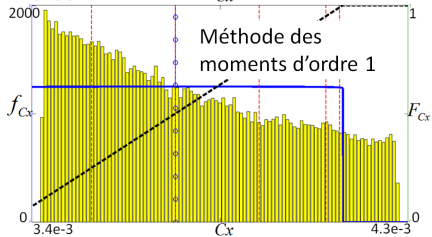
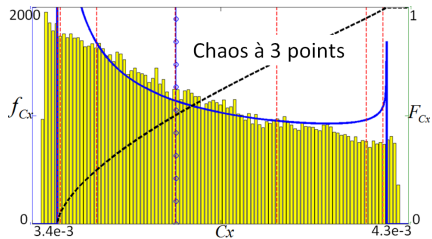
Méthodes de propagation d'incertitude:

- **Monte-Carlo approché**: tirages Monte-Carlo sur une surface de réponse de l'observation
- **chaos polynomial** (version collocation non intrusive): calcul de l'observation en des points représentatifs de l'aléa d'entrée
- **méthode des moments**: calcul analytique des moments statistiques sur le développement de Taylor de l'observation

Le but de ces méthodes est de calculer les **4 premiers moments statistiques** de l'observation (moyenne, écart-type, asymétrie et aplatissement)

Utilisation du **système de Pearson** pour passer des 4 moments à la loi de probabilité cherchée

aléa sur la traînée (épaisseur incertaine): RAE2822 (Navier-Stokes 2D avec $M=0.734$; $\alpha=1$)



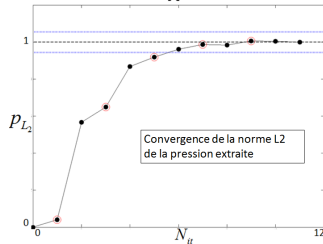
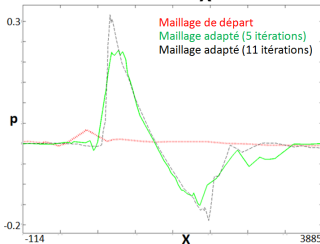
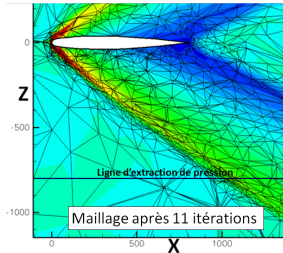
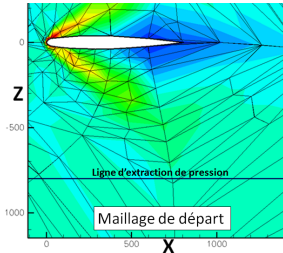
probabilité de défaillance: aile ONERA m6 (Euler 3D avec $M=0.84$; $\alpha=3.06$)

Estimation de la **probabilité de défaillance**: $P[C_X > C_X^{TOL}]$

Méthode des moments (PM1: ordre 1, PM2: ordre 2) vs Monte-Carlo approché (MCa)

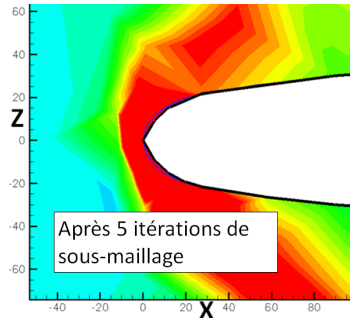
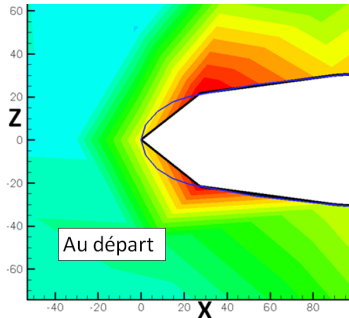
-	Lois normales pour (α_R, α_C)			Lois uniformes pour (α_R, α_C)		
	PM1	PM2	MCa	PM1	PM2	MCa
$C_X^{TOL} = 33$ cts	8.2	35.5	32.8	9.4	39.8	37.3
$C_X^{TOL} = 34$ cts	2.9e-1	20.3	19.4	0	22.5	21.6
$C_X^{TOL} = 35$ cts	1.9e-3	12.2	12.0	0	12.6	12.3
$C_X^{TOL} = 36$ cts	2.1e-8	7.6	7.6	0	6.6	6.7
$C_X^{TOL} = 37$ cts	3.9e-12	4.8	4.9	0	3.1	3.3
$C_X^{TOL} = 38$ cts	1.1e-16	3.0	3.2	0	1.3	1.5

Observation = pression à une longueur de corde (aile ONERA m6, Euler 3D)

