# Séminaire d'ingéniérie mathématiques
# Graphes et géometrie riemannienne en vue des applications.

Ph Durand

CNAM PARIS

7 mars 2011

# Plan de l'exposé

# Plan de l'exposé

1. Introduction
2. Graphe, variétés, invariants

# Plan de l'exposé

1. Introduction
2. Graphe, variétés, invariants
3. Topologie algébrique depuis Poincaré

# Plan de l'exposé

1. Introduction
2. Graphe, variétés, invariants
3. Topologie algébrique depuis Poincaré
4. Espaces vectoriels, vecteurs, formes tenseurs

# Plan de l'exposé

1. Introduction
2. Graphe, variétés, invariants
3. Topologie algébrique depuis Poincaré
4. Espaces vectoriels, vecteurs, formes tenseurs
5. Ouverts variétés différentielles, formes différentielles

# Plan de l'exposé

1. Introduction
2. Graphe, variétés, invariants
3. Topologie algébrique depuis Poincaré
4. Espaces vectoriels, vecteurs, formes tenseurs
5. Ouverts variétés différentielles, formes différentielles
6. Variétés riemaniennes et tenseurs riémanniens

# Plan de l'exposé

# Introduction

## formes, invariants, géométrie

Un des courant de la recherche mathématique consiste en la classification de formes topologiques, géométrique plus ou moins sophistiquée. Cela peut déboucher sur la recherche d'invariants. En science de l'ingénieur on peut être ammenés a utiliser avec profit ces méthodes.

# Introduction

## Formes, invariants, géométrie

Un des courant de la recherche mathématique consiste en la classification de formes topologiques, géométrique plus ou moins sophistiquée. Cela peut déboucher sur la recherche d'invariants. En science de l'ingénieur on peut être ammenés à utiliser avec profit ces méthodes.

## Euler, Poincaré, Gauss, Riemann

De grands mathématiciens ont construit des outils qui permettent de classer différents espaces de configurations. Euler peut être considéré comme le pionnier de la topologie combinatoire, Gauss et Riemann les bâtisseurs de la géométrie courbe, Poincaré défini la topologie algébrique qui a le mérite de fournir des invariants plus fins que la caractéristique d'Euler Poincaré.

# Introduction

## Formes, invariants, géométrie

Un des courant de la recherche mathématique consiste en la classification de formes topologiques, géométrique plus ou moins sophistiquée. Cela peut déboucher sur la recherche d'invariants. En science de l'ingénieur on peut être ammenés à utiliser avec profit ces méthodes.

## Euler, Poincaré, Gauss, Riemann

De grands mathématiciens ont construit des outils qui permettent de classer différents espaces de configurations. Euler peut être considéré comme le pionnier de la topologie combinatoire, Gauss et Riemann les bâtisseurs de la géométrie courbe, Poincaré défini la topologie algébrique qui a le mérite de fournir des invariants plus fins que la caractéristique d'Euler Poincaré.

## L'exposé

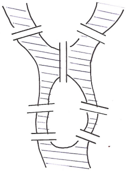
Le but de cet exposé est de donné quelques éléments sur la classification topologique et géometrique et introduire le calcul tensoriel sur les variétés

# Graphe, variétés, invariants

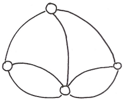
**Graphe :**

Un graphe est un espace topologique de dimension 1 noté $\mathcal{G} = (S, A)$ ou $S$ est un ensemble de sommet, et $A$ un ensemble d'arètes.

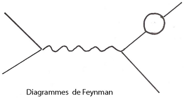
# Exemples de graphes



Ponts de Konigsberg



Graphe associé



Diagrammes de Feynman

# Graphe, variétés, invariants

**Graphe :**

Un graphe est un espace topologique de dimension 1 noté $\mathcal{G} = (S, A)$ ou $S$ est un ensemble de sommet, et $A$ un ensemble d'arètes.

**Variété :**

Soit V un espace topologique séparé à base dénombrable. On dit que V est une variété topologique s'il existe un entier naturel n tel que tout point admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

# Graphe, variétés, invariants

**Graphe :**

Un graphe est un espace topologique de dimension 1 noté $\mathcal{G} = (S, A)$ ou $S$ est un ensemble de sommet, et $A$ un ensemble d'arètes.

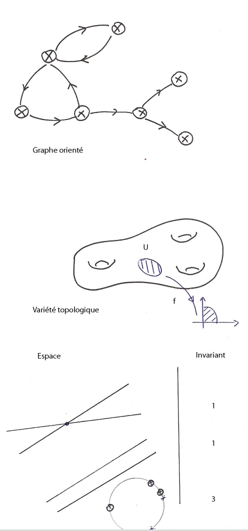
**Variété :**

Soit V un espace topologique séparé à base dénombrable. On dit que V est une variété topologique s'il existe un entier naturel n tel que tout point admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$

**Invariant :**

Un invariant est un objet, nombre, structure algébrique... qui permet de séparer differents espaces topologiques

# Graphes, variétés, invariants



# Caractéristique d'Euler

**Contenu topologique d'un graphe :**

Topologiquement, un graphe est une stucture assez simple , Il peut être planaire ou non, et il est composé de "légos" de base très simple, les arbres et les cycles (ou circuits), suivant qu'il est orienté ou non, les arbres ont la vertue de se retracter sur un point, les cycles non. un invariant adapté est la caractéristique d'Euler Poincaré

# Caractéristique d'Euler

## Contenu topologique d'un graphe :

Topologiquement, un graphe est une stucture assez simple , Il peut être planaire ou non, et il est composé de "légos" de base très simple, les arbres et les cycles (ou circuits), suivant qu'il est orienté ou non, les arbres ont la vertue de se retracter sur un point, les cycles non. un invariant adapté est la caractéristique d'Euler Poincaré

## Caractéristique d'Euler Poincaré

On peut distinguer differente sorte de graphe grâce à un invariant grossier la caractéristique d'Euler Poincaré qui compte le nombre de sommets diminué du nombre d'arêtes.

# Caractéristique d'Euler

## Contenu topologique d'un graphe :

Topologiquement, un graphe est une stucture assez simple , Il peut être planaire ou non, et il est composé de "légos" de base très simple, les arbres et les cycles (ou circuits), suivant qu'il est orienté ou non, les arbres ont la vertue de se retracter sur un point, un cycle non. Un invariant adapté est la caractéristique d'Euler Poincaré

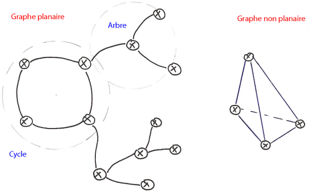
## Caractéristique d'Euler Poincaré

On peut distinguer differente sorte de graphe grâce à un invariant grossier la caractéristique d'Euler Poincaré qui compte le nombre de sommets diminué du nombre d'arêtes.

## Segmentation

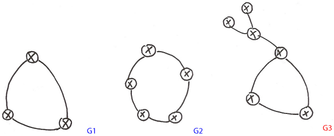
Si deux graphes sont homéomorphes, ou l'un est retract de l'autre, ils ont même caractéristique d'Euler.

# Invariant pour un graphe




Caractèristique d'Euler

$$\chi(G) = S - A$$




G1, G2: graphes homéomorphes

G1 retract de G3

# Connexité : vers la topologie algébrique

## k-connexité

Une notion autre notion importante de théorie des graphes est la notion de k-connexité : un graphe est k-connexe s'il suffit de rompre $k$ arêtes pour le disconnecter.

# Connexité : vers la topologie algébrique

## k-connexité

Une autre notion importante de théorie des graphes est la notion de k-connexité : un graphe est k-connexe s'il suffit de rompre k arêtes pour le disconnecter.

## Graphe complet

Un graphe complet est un graphe pour chaque couple de sommets est connecté : Il possède donc la connectivité maximale.

# Connexité : vers la topologie algébrique

## k-connexité

Une notion autre notion importante de théorie des graphes est la notion de k-connexité : un graphe est k-connexe s'il suffit de rompre k arêtes pour le disconnecter.

## Graphe complet

Un graphe complet est un graphe pour chaque couple de sommets est connecté : Il possède donc la connectivité maximale.

## Homotopie

Poincaré définit de nouveaux invariants grâçe à sa théorie de l'homotopie qui est fondée sur la notion de connexité et s'adapte a des espaces topologiques plus généraux.

# Topologie Algébrique

La Topologie Algébrique affine la recherche d'invariants et repose sur deux piliers que sont l'homotopie, l'homologie. Elle peut être algebrisée et donne l'algèbre homologique.

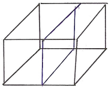
# Topologie Algébrique

La Topologie Algébrique affine la recherche d'invariants et repose sur deux piliers que sont l'homotopie, l'homologie. Elle peut être algébrisée et donne l'algèbre homologique.

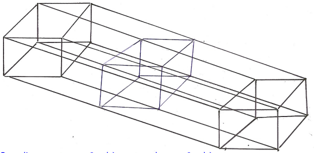
## Homotopie

Poincaré invente le groupe fondamental ainsi que les groupes d'homotopies supérieurs, cela permet de transposer aux espaces topologiques généraux la notion de k-connexité "discrète" des graphes.