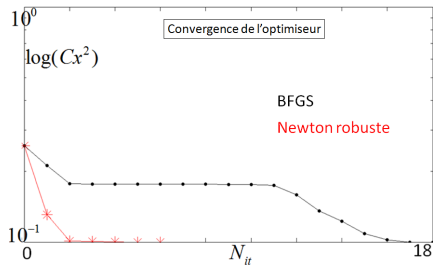
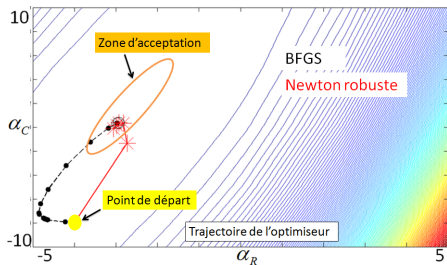


Observation = pression à une longueur de corde (aile ONERA m6, Euler 3D)

Mise en évidence de la projection sur la géométrie (dernière étape d'une itération de sous-maillage)



Optimisation déterministe sans contrainte: aile ONERA m6

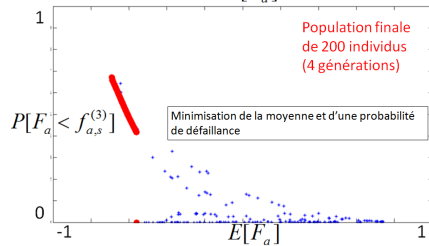
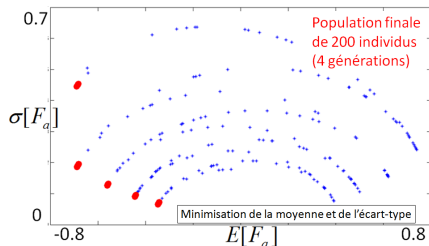
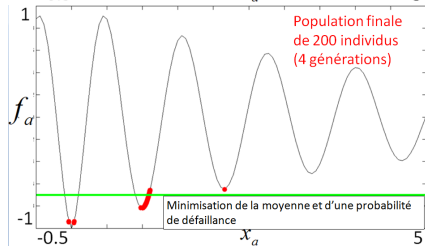
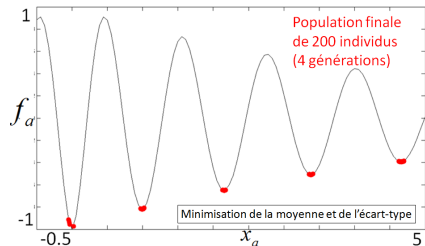


Minimisation de la traînée au carré $(C_x)^2$ vis-à-vis des angles de rotation α_R et de cambrure α_C

$(\alpha_R^{(0)}, \alpha_C^{(0)})$	méthode	N_F	N_G	N_H	C_t
(-4, -8)	BFGS	27	18	0	27.9
	Newton robuste	9	6	6	9.9

Newton robuste \rightarrow 65% de gain par rapport à BFGS

Optimisation sous incertitude: exemple analytique



Formulation des dérivées

- Paramètre de dérivation **aérodynamique** (λ)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dJ}{d\lambda} = \frac{\partial J}{\partial \lambda} - \psi^T \frac{\partial E}{\partial \lambda} \\ \boxed{\frac{d^2 J}{d\lambda^2} = D_{\lambda}^{(1)} J - \psi^T D_{\lambda}^{(1)} E} \end{array} \right.$$

- Paramètre de dérivation **géométrique** (ν)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dJ}{d\nu} = -\phi^T \frac{\partial L}{\partial X_p} \frac{dX_p}{d\nu} \\ \boxed{\frac{d^2 J}{d\nu^2} = D_{W,\nu}^{(2)} J - \psi^T D_{W,\nu}^{(2)} E - \phi^T \frac{\partial L}{\partial X_p} \frac{d^2 X_p}{d\nu^2}} \end{array} \right.$$

Surface de réponse de Duchon avec dérivées premières et secondes

- Objectif: trouver une fonction f^* approchant la fonction f à partir de D données exactes

$$f^* = \min_{f \in F_{Q_1, \dots, Q_D}} J(f)$$

J = critère de qualité basé sur la **semi-norme de Duchon**

- $f^* =$ **noyau polynomial** + **fonction caractéristique** (+ dérivées)
- $D_i =$ modèle de Duchon d'ordre i passant par les données exactes d'ordre $\leq i$.
Ex: D_2 respecte valeurs de l'observation + tangentes et courbures
- Algorithme d'**enrichissement** D_{ik} : calcul exact de la fonction au point d'écart maximal entre D_i et D_k .
- Possibilité d'intégrer des **données de natures différentes** (points sans dérivée, points avec dérivées 1, points avec dérivées 1 et 2)