# L'Homotopie : Connexité des sphères



Pour disconnecter une 2-shère: retrancher une 1-sphère (cercle)



Pour disconnecter une 3-sphère: retrancher une 2-sphère

# Topologie Algébrique

La Topologie Algébrique affine la recherche d'invariants et repose sur deux piliers que sont l'homotopie, l'homologie. Elle peut être algébrisée et donne l'algèbre homologique

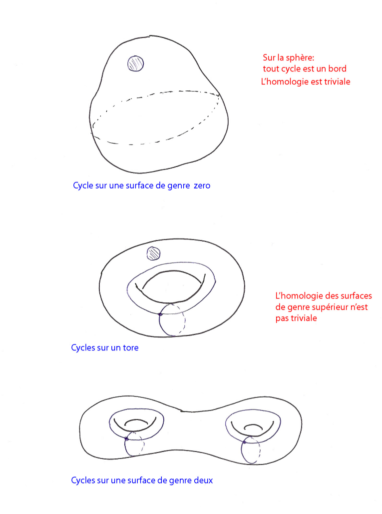
## Homotopie

Poincaré invente le groupe fondamental ainsi que les groupes d'homotopies supérieurs, cela permet de transposer aux espaces topologiques généraux la notion de k-connexité "discrète" des graphes.

## Homologie

Poincaré invente au même moment l'homologie qui detecte le défaux pour un cycle d'être le bord d'un domaine.

# L'homologie


Sur la sphère:
tout cycle est un bord
L'homologie est triviale
Cycle sur une surface de genre zero
L'homologie des surfaces
de genre supérieur n'est
pas triviale
Cycles sur un tore
Cycles sur une surface de genre deux

# Topologie Algébrique

La Topologie Algébrique affine la recherche d'invariants et repose sur deux piliers que sont l'homotopie, l'homologie. Elle peut être algébrisée et donne l'algèbre homologique

## Homotopie

Poincaré invente le groupe fondamental ainsi que les groupes d'homotopies supérieurs, cela permet de transposer aux espaces topologiques généraux la notion de k-connexité "discrète" des graphes.

## Homologie

Poincaré invente au même moment l'homologie qui detecte le défaux pour un cycle d'être le bord d'un domaine.

## Algèbre homologique

Plus tard Cartan et Eilenberg Algébrisent la topologie algébrique et définissent l'algèbre homologique.

# L'homotopie en algèbre homologique

Homotopie d'un complexe de chaine

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & C_{n+1}(K) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "i"'] \arrow[d, shift left, "i'"] & C_n(K) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dl, "K_n"'] \arrow[d, shift right, "i"'] \arrow[d, shift left, "i'"] & C_{n-1}(K) \arrow[r] \arrow[dl, "K_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "i"'] \arrow[d, shift left, "i'"] & {} \\
\arrow[r] & C_{n+1}(K \times I) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & C_n(K \times I) \arrow[r, "\partial_n"] & C_{n-1}(K \times I) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

# Homotopie

### Groupe fondamental

Les lacets de point de base $x_0$ d'un espace topologique $X$ forment un groupe pour la composition des lacets. On appelle ce groupe le groupe fondamental : $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X)$ (il est indépendant du point de base)

# Homotopie

## Groupe fondamental

Les lacets de point de base $x_0$ d'un espace topologique $X$ forment un groupe pour la composition des lacets. On appelle ce groupe le groupe fondamental : $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X)$ (il est indépendant du point de base)

## Fonctorialité

Deux espaces homéomorphes ont même $\pi_1$ : Cercle et carré, "tasse de thé" et tore. mais la réciproque est fausse : le disque et la sphère ont un $\pi_1$ trivial et ne sont pas homéomorphes. Pour séparer mieux devra définir des groupes d'homotopies supérieurs.

# Homotopie

## Groupe fondamental

Les lacets de point de base $x_0$ d'un espace topologique $X$ forment un groupe pour la composition des lacets. On appelle ce groupe le groupe fondamental : $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X)$ (il est indépendant du point de base)

## Fonctorialité

Deux espaces homéomorphes ont même $\pi_1$ : Cercle et carré, "tasse de thé" et tore. mais la réciproque est fausse : le disque et la sphère ont un $\pi_1$ trivial et ne sont pas homéomorphes. Pour séparer mieux devra définir des groupes d'homotopies supérieurs.

## Calcul

On dispose de quelques règles de calcul $\pi_1$ d'un produit, de la réunion de deux ouverts connexes (Théorème de Van Kampen) mais cela reste assez limité.

# Homotopie

## Groupe fondamental

Les lacets de point de base $x_0$ d'un espace topologique $X$ forment un groupe pour la composition des lacets. On appelle ce groupe le groupe fondamental : $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X)$ (il est indépendant du point de base)

## Fonctorialité

Deux espaces homéomorphes ont même $\pi_1$ : Cercle et carré, "tasse de thé" et tore. mais la réciproque est fausse : le disque et la sphère ont un $\pi_1$ trivial et ne sont pas homéomorphes. Pour séparer mieux devra définir des groupes d'homotopies supérieurs.

## Calcul

On dispose de quelques règles de calcul $\pi_1$ d'un produit, de la réunion de deux ouverts connexes (Théorème de Van Kampen) mais cela reste assez limité.

# Quelques exemples

**Groupe fondamental du cercle ou de la couronne**

On peut fabriquer sur le cercles des laçets de degrés (nombre de tours) positifs ou négatifs : le groupe fondamental est donc $\pi_1(S_1) \simeq \mathbb{Z}$

# Quelques exemples

## Groupe fondamental du cercle ou de la couronne

On peut fabriquer sur le cercles des laçets de degrés (nombre de tours) positifs ou négatifs : le groupe fondamental est donc $\pi_1(S_1) \simeq \mathbb{Z}$

## Groupe fondamental du tore

Le tore peut être vu comme le produit de deux cercles, par conséquent : $\pi_1(T) \simeq \pi_1(S_1) \times \pi_1(S_1) \simeq \mathbb{Z}^2$.

# Quelques exemples

## Groupe fondamental du cercle ou de la couronne

On peut fabriquer sur le cercles des laçets de degrés (nombre de tours) positifs ou négatifs : le groupe fondamental est donc $\pi_1(S_1) \simeq \mathbb{Z}$

## Groupe fondamental du tore

Le tore peut être vu comme le produit de deux cercles, par conséquent : $\pi_1(T) \simeq \pi_1(S_1) \times \pi_1(S_1) \simeq \mathbb{Z}^2$.

## Revêtement universel

Un revêtement est une fibration à fibre discrête. le revêtement universel d'un espace topologique est un revêtement possédant la propriété d'avoir un groupe fondamental trivial. Le revêtement de $S^1$ est $\mathbb{R}$ qui à un groupe fondamental trivial.

# Groupes d'homotopies supérieurs

## n-boucle

Un lacet est une application de $I/\partial I \simeq S^1 \rightarrow X$ de même une $n - boucle$ est une application de $I^n/\partial I^n \simeq S^n \rightarrow X$ et définie $\pi_n(X)$ n-ième groupe d'homotopie et qui teste la $n$-connexité

# Groupes d'homotopies supérieurs

## n-boucle

Un lacet est une application de $I/\partial I \simeq S^1 \to X$ de même une $n-boucle$ est une application de $I^n/\partial I^n \simeq S^n \to X$ et définie $\pi_n(X)$ n-ième groupe d'homotopie et qui teste la $n-1$-connexité

## Cas de $X = S^n$

L'application $f\ :S^n \to S^n$ est caractérisée par son degré, cela montre que $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$

# Groupes d'homotopies supérieurs

## n-boucle

Un lacet est une application de $I/\partial I \simeq S^1 \to X$ de même une $n-boucle$ est une application de $I^n/\partial I^n \simeq S^n \to X$ et définie $\pi_n(X)$ n-ième groupe d'homotopie et qui teste la $n$-connexité

## Cas de $X = S^n$

L'application $f : S^n \to S^n$ est caractérisée par son degré, cela montre que $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$

## Longue suite exacte d'une fibration

Etant donné une fibration $E \to X$ et $F$ la fibre type, on a la longue suite d'homotopie suivante :

$$\to \pi_n(F, f_0) \to \pi_n(E, f_0) \to \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) ... \to \pi_0(E, f_0) \to 0$$

# Quelques simplifications

## Fibration triviale

Si $E$ est un espace fibré trivial, c'est à dire que $E = F \times X$. On sait que quel que soit l'entier $n$, $\pi_n(E) = \pi_n(F \times X) = \pi_n(F) \times \pi_n(X)$ , alors la suite exacte longue se scinde en suites exactes courtes.

$0 \rightarrow \pi_n(F) \rightarrow \pi_n(F \times X) \rightarrow \pi_n(X) \rightarrow 0$

Les 0, aux bouts, proviennent du fait que la première flêche est une injection (inclusion dans un espace produit) la deuxième une projection.

# Quelques simplifications

## Fibration triviale

Si $E$ est un espace fibré trivial, c'est à dire que $E = F \times X$. On sait que quel que soit l'entier $n$, $\pi_n(E) = \pi_n(F \times X) = \pi_n(F) \times \pi_n(X)$ , alors la suite exacte longue se scinde en suites exactes courtes.

$0 \to \pi_n(F) \to \pi_n(F \times X) \to \pi_n(X) \to 0$

Les 0, aux bouts, proviennent du fait que la première flêche est une injection (inclusion dans un espace produit) la deuxième une projection.

## E contractile

Il est alors immédiat, en observant la suite exacte longue, que l'on a :

$\to \pi_n(F, f_0) \to 0 \to \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \to 0 \to \ldots$

On en déduit que $\pi_n(X, x_0)$ est isomorphe à $\pi_{n-1}(F, f_0)$.

# Quelques simplifications

## Fibration triviale

Si $E$ est un espace fibré trivial, c'est à dire que $E = F \times X$. On sait que quel que soit l'entier $n$, $\pi_n(E) = \pi_n(F \times X) = \pi_n(F) \times \pi_n(X)$ , alors la suite exacte longue se scinde en suites exactes courtes.

$0 \to \pi_n(F) \to \pi_n(F \times X) \to \pi_n(X) \to 0$

Les 0, aux bouts, proviennent du fait que la première flêche est une injection (inclusion dans un espace produit) la deuxième une projection.

## E contractile

Il est alors immédiat, en observant la suite exacte longue, que l'on a :

$\to \pi_n(F, f_0) \to 0 \to \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \to 0 \to ...$

On en déduit que $\pi_n(X, x_0)$ est isomorphe à $\pi_{n-1}(F, f_0)$.

## Limite de l'homotopie

Les calculs des groupes d'homotopies sont en général difficile, on ne sait toujours pas calculer tous les groupes d'homotopies des sphères !

# L'homologie singulière

## Simplexe, simplexe singulier

On appelle $r$-simplexe de $\mathbb{R}^n$l'ensemble noté $\sigma_r$ et défini par :
$\sigma_r = \{x \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{i=0}^{r} c_i p_i, c_i \geq 0, \sum_{i=0}^{r} c_i = 1\}$
Les simplexes seront orientés.On appelle $p$-simplexe singulier une application $\sigma$ d'un simplexe standard de dimension $p$ dans l'espace topologique $X$ :
$\sigma : \Delta_p \rightarrow X$

# L'homologie singulière

## Simplexe, simplexe singulier

On appelle $r$-simplexe de $\mathbb{R}^n$l'ensemble noté $\sigma_r$ et défini par :
$\sigma_r = \{x \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{i=0}^r c_i p_i, c_i \geq 0, \sum_{i=0}^r c_i = 1\}$
Les simplexes seront orientés.On appelle $p$-simplexe singulier une application $\sigma$ d'un simplexe standard de dimension $p$ dans l'espace topologique $X$ :
$\sigma : \Delta_p \rightarrow X$

## Complexe singulier

on peut définir alors le groupe des p-chaines, et une opération "bord d'un simplexe : $\partial$ vérifiant $\partial \circ \partial = 0$ on obtient un complexe singulier :

$$... \longrightarrow \mathcal{C}_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \mathcal{C}_{n-2}(X)... \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0(X) \longrightarrow 0$$

# L'homologie singulière

## Simplexe, simplexe singulier

On appelle $r$-simplexe de $\mathbb{R}^n$l'ensemble noté $\sigma_r$ et défini par :
$\sigma_r = \{x \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{i=0}^{r} c_i p_i, c_i \geq 0, \sum_{i=0}^{r} c_i = 1\}$
Les simplexes seront orientés.On appelle $p$-simplexe singulier une application $\sigma$ d'un simplexe standard de dimension $p$ dans l'espace topologique $X$ :
$\sigma : \Delta_p \to X$

## Complexe singulier

on peut définir alors le groupe des p-chaines, et une opération "bord d'un simplexe : $\partial$ vérifiant $\partial \circ \partial = 0$ on obtient un complexe singulier :
$\ldots \longrightarrow \mathcal{C}_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \mathcal{C}_{n-2}(X) \ldots \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0(X) \longrightarrow 0$

## Homologie singulière

Le $p$-ième groupe d'homologie singulière est donné par : $H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X)$.
Lire défaut pour un cycle d'être un bord.

# L'homologie et caractéristique d'Euler Poincaré

## Simplexe, simplexe singulier

En prenant les coéfficients réels, les groupes d'homologies, deviennent des espaces vectoriel donc :
$dim(\mathcal{C}_i(X)) = dim(Ker\partial_i) + dim(Im\partial_i)$
$\beta_i = dim(H_i) = dim(ker\partial_i) - dim(Im\partial_{i+1})$ (nombre de Betti)
la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}_i(X)$ est égal selon $i$ au nombre de sommets, arêtes,... indépendants dans la triangulation de $X$ :

# L'homologie et caractéristique d'Euler Poincaré

## Simplexe, simplexe singulier

En prenant les coefficients réels, les groupes d'homologies, deviennent des espaces vectoriel donc :
$dim(\mathcal{C}_i(X)) = dim(Ker\partial_i) + dim(Im\partial_i)$
$\beta_i = dim(H_i) = dim(ker\partial_i) - dim(Im\partial_{i+1})$ (nombre de Betti)
la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}_i(X)$ est égal selon $i$ au nombre de sommets, arêtes,... indépendants dans la triangulation de $X$ :

## Somme alterné des nombres de Betti

On en déduit (cas d'une surface $X$) :
$\beta_0 - \beta_1 + \beta_2 = dim(\mathcal{C}_0(X)) - dim(\mathcal{C}_1(X)) + dim(\mathcal{C}_2(X))$ soit :
$\beta_0 - \beta_1 + \beta_2 = S - A + F = \chi(X)$

# L'homologie et caractéristique d'Euler Poincaré

## Simplexe, simplexe singulier

En prenant les coefficients réels, les groupes d'homologies, deviennent des espaces vectoriel donc :
$dim(\mathcal{C}_i(X)) = dim(Ker\partial_i) + dim(Im\partial_i)$
$\beta_i = dim(H_i) = dim(ker\partial_i) - dim(Im\partial_{i+1})$ (nombre de Betti)
la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}_i(X)$ est égal selon $i$ au nombre de sommets, arêtes,... indépendants dans la triangulation de $X$ :

## Somme alterné des nombres de Betti

On en déduit (cas d'une surface $X$) :
$\beta_0 - \beta_1 + \beta_2 = dim(\mathcal{C}_0(X)) - dim(\mathcal{C}_1(X)) + dim(\mathcal{C}_2(X))$ soit :
$\beta_0 - \beta_1 + \beta_2 = S - A + F = \chi(X)$

## Invariants plus fin

On en déduit que les nombres de Betti représentes des invariants moins grossiers.

# Cohomologie singulière

## Complexe dual

A partir d'une théorie homologique on peut construire une théorie duale (ou co-homologique) de manière naturelle. En effet, soit un complexe à valeur dans un groupe $G$ :

$... \longrightarrow \mathcal{C}_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \mathcal{C}_{n-2}(X)... \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0(X) \longrightarrow 0$

où $\partial$ est son application bord , en posant $\mathcal{C}^n(X,G) = Hom(\mathcal{C}_n(X),G)$ On crée un complexe en dualité avec le complexe précédent pour lequel les flèches vont en sens inverse :

$0 \longrightarrow \mathcal{C}^0(X,G) \xrightarrow{d_1} \mathcal{C}^1(X,G) \xrightarrow{d_2} \mathcal{C}^2(X,G)... \xrightarrow{d_n} \mathcal{C}^n(X,G) \longrightarrow ...$

avec un bord $d$ (on a encore $d^2 = 0$) directement lié au bord $\partial$ par :

$\forall f \in \mathcal{C}^n(X,G), \forall c_{n+1} \in \mathcal{C}_{n+1}(X) : (df)(c_{n+1}) = f(\partial c_{n+1})$

# Cohomologie singulière

## Complexe dual

A partir d'une théorie homologique on peut construire une théorie duale (ou co-homologique) de manière naturelle. En effet, soit un complexe à valeur dans un groupe $G$ :

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{C}_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \mathcal{C}_{n-2}(X)\ldots \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0(X) \longrightarrow 0$$

où $\partial$ est son application bord , en posant $\mathcal{C}^n(X,G) = Hom(\mathcal{C}_n(X), G)$ On crée un complexe en dualité avec le complexe précédent pour lequel les flèches vont en sens inverse :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^0(X,G) \xrightarrow{d_1} \mathcal{C}^1(X,G) \xrightarrow{d_2} \mathcal{C}^2(X,G)\ldots \xrightarrow{d_n} \mathcal{C}^n(X,G) \longrightarrow \ldots$$

avec un bord $d$ (on a encore $d^2 = 0$) directement lié au bord $\partial$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}^n(X,G), \forall c_{n+1} \in \mathcal{C}_{n+1}(X) : (df)(c_{n+1}) = f(\partial c_{n+1})$$

## Cohomologie singulière

Le $p$-ième groupe de cohomologie singulière est donné par : $H_p(X) = Z^p(X)/B^p(X)$.