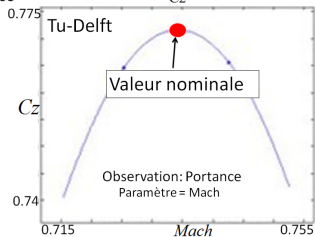
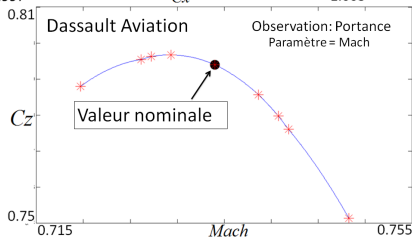
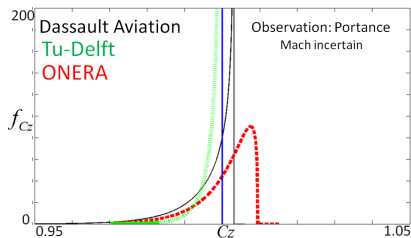
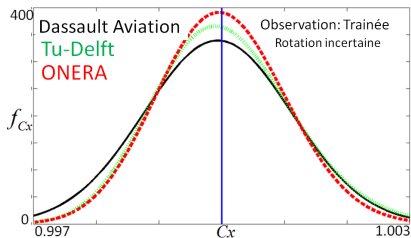
probabilité de défaillance: aile ONERA m6 (Euler 3D avec $M=0.84$; $\alpha=3.06$)

Estimation de la **probabilité de défaillance**: $P[C_x > C_x^{TOL}]$

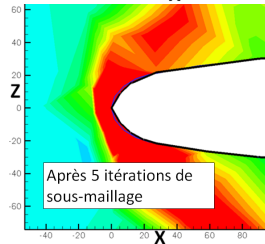
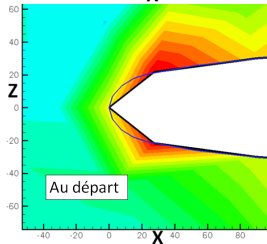
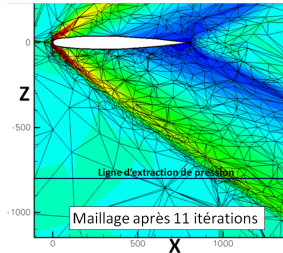
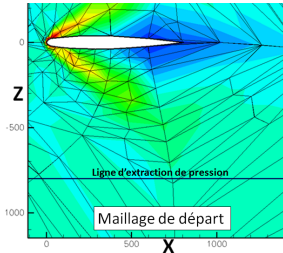
Méthode des moments (PM1: ordre 1, PM2: ordre 2) vs Monte-Carlo approché (MCa)

-	Lois d'entrée uniformes		
-	PM1	PM2	MCa
$C_x^{TOL} = 33$ cts	9.4	39.8	37.3
$C_x^{TOL} = 34$ cts	0	22.5	21.6
$C_x^{TOL} = 35$ cts	0	12.6	12.3
$C_x^{TOL} = 36$ cts	0	6.6	6.7
$C_x^{TOL} = 37$ cts	0	3.1	3.3
$C_x^{TOL} = 38$ cts	0	1.3	1.5

projet NODESIM-CFD: RAE2822 (Navier-Stokes 2D avec $M=0.734$; $\alpha=2.79$)



Observation = pression à une longueur de corde (aile ONERA m6, Euler 3D)



Optimisation déterministe avec contrainte: contexte général

Objectif: trouver l'optimum avec **le plus faible coût de calcul** lorsque **des contraintes sont prises en compte**. Valorisation des **dérivées secondes exactes** de la fonction-coût déterminées par différentiation automatique.

Utilisation d'un **algorithme de point intérieur**. Pour la direction de descente, **variantes d'ordre 2** comparées (version robuste):

- méthode de **quasi-Newton (BFGS)**
- méthode de **Newton**

Coût de calcul C_t donné par:

$$C_t = N_F + (1 + N_C) \frac{N_G}{20} + N_X \frac{N_H}{20}$$

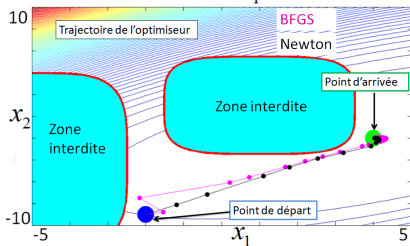
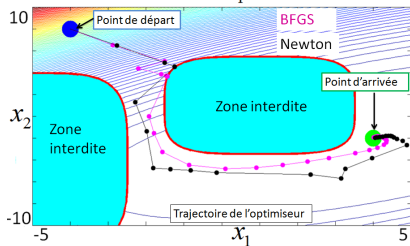
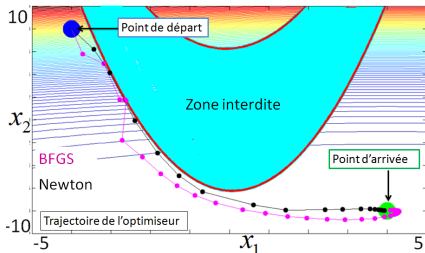
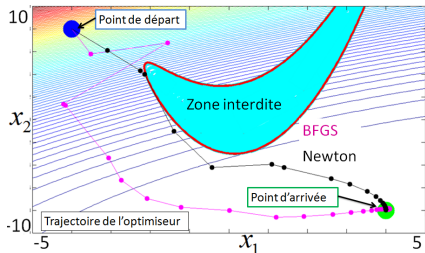
N_F, N_G, N_H = nombre d'appels de fonction, gradient et hessien

N_X = nombre de variables d'optimisation

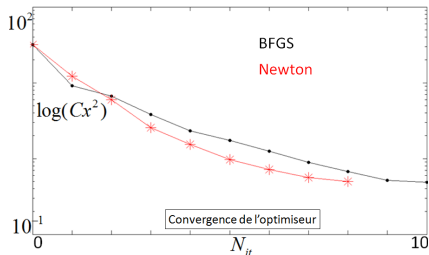
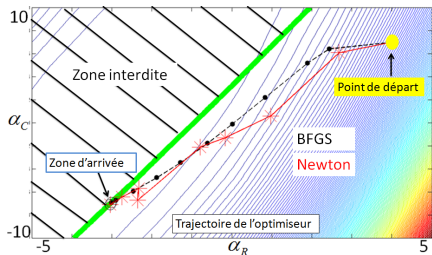
N_C = nombre de contraintes

Résolution linéaire estimée à 1/20 d'une résolution non-linéaire

Optimisation déterministe avec contrainte: exemples analytiques



Optimisation déterministe avec contrainte: aile ONERA m6

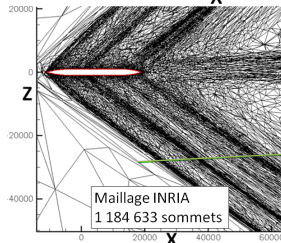
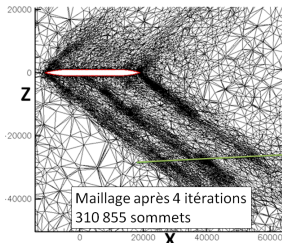
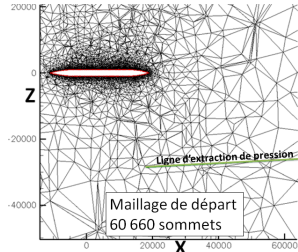
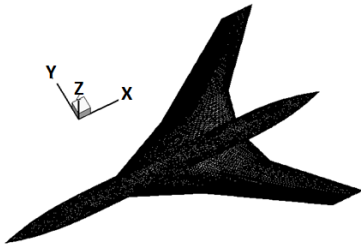


Minimisation de la traînée au carré $(Cx)^2$ vis-à-vis des angles de rotation α_R et de cambrure α_C

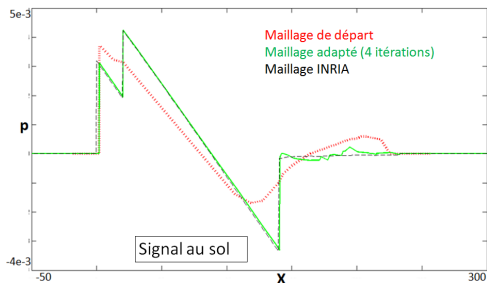
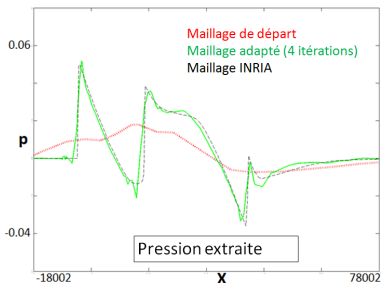
$(\alpha_R^{(0)}, \alpha_C^{(0)})$	contrainte	méthode	N_F	N_G	N_H	C_t
(4,7)	$C_z > 0.2$	BFGS	22	11	0	23.1
		Newton	17	9	9	18.8

Newton \rightarrow 19% de gain par rapport à BFGS (85% par rapport au gradient simple)

Observation = pression à une longueur d'avion (forme HISAC, Euler 3D)



Observation = pression à une longueur d'avion (forme HISAC, Euler 3D)



Validation de notre méthodologie d'adaptation **par comparaison au résultat INRIA**