# La cohomologie de De Rham

## L'approche de De Rham

La cohomologie singulière n'est pas pas une construction purement formelle ; elle peut être réaliser concrètement au travers du complexe des formes différentielles

## Théorème de De Rham

Si $X$ est une variété différentielle compacte et $G=\mathbb{R}$, on a isomorphisme entre la cohomologie singulière et la cohomologie de Rham (voir plus loin).

## Calculus différentiel

Il faut alors rappeler les rudiments du calcul et de l'analyse tensoriel dans un espace vectoriel, un ouvert de $\mathbb{R}^n$, une variété.

# Calcul tensoriel

## Tenseurs

Une forme différentielle est "algébriquement" une forme linéaire donc un élément de $E^*$, en dimension finie, l'isomorphisme canonique, entre $E$ et $E^{**}$, prouve qu'on ne peut rien creer de nouveau. Vecteurs engendrent le calcul tensoriel, l'algèbre multilinéaire permet de créer des objets du type : $e_1^* \wedge e_2^* \wedge ... \wedge e_p^*(x_1, ...x_p) = \sum_\rho \varepsilon(\rho) e_{\rho(1)}^* \otimes e_{\rho(2)}^* \otimes ..., \otimes e_{\rho(p)}^*(x_1, ..., x_p)$ ou plus généralement : $T = {t_i}^{jk}{}_{ln}\; e^i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e^l \otimes e^n$

# Calcul tensoriel

## Tenseurs

Une forme différentielle est "algébriquement" une forme linéaire donc un élément de $E^*$, en dimension finie, l'isomorphisme canonique, entre $E$ et $E^{**}$, prouve qu'on ne peut rien creer de nouveau. Vecteurs engendrent le calcul tensoriel, l'algèbre multilinéaire permet de créer des objets du type : $e_1^* \wedge e_2^* \wedge \ldots \wedge e_p^*(x_1, \ldots x_p) = \sum_\rho \varepsilon(\rho) e^*_{\rho(1)} \otimes e^*_{\rho(2)} \otimes \ldots, \otimes e^*_{\rho(p)}(x_1, \ldots, x_p)$ ou plus généralement : $T = {t_i}^{jk}{}_{ln}\ e^i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e^l \otimes e^n$

## Formes différentielles

Sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ on définit des formes différentielles (produit tensoriel antysymétrique de formes linéaire) de degrés quelconques :
$x \in U \mapsto \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n} \omega_{i_1, \ldots, i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$

# Calcul tensoriel

## Tenseurs

Une forme différentielle est "algébriquement" une forme linéaire donc un élément de $E^*$, en dimension finie, l'isomorphisme canonique, entre $E$ et $E^{**}$, prouve qu'on ne peut rien creer de nouveau. Vecteurs engendrent le calcul tensoriel, l'algèbre multilinéaire permet de créer des objets du type : $e_1^* \wedge e_2^* \wedge \ldots \wedge e_p^*(x_1, \ldots x_p) = \sum_\rho \varepsilon(\rho) e^*_{\rho(1)} \otimes e^*_{\rho(2)} \otimes \ldots, \otimes e^*_{\rho(p)}(x_1, \ldots, x_p)$ ou plus généralement : $T = t_i{}^{jk}{}_{ln}\ e^i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e^l \otimes e^n$

## Formes différentielles

Sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ on définit des formes différentielles (produit tensoriel antysymétrique de formes linéaire) de degrés quelconques :
$x \in U \mapsto \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n} \omega_{i_1, \ldots, i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$

## Analyse sur les variétés

. Il reste à passer au global : on doit disposer d'objets plus riches que les ouverts de $\mathbb{R}^n$. Il faut définir des variétés différentielles abstraites.

# Début de l'analyse "situs" et de la topologie algébrique

- La considération des formes différentielles de degré 1 permet déjà de comprendre la topologie d'un voisinage : dans $\mathbb{R}$ tous les ouverts se ressemblent modulo la connexité, toute fonction continue est intégrable sur un intervalle fermé borné. Autrement dit, toute forme differentielle est exacte (ie différentielle d'une fonction). En termes savants on a un complexe de De Rham ($d \circ d = 0$) :
  $\mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{d} \Omega_1(U) \xrightarrow{d} 0$

# Début de l'analyse "situs" et de la topologie algébrique

- La considération des formes différentielles de degré 1 permet déjà de comprendre la topologie d'un voisinage : dans $\mathbb{R}$ tous les ouverts se ressemblent modulo la connexité, toute fonction continue est intégrable sur un intervalle fermé borné. Autrement dit, toute forme differentielle est exacte (ie différentielle d'une fonction). En termes savants on a un complexe de De Rham ($d \circ d = 0$) :
  $\mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{d} \Omega_1(U) \xrightarrow{d} 0$
- Ce résultat n'est plus vrai dans $\mathbb{R}^2$. Prenons une fonction numérique $f$ à deux variables de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $U$ dont l'ensemble de définition est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des fonctions en question peut être vu comme l'ensemble des 0-formes différentielles de classes $\mathcal{C}^\infty$ sur $U$ noté $\mathcal{C}^\infty(U)$.

## Début de l'analyse "situs" et de la topologie algébrique

- La considération des formes différentielles de degré 1 permet déjà de comprendre la topologie d'un voisinage : dans $\mathbb{R}$ tous les ouverts se ressemblent modulo la connexité, toute fonction continue est intégrable sur un intervalle fermé borné. Autrement dit, toute forme differentielle est exacte (ie différentielle d'une fonction). En termes savants on a un complexe de De Rham ($d \circ d = 0$) :
  $\mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{d} \Omega_1(U) \xrightarrow{d} 0$
- Ce résultat n'est plus vrai dans $\mathbb{R}^2$. Prenons une fonction numérique $f$ à deux variables de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $U$ dont l'ensemble de définition est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des fonctions en question peut être vu comme l'ensemble des 0-formes différentielles de classes $\mathcal{C}^\infty$ sur $U$ noté $\mathcal{C}^\infty(U)$.
- On peut différentier $f$ on obtient une 1-formes différentielles (Cela correspond en physique à prendre l'opérateur gradient). Le processus peut continuer, dans $\mathbb{R}^2$ : la dérivée d'une 1- forme est son rotationnel, on a alors une flêche de plus dans le schéma vu ci-dessus :
  $\mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{d} \Omega_1(U) \xrightarrow{d} \Omega_2(U) \xrightarrow{d} 0$

# Cohomologie du complexe des formes différentielles

- Dire que la différentielle d'une fonction (ou son gradient) est nulle c'est dire que $f$ appartient au noyau de $d$ : $Ker\ d$, donc que $f$ est localement constante (i.e constante par composante connexe). Ce noyau renseigne donc sur la connexité de $U$. En mathématiques, on pose $H_0(U) = Kerd$. Mais on peut dire des choses supplémentaires :

# Cohomologie du complexe des formes différentielles

- Dire que la différentielle d'une fonction (ou son gradient) est nulle c'est dire que $f$ appartient au noyau de $d$ : $Ker\ d$, donc que $f$ est localement constante (i.e constante par composante connexe). Ce noyau renseigne donc sur la connexité de $U$. En mathématiques, on pose $H_0(U) = Kerd$. Mais on peut dire des choses supplémentaires :
- Dire qu'une 1 forme est exacte, c'est dire qu'elle provient de la différentielle d'une fonction (ou d'un champ de gradients) elle est alors dans l'image de l'opérateur $d$ :$Im\ d$. On sait alors que son rotationnel est nul (une forme exacte est fermée). L'obstruction à la réciproque de cette assertion est exactement ce qui est contenu dans le premier groupe de cohomologie :$H^1_{DR}(U) = Kerd/Imd$ .

# Cohomologie du complexe des formes différentielles

- Dire que la différentielle d'une fonction (ou son gradient) est nulle c'est dire que $f$ appartient au noyau de $d$ : $Ker\ d$, donc que $f$ est localement constante (i.e constante par composante connexe). Ce noyau renseigne donc sur la connexité de $U$. En mathématiques, on pose $H_0(U) = Kerd$. Mais on peut dire des choses supplémentaires :
- Dire qu'une 1 forme est exacte, c'est dire qu'elle provient de la différentielle d'une fonction (ou d'un champ de gradients) elle est alors dans l'image de l'opérateur $d$ :$Im\ d$. On sait alors que son rotationnel est nul (une forme exacte est fermée). L'obstruction à la réciproque de cette assertion est exactement ce qui est contenu dans le premier groupe de cohomologie :$H^1_{DR}(U) = Kerd/Imd$ .
- L'itération de ce procédé définit <u>la cohomologie de De Rham</u>.

# Application L'Analyse vectorielle dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Dans le langage de l'ingénieur on écrira :

## Analyse vectorielle à deux variables

-Complexe de De Rham d'un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$ :

$$\Omega_0(U) = \mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{Grad} \Omega_1(U) \xrightarrow{Rot} \Omega_2(U) \longrightarrow 0$$

$\underline{Rot(grad) = 0}$

## Analyse vectorielle à trois variables

-Complexe de De Rham d'un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^3$ :

$$\Omega_0(U) = \mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{Grad} \Omega_1(U) \xrightarrow{Rot} \Omega_2(U) \xrightarrow{Div} \Omega_3(U) \longrightarrow 0$$

$\underline{Rot(Grad) = 0}$ et $\underline{Div(Rot) = 0}$

# Le vocabulaire de la géométrie différentielle

## Géométrie différentielle

Pour pouvoir résoudre des problèmes globaux, les ouverts de $\mathbb{R}^n$, ou même $\mathbb{R}^n$ ne suffisent pas, penser par exemple à la construction de solutions maximales d'équations différentielles, l'espace des phases peut avoir une topologie non triviale. Il faut construire des objets qui généralisent les ouverts.

# Le vocabulaire de la géométrie différentielle

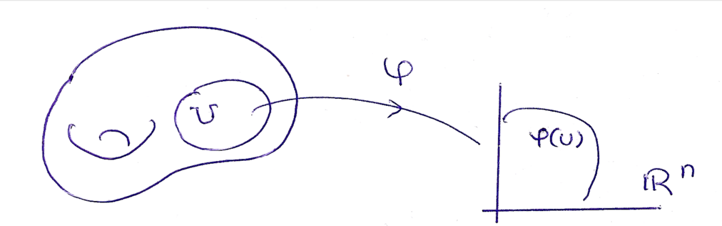
## Géométrie différentielle

Pour pouvoir résoudre des problèmes globaux, les ouverts de $\mathbb{R}^n$, ou même $\mathbb{R}^n$ ne suffisent pas, penser par exemple à la construction de solutions maximales d'équations différentielles, l'espace des phases peut avoir une topologie non triviale. Il faut construire des objets qui généralisent les ouverts.

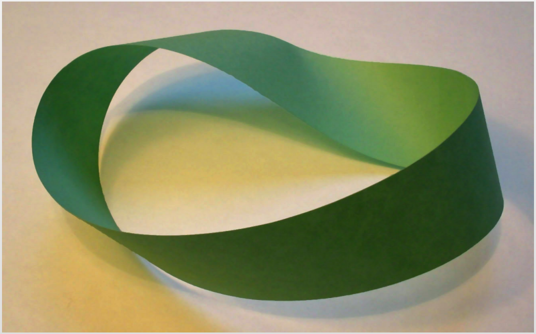
## Variété

Une variété topologique est un objet qui est localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, une variété différentiable est un objet qui est localement difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.

# Variété topologique
# Lecture dans une carte



# Une variété topologique : Le ruban de möbïus



# Variétés différentiables

- Il est naturel de disposer d'une notion de différentiabilité. Cependant cette définition utilise explicitement la structure d'espace vectoriel ainsi l'expression : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ n'a aucun sens si l'espace topologique n'est pas un espace vectoriel. La généralisation de la notion de différentiabilité va donc se faire au travers des cartes.

# Variétés différentiables

- Il est naturel de disposer d'une notion de différentiabilité. Cependant cette définition utilise explicitement la structure d'espace vectoriel ainsi l'expression : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ n'a aucun sens si l'espace topologique n'est pas un espace vectoriel. La généralisation de la notion de différentiabilité va donc se faire au travers des cartes.
- Définition On dit que $M$ est une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^r$ si :
  -$M$ est une variété topologique
  -Les changements de cartes sont de classe $\mathcal{C}^r$ :
  Il existe un atlas réunion des $(U_i, \varphi_i)$ tel que : $\forall (i,j)$ avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$
  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ :$\varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ de classe $\mathcal{C}^r$.

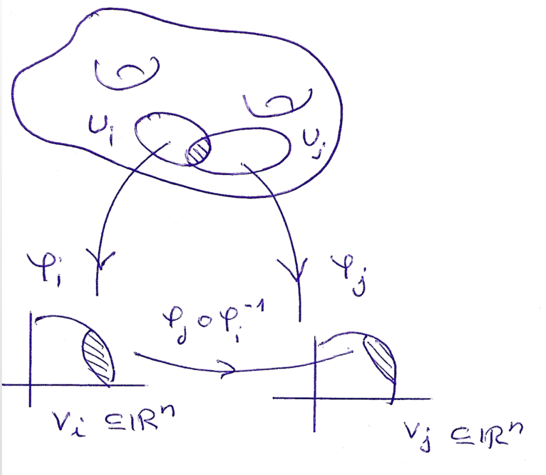
# Variétés différentiables

- Il est naturel de disposer d'une notion de différentiabilité. Cependant cette définition utilise explicitement la structure d'espace vectoriel ainsi l'expression : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ n'a aucun sens si l'espace topologique n'est pas un espace vectoriel. La généralisation de la notion de différentiabilité va donc se faire au travers des cartes.
- Définition On dit que $M$ est une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^r$ si :
  -$M$ est une variété topologique
  -Les changements de cartes sont de classe $\mathcal{C}^r$ :
  Il existe un atlas réunion des $(U_i, \varphi_i)$ tel que : $\forall (i,j)$ avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$
  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ :$\varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ de classe $\mathcal{C}^r$.
- On dira qu'une fonction $f$ de la variété $M$ dans $\mathbb{R}$ est différentiable de classe $\mathcal{C}^r$ quand pour toute carte locale $(U, \varphi)$ l'application :
  $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable et de classe $\mathcal{C}^r$

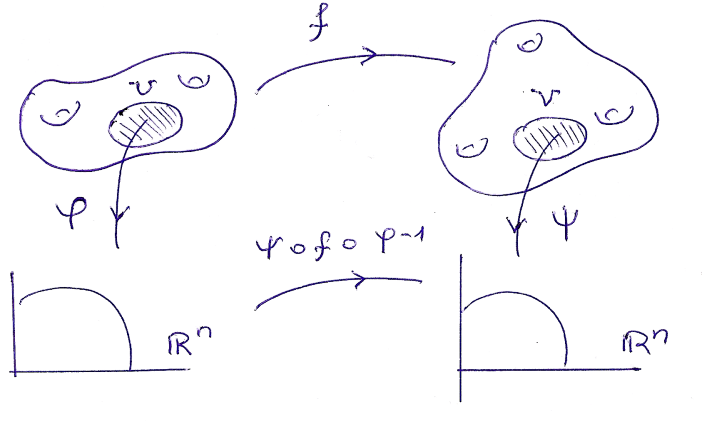
# Variétés différentiables

- Il est naturel de disposer d'une notion de différentiabilité. Cependant cette définition utilise explicitement la structure d'espace vectoriel ainsi l'expression : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ n'a aucun sens si l'espace topologique n'est pas un espace vectoriel. La généralisation de la notion de différentiabilité va donc se faire au travers des cartes.
- Définition On dit que $M$ est une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^r$ si :
  -$M$ est une variété topologique
  -Les changements de cartes sont de classe $\mathcal{C}^r$ :
  Il existe un atlas réunion des $(U_i, \varphi_i)$ tel que : $\forall(i,j)$ avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$
  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ :$\varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ de classe $\mathcal{C}^r$.
- On dira qu'une fonction $f$ de la variété $M$ dans $\mathbb{R}$ est différentiable de classe $\mathcal{C}^r$ quand pour toute carte locale $(U, \varphi)$ l'application :
  $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable et de classe $\mathcal{C}^r$
- Coordonnées locales Soit $(U, \varphi)$ une carte locale de la variété différentiable $M$ pour tout point $p$ de l'ouvert $U$, $\varphi(p)$ peut s'écrire :
  $\varphi(p) = (x^1(p), ..., x^n(p))$.
  On dira que $(x^1(p), ..., x^n(p))$ sont les coordonnées de $p$ lues dans la carte $(U, \varphi)$

# Variété différentiable



# Application différentiable entre variétés



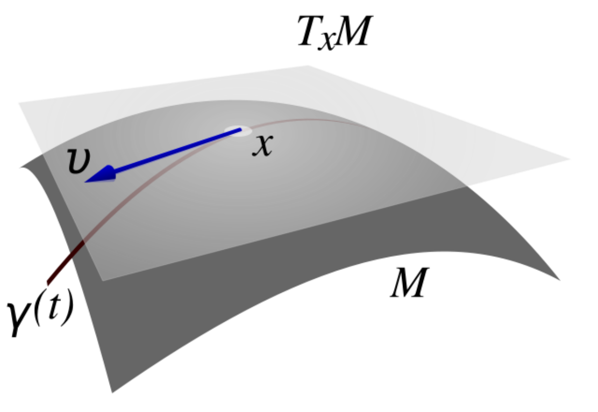
# Espace tangent : première approche

- Une sphère est un cas particulier très simple de variété. On a l'habitude de la voir plongée dans un l'espace $\mathbb{R}^3$. On visualise donc bien l'espace tangent en un point $p$ de la dite sphère : il s'agit du plan tangent à la sphère au point $p$. Cependant, nous aimerions construire cet espace de manière intrinsèque sans faire référence à l'espace exterieur ; deux constructions existent et elles sont bien sûr équivalentes.

# Espace tangent : première approche

- Une sphère est un cas particulier très simple de variété. On a l'habitude de la voir plongée dans un l'espace $\mathbb{R}^3$. On visualise donc bien l'espace tangent en un point $p$ de la dite sphère : il s'agit du plan tangent à la sphère au point $p$. Cependant, nous aimerions construire cet espace de manière intrinsèque sans faire référence à l'espace exterieur ; deux constructions existent et elles sont bien sûr équivalentes.
- Première approche : tangentes à une courbe. Soit $p$ un point de la variété M. On note $\mathcal{C}$, l'ensemble des courbes $\gamma : [-1,1] \to M$ telles que $\gamma(0) = p$ . Alors il existe un $\varepsilon$ assez petit pour que l'image de l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$ soit inclus dans un ouvert de carte $U$. Notons $(U, \varphi)$, la carte en question et $x^i$ les applications coordonnées sur cette carte. Alors la relation binaire ci dessous est une relation d'équivalence :
  $\gamma \sim \gamma' \Leftrightarrow (\frac{dx^i(\gamma(t))}{dt})_{t=0} = (\frac{dx^i(\gamma'(t))}{dt})_{t=0}$
  Par définition l'espace tangent en $p$ est l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathcal{C}$ pour cette relation.

# Vecteur tangent



# Espace tangent : Deuxième approche

- Seconde approche : dérivations. On considère l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $M$ noté :
  $\mathcal{F}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty\}$

# Espace tangent : Deuxième approche

- Seconde approche : dérivations. On considère l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $M$ noté :
  $\mathcal{F}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \ / \ f$ de classe $\mathcal{C}^\infty\}$
- Sur $\mathcal{F}(M)$ on considère la relation (d'équivalence) :
  $f \sim g \Leftrightarrow \exists U(ouvert) \subset M, p \in U \ / \ f_{|U} = g_{|U}$
  On note $\widetilde{f}$ une classe d'équivalence, l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation est noté $\mathcal{C}_p^\infty(M)$.

# Espace tangent : Deuxième approche

- Seconde approche : dérivations. On considère l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $M$ noté :
  $\mathcal{F}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \;/\; f \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty\}$
- Sur $\mathcal{F}(M)$ on considère la relation (d'équivalence) :
  $f \sim g \Leftrightarrow \exists U(ouvert) \subset M, p \in U \;/\; f_{|U} = g_{|U}$
  On note $\widetilde{f}$ une classe d'équivalence, l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation est noté $\mathcal{C}_p^\infty(M)$.
- On appelle dérivation une application de $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfait la règle de Leibniz.

# Espace tangent : Deuxième approche

- Seconde approche : dérivations. On considère l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $M$ noté :
  $\mathcal{F}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \ / \ f$ de classe $\mathcal{C}^\infty\}$
- Sur $\mathcal{F}(M)$ on considère la relation (d'équivalence) :
  $f \sim g \Leftrightarrow \exists U(ouvert) \subset M, p \in U \ / \ f_{|U} = g_{|U}$
  On note $\widetilde{f}$ une classe d'équivalence, l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation est noté $\mathcal{C}_p^\infty(M)$.
- On appelle dérivation une application de $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfait la règle de Leibniz.
- Espace tangent en $p$ en coordonnées locales, une base de $T_p(M)$ est donnée par les $n$-dérivations : $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ dont les courbes associées sont les $\gamma_i$ définies par :
  $x^i(\gamma_j(t)) = 0$ pour $i \neq j$ et $x^i(\gamma_i(t)) = t$
  Par suite,on notera $X^i(p)$ les coordonnées d'un vecteur tangent dans la base des $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$. Ainsi un vecteur tangent s'écrit en coordonnées locales :
  $X(p) = X^i(p).\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$

# Fibré tangent et champ de vecteurs

- En chaque point $p$ de la variété nous avons défini l'espace tangent. On peut alors considérer l'application qui au point $p$ de $M$ associe un vecteur dans $T_pM$ cette application s'appelle un champ de vecteurs.

## Fibré tangent et champ de vecteurs

- En chaque point $p$ de la variété nous avons défini l'espace tangent. On peut alors considérer l'application qui au point $p$ de $M$ associe un vecteur dans $T_pM$ cette application s'appelle un champ de vecteurs.
- La réunion de tous les espaces tangents quand $p$ parcourt la variété $M$ s'appelle le fibré tangent et est noté $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$.

## Fibré tangent et champ de vecteurs

- En chaque point $p$ de la variété nous avons défini l'espace tangent. On peut alors considérer l'application qui au point $p$ de $M$ associe un vecteur dans $T_pM$ cette application s'appelle un champ de vecteurs.
- La réunion de tous les espaces tangents quand $p$ parcourt la variété $M$ s'appelle le fibré tangent et est noté
  $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$.
- Notations : L'application $\pi : TM \to M$ définie par $\pi(p, X) = p$ est surjective et c'est la projection de $TM$ sur $M$.
  Une section est une application $X$ de $M$ dans $TM$ telle que $\pi \circ X$ est l'identité. C'est un champ de vecteurs.

# Fibré tangent et champ de vecteurs

- En chaque point $p$ de la variété nous avons défini l'espace tangent. On peut alors considérer l'application qui au point $p$ de $M$ associe un vecteur dans $T_pM$ cette application s'appelle un champ de vecteurs.
- La réunion de tous les espaces tangents quand $p$ parcourt la variété $M$ s'appelle le fibré tangent et est noté
  $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$.
- Notations : L'application $\pi : TM \to M$ définie par $\pi(p, X) = p$ est surjective et c'est la projection de $TM$ sur $M$.
  Une section est une application $X$ de $M$ dans $TM$ telle que $\pi \circ X$ est l'identité. C'est un champ de vecteurs.
- On appelle dérivation sur l'algèbre $\mathcal{F}(M)$ une application $D$ de $\mathcal{F}(M)$ dans lui même qui vérifie la relation de Leibniz :
  $D(fg) = D(f)g + fD(g)$. Par exemple, un champ de vecteurs définit une dérivation par la relation : $(X.f)(p) = X(p).f$

# Fibré tangent et champ de vecteurs

- En chaque point $p$ de la variété nous avons défini l'espace tangent. On peut alors considérer l'application qui au point $p$ de $M$ associe un vecteur dans $T_pM$ cette application s'appelle un champ de vecteurs.
- La réunion de tous les espaces tangents quand $p$ parcourt la variété $M$ s'appelle le fibré tangent et est noté
  $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$.
- Notations : L'application $\pi : TM \to M$ définie par $\pi(p, X) = p$ est surjective et c'est la projection de $TM$ sur $M$.
  Une section est une application $X$ de $M$ dans $TM$ telle que $\pi \circ X$ est l'identité. C'est un champ de vecteurs.
- On appelle dérivation sur l'algèbre $\mathcal{F}(M)$ une application $D$ de $\mathcal{F}(M)$ dans lui même qui vérifie la relation de Leibniz :
  $D(fg)$=$D(f)g + fD(g)$. Par exemple, un champ de vecteurs définit une dérivation par la relation : $(X.f)(p) = X(p).f$
- Crochet de Lie : l'application : $[X, Y] = XY - YX$ est le crochet de Lie des champs de vecteurs et c'est une dérivation (grâce au lemme de Schwarz),son expression locale est : $[X, Y] = (X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial x^j}$

# Le vocabulaire de la géométrie Riemannienne

## Géométrie Riemannienne

Pour pouvoir faire des mesures de distances, calculer des aires, parler de courbures ou d'orthogonalité il faut une structure euclidienne c'est à dire définir un produit scalaire sur chaque espace tangent.

## Variété riemannienne

Une variété riemannienne est une variété differentielle dans laquelle on définit un produit scalaire sur chaque espace tangent qui varie de manière lisse.

## Le terraux du calcul tensoriel

Dans le cadre riemannien le calcul tensoriel s'exprime pleinement : le produit scalaire est un deux-tenseur symétrique, on pourra définir la courbure à l'aide d'un tenseur : le tenseur de Riemann

# Variété riemannienne, métrique, connexion

- Définition : On appelle Variété Riémannienne un couple $(M, g)$ dans lequel $M$ est une variété différentiable et $g$ un champ $\mathcal{C}^\infty$ de tenseur symétrique 2 fois covariant (produit scalaire) sur la variété. :
  $p \rightarrow < X_p, Y_p >_p \in \mathbb{R}$
  On rappelle l'expression locale d'une telle métrique :
  $p \rightarrow g_{i,j}(p) dx^i(p) \otimes dx^j(p)$

# Variété riemannienne, métrique, connexion

- Définition : On appelle Variété Riémannienne un couple $(M, g)$ dans lequel $M$ est une variété différentiable et $g$ un champ $\mathcal{C}^\infty$ de tenseur symétrique 2 fois covariant (produit scalaire) sur la variété. :
  $p \rightarrow < X_p, Y_p >_p \in \mathbb{R}$
  On rappelle l'expression locale d'une telle métrique :
  $p \rightarrow g_{i,j}(p)dx^i(p) \otimes dx^j(p)$
- On appelle connexion linéaire note $\nabla_X Y$ l'application bilinéaire $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$ qui satisfait aux trois règles de bilinéarité suivantes :
  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
  $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
  $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$
  Ainsi que la règle de Leibniz :
  $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$
  On peut remplacer $Y$ par n'importe quel tenseur.

# Variété riemannienne, métrique, connexion

- Définition : On appelle Variété Riémannienne un couple $(M, g)$ dans lequel $M$ est une variété différentiable et $g$ un champ $\mathcal{C}^\infty$ de tenseur symétrique 2 fois covariant (produit scalaire) sur la variété. :
  $p \rightarrow < X_p, Y_p >_p \in \mathbb{R}$
  On rappelle l'expression locale d'une telle métrique :
  $p \rightarrow g_{i,j}(p) dx^i(p) \otimes dx^j(p)$
- On appelle connexion linéaire note $\nabla_X Y$ l'application bilinéaire $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$ qui satisfait aux trois règles de bilinéarité suivantes :
  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
  $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
  $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
  Ainsi que la règle de Leibniz :
  $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$
  On peut remplacer $Y$ par n'importe quel tenseur.
- En cordonnées locales $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \Gamma^j_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_j}$, les $\Gamma^j_{i,k}$ sont les symboles de Christoffel et déterminent la connexion.

## Connexion de Levi-civita

- Le formalisme precédent peut être développé sur toute variété différentiable, sur une variété riemannienne il existe une connexion particulière unique :

# Connexion de Levi-civita

- Le formalisme precédent peut être développé sur toute variété différentiable, sur une variété riemannienne il existe une connexion particulière unique :
- une connexion est symétrique (on dit aussi sans torsion) si $\Gamma^{j}_{i,k} = \Gamma^{j}_{k,i}$

# Connexion de Levi-civita

- Le formalisme precédent peut être développé sur toute variété différentiable, sur une variété riemannienne il existe une connexion particulière unique :
- une connexion est symétrique (on dit aussi sans torsion) si $\Gamma^j_{i,k} = \Gamma^j_{k,i}$
- une connexion est compatible avec la métrique si :
  $X.(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$
  Ce qui équivalent à : $\nabla_X g = 0$.

# Connexion de Levi-civita

- Le formalisme precédent peut être développé sur toute variété différentiable, sur une variété riemannienne il existe une connexion particulière unique :
- une connexion est symétrique (on dit aussi sans torsion) si $\Gamma^j_{i,k} = \Gamma^j_{k,i}$
- une connexion est compatible avec la métrique si :
  $X.(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$
  Ce qui équivalent à : $\nabla_X g = 0$.
- Connexion de Levi-Civita : c'est l'unique connexion symétrique (sans torsion), compatible avec la métrique sur une variété riemannienne. Les symboles de Christoffel sont déterminés en fonction de la métrique :
  $\Gamma^i_{j,k} = \frac{1}{2} g^{i,h}\left(\frac{\partial g_{k,h}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{j,h}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{j,k}}{\partial x_h}\right)$
  dans cette expression $g^{i,h}$ désigne la matrice inverse de la métrique.

## Dérivation covariante, transport parallèle

- La notion de transport parallèle généralise pour un espace courbe la translation dans l'espace euclidien :

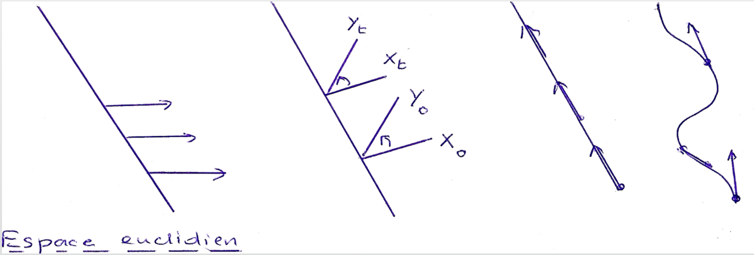
# Dérivation covariante, transport parallèle

- La notion de transport parallèle généralise pour un espace courbe la translation dans l'espace euclidien :
- Si on translate un vecteur le long d'une courbe : $\mathcal{C}$, l'angle entre ce vecteur et un vecteur tangent à la courbe change si cette dernière n'est pas une droite ; le produit scalaire est conservé dans l'opération de translation d'un couple de vecteurs ; le vecteur directeur d'une droite est translaté le long de cette droite.

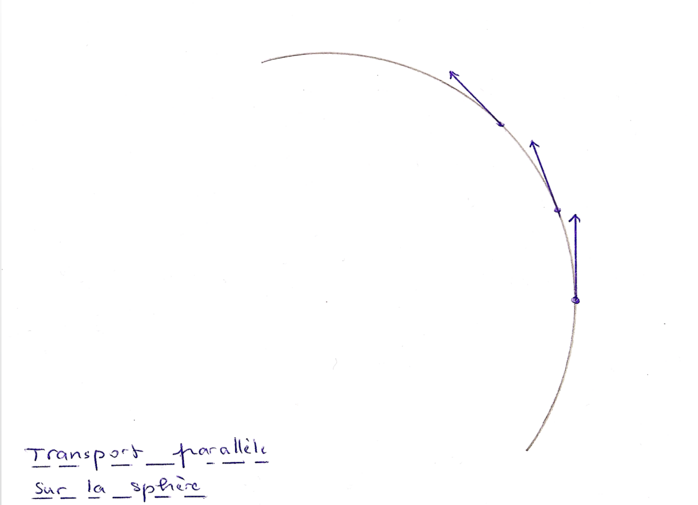
# Dérivation covariante, transport parallèle

- La notion de transport parallèle généralise pour un espace courbe la translation dans l'espace euclidien :
- Si on translate un vecteur le long d'une courbe : $\mathcal{C}$, l'angle entre ce vecteur et un vecteur tangent à la courbe change si cette dernière n'est pas une droite ; le produit scalaire est conservé dans l'opération de translation d'un couple de vecteurs ; le vecteur directeur d'une droite est translaté le long de cette droite.
- Transport parallèle le long d'une courbe On considère maintenant une courbe $t \in [a, b] \to c(t) \in (M, g)$. On dit qu'un vecteur $Y$ est déplacé parallèlement le long de la courbe $c$ quand :
  $\frac{DY(t)}{dt} = \nabla_{\dot{c}(t)} Y(t) = 0$
  $D$ est la dérivation covariante.
  On a l'expression locale de la dérivée covariante :
  $\frac{DY(t)}{dt} = \nabla_{\dot{c}(t))} Y(t) = (\frac{dY^k(c(t))}{dt} + \Gamma^k_{i,j}(c(t)) X^i(c(t)) Y^j(c(t)))\partial_k$
  A l'aide de la formule précédente, on voit immédiatement qu'un vecteur transporté parallèlement dans l'espace euclidien est translaté.

# Transport par translation



# Transport parallèle



# Equation des géodésiques

- On appelle géodésique toute courbe pour laquelle le vecteur vitesse est transporté parallèlement : $\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t) = 0$ Les calculs précédents fournissent immédiatement l'équation en coordonnées locales : $\nabla_{\dot{c}(t))}\dot{c}(t) = \frac{d^2x^k(c(t))}{dt^2} + \Gamma^k_{i,j}(c(t))\frac{dx^i(c(t))}{dt}\frac{dx^j(c(t))}{dt} = 0$
C'est une équation différentielle ordinaire, l'existence de solutions est au moins assurée localement (problème de Cauchy).

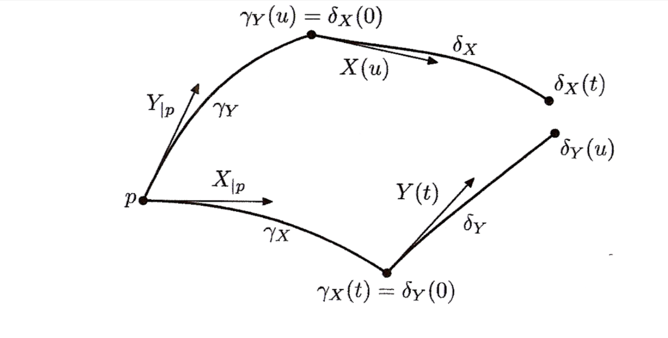
# Equation des géodésiques

- On appelle géodésique toute courbe pour laquelle le vecteur vitesse est transporté parallèlement : $\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t) = 0$ Les calculs précédents fournissent immédiatement l'équation en coordonnées locales : $\nabla_{\dot{c}(t))}\dot{c}(t) = \frac{d^2x^k(c(t))}{dt^2} + \Gamma^k_{i,j}(c(t))\frac{dx^i(c(t))}{dt}\frac{dx^j(c(t))}{dt} = 0$
C'est une équation différentielle ordinaire, l'existence de solutions est au moins assurée localement (problème de Cauchy).
- Les géodésiques de l'espace euclidien sont les droites.

# Equation des géodésiques

- On appelle géodésique toute courbe pour laquelle le vecteur vitesse est transporté parallèlement : $\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t) = 0$ Les calculs précédents fournissent immédiatement l'équation en coordonnées locales : $\nabla_{\dot{c}(t))}\dot{c}(t) = \frac{d^2x^k(c(t))}{dt^2} + \Gamma^k_{i,j}(c(t))\frac{dx^i(c(t))}{dt}\frac{dx^j(c(t))}{dt} = 0$ C'est une équation différentielle ordinaire, l'existence de solutions est au moins assurée localement (problème de Cauchy).
- Les géodésiques de l'espace euclidien sont les droites.
- Les géodésiques de la sphère sont les grands cercles. Les méridiens ou les parallèles sont des exemples de géodésiques sur terre.

# Defaut de transport parallèle



# Tenseur de courbure De Riemann

- La figure précédente met en évidence la torsion et la courbure ; si le parallélogramme se referme la torsion est nulle, mais le défaut "d'exactitude" du transport parallèle du vecteur $Y$ définit le tenseur de courbure de Riemann en coordonnées locales :

## Tenseur de courbure De Riemann

- La figure précédente met en évidence la torsion et la courbure ; si le parallélogramme se referme la torsion est nulle, mais le défaut "d'exactitude" du transport parallèle du vecteur $Y$ définit le tenseur de courbure de Riemann en coordonnées locales :
- $R(X,Y)_p Z_p = R^k{}_{lij} X^i(p) Y^j(p) Z^l(p) =$
$\left(\frac{\partial \Gamma^k_{j,l}}{\partial x^i}(p) - \frac{\partial \Gamma^k_{i,l}}{\partial x^j}(p) + \Gamma^k_{i,s}(p)\Gamma^s_{j,l}(p) - \Gamma^k_{j,s}(p)\Gamma^s_{i,l}(p)\right) X^i(p) Y^j(p) Z^l(p)$

# Tenseur de courbure De Riemann

- La figure précédente met en évidence la torsion et la courbure ; si le parallélogramme se referme la torsion est nulle, mais le défaut "d'exactitude" du transport parallèle du vecteur $Y$ définit le tenseur de courbure de Riemann en coordonnées locales :
- $R(X,Y)_p Z_p = R^k{}_{lij} X^i(p) Y^j(p) Z^l(p) =$
  $\left(\frac{\partial \Gamma^k_{j,l}}{\partial x^i}(p) - \frac{\partial \Gamma^k_{i,l}}{\partial x^j}(p) + \Gamma^k_{i,s}(p)\Gamma^s_{j,l}(p) - \Gamma^k_{j,s}(p)\Gamma^s_{i,l}(p)\right) X^i(p) Y^j(p) Z^l(p)$
- L'expression du tenseur de courbure de Riemann est donné par la formule :
  $R(X,Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z$

# Tenseur de courbure De Riemann

- La figure précédente met en évidence la torsion et la courbure ; si le parallélogramme se referme la torsion est nulle, mais le défaut "d'exactitude" du transport parallèle du vecteur $Y$ définit le tenseur de courbure de Riemann en coordonnées locales :
- $R(X,Y)_p Z_p = R^k{}_{lij} X^i(p) Y^j(p) Z^l(p) =$
$\left(\frac{\partial \Gamma^k_{j,l}}{\partial x^i}(p) - \frac{\partial \Gamma^k_{i,l}}{\partial x^j}(p) + \Gamma^k_{i,s}(p)\Gamma^s_{j,l}(p) - \Gamma^k_{j,s}(p)\Gamma^s_{i,l}(p)\right) X^i(p) Y^j(p) Z^l(p)$
- L'expression du tenseur de courbure de Riemann est donné par la formule :
$R(X,Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z$
- Par contraction d'indice, on peut obtenir de nouveaux tenseurs :

# Tenseur de courbure De Riemann

- La figure précédente met en évidence la torsion et la courbure ; si le parallélogramme se referme la torsion est nulle, mais le défaut "d'exactitude" du transport parallèle du vecteur $Y$ définit le tenseur de courbure de Riemann en coordonnées locales :
- $R(X,Y)_p Z_p = {R^k}_{lij} X^i(p) Y^j(p) Z^l(p) =$
  $\left(\frac{\partial \Gamma^k_{j,l}}{\partial x^i}(p) - \frac{\partial \Gamma^k_{i,l}}{\partial x^j}(p) + \Gamma^k_{i,s}(p)\Gamma^s_{j,l}(p) - \Gamma^k_{j,s}(p)\Gamma^s_{i,l}(p)\right) X^i(p) Y^j(p) Z^l(p)$
- L'expression du tenseur de courbure de Riemann est donné par la formule :
  $R(X,Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z$
- Par contraction d'indice, on peut obtenir de nouveaux tenseurs :
- Le tenseur de Ricci est obtenu en contractant les indices $k$ et $l$ :
  $R_{i,j} = {R^l}_{ijl}$

# Tenseur de courbure De Riemann

- La figure précédente met en évidence la torsion et la courbure ; si le parallélogramme se referme la torsion est nulle, mais le défaut "d'exactitude" du transport parallèle du vecteur $Y$ définit le tenseur de courbure de Riemann en coordonnées locales :
- $R(X,Y)_p Z_p = R^k{}_{lij} X^i(p) Y^j(p) Z^l(p) =$
  $\left(\frac{\partial \Gamma^k_{j,l}}{\partial x^i}(p) - \frac{\partial \Gamma^k_{i,l}}{\partial x^j}(p) + \Gamma^k_{i,s}(p)\Gamma^s_{j,l}(p) - \Gamma^k_{j,s}(p)\Gamma^s_{i,l}(p)\right) X^i(p) Y^j(p) Z^l(p)$
- L'expression du tenseur de courbure de Riemann est donné par la formule :
  $R(X,Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z$
- Par contraction d'indice, on peut obtenir de nouveaux tenseurs :
- Le tenseur de Ricci est obtenu en contractant les indices $k$ et $l$ :
  $R_{i,j} = R^l{}_{ijl}$
- En contractant encore on obtient la courbure scalaire :
  $S = g^{ij} R_{ij}$

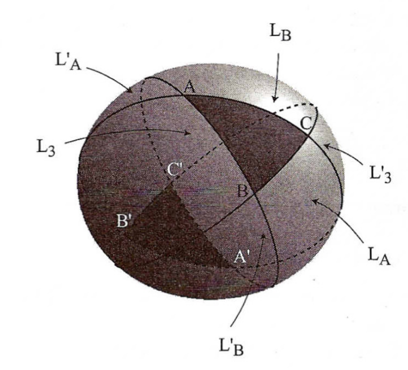
# Formule locale et globale de Gauss Bonnet pour une surface

### Cas de la sphère

On démontre très facilement que pour une sphère de rayon $r$ et un triangle $ABC$ dessus : $\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \frac{1}{r^2} aire(\triangle ABC)$

# La formule de Gauss Bonnet

Figure tirée de : Keith Burns, Marian Gidea Differential geometry and topology, Chapman  Hall CRC



# Formule locale et globale de Gauss Bonnet pour une surface

## Cas de la sphère

On démontre très facilement que pour une sphère de rayon $r$ et un triangle $ABC$ dessus : $\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \frac{1}{r^2} aire(\triangle ABC)$

## Cas d'une surface quelconque $X$

On considère ici une surface de courbure de Gauss en un point $K (= 2S)$, on note $\kappa_g$ sa courbure géodésique, la formule de la sphère se généralise en $\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \int_{\partial \triangle} \kappa_g + \int_{\triangle} K$

# Formule locale et globale de Gauss Bonnet pour une surface

## Cas de la sphère

On démontre très facilement que pour une sphère de rayon $r$ et un triangle $ABC$ dessus : $\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \frac{1}{r^2} aire(\triangle ABC)$

## Cas d'une surface quelconque $X$

On considère ici une surface de courbure de Gauss en un point $K(= 2S)$, on note $\kappa_g$ sa courbure géodésique, la formule de la sphère se généralise en $\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \int_{\partial\triangle} \kappa_g + \int_{\triangle} K$

## Somme sur Triangulation de $X$

La courbure géodésique ne contribue pas a la somme totale, on obtient la formule Globale de Gauss Bonnet
$\int_X K = 2\pi\chi(X)$

# Courbure globale et topologie

### Déformation

On observe alors que si l'on déforme une variété, sa courbure globale est inchangée. autrement dit les accidents locaux son lissés au niveaux globale, la courbure scalaire d'une surface est un invariant topologique.

# Courbure globale et topologie

## Déformation

On observe alors que si l'on déforme une variété, sa courbure globale est inchangée. autrement dit les accidents locaux son lissés au niveaux globale, la courbure scalaire d'une surface est un invariant topologique.

## Cas d'une surface quelconque $X$

Remarque : pour la sphère la formule de Gauss Bonnet peut être obtenue plus simplement : en effet $\chi(S_2) = 2$ et $aire(\text{Sphère}) = 4\pi r^2$, et la courbure de Gauss d'une sphère de rayon $r$ est constante et égal à $\frac{1}{r^2}$

# Courbure globale et topologie

## Déformation

On observe alors que si l'on déforme une variété, sa courbure globale est inchangée. autrement dit les accidents locaux son lissés au niveaux globale, la courbure scalaire d'une surface est un invariant topologique.

## Cas d'une surface quelconque $X$

Remarque : pour la sphère la formule de Gauss Bonnet peut être obtenue plus simplement : en effet $\chi(S_2) = 2$ et *aire*(Sphère)$= 4\pi r^2$, et la courbure de Gauss d'une sphère de rayon $r$ est constante et égal à $\frac{1}{r^2}$

## Classes caractéristiques

La courbure d'une connexion permet en générale de définir de nombreux invariants généralisant le théorème de Gauss Bonnet, on entre dans le monde des classes caractéristiques.