Equation aux dérivées partielles à une dimension d'espace.

• L'espace de Sobolev $H^1(0, 1)$ désigne l'espace des fonctions v appartenant à $L^2(0, 1)$ dont la dérivée au sens des distributions peut être représentée par une fonction v' qui appartient elle aussi à $L^2(0, 1)$. C'est un espace de Hilbert pour la norme

$$(1) \qquad \| v \|_1 \equiv \sqrt{\int_0^1 (v^2 + v'^2)\, \mathrm{d}x} \,.$$

On introduit la fonctionnelle $J : H^1(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ suivante :

$$(2) \qquad J(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 (v^2 + v'^2)\, \mathrm{d}x - \int_0^1 v \, \mathrm{d}x \,,$$

un nombre réel α et l'ensemble

$$(3) \qquad K(\alpha) = \{ v \in H^1(0, 1), \quad v(0) = \alpha \} \,.$$

1) Calculer $J'(v) \bullet w$.

2) Montrer que $K(\alpha)$ est un convexe fermé de $H^1(0, 1)$ [difficile].

3) Résoudre le problème

$$(4) \qquad \inf_{v \in K(\alpha)} J(v)$$

et interpréter le problème résolu.

FD, novembre 1993, avril 1995, août 2002.

Equation aux dérivées partielles à une dimension d'espace.
Proposition de corrigé.

1) On développe $J(v+\theta w)$ en puissance de θ et on ne conserve que le terme d'ordre 1. Il vient :

$$(5) \qquad J'(v){\bullet}w \;=\; \int_0^1 (v\,w + v'\,w')\,\mathrm{d}x \;-\; \int_0^1 w\,\mathrm{d}x\,.$$

2) L'ensemble $K(\alpha)$ est un convexe puisque variété affine et il faut montrer qu'il est de plus fermé dans $H^1(0,\,1)$. La difficulté vient du fait qu'une expression du type $v(0)$ n'a *a priori* pas de sens pour une fonction v appartenant à $L^2(0,\,1)$ mais en a un pour v appartenant à $H^1(0,\,1)$.

• De façon plus précise, nous allons montrer que pour tout point y de l'intervalle $[0,\,1]$, la masse de Dirac δ_y en ce point est effectivement une forme linéaire **continue** sur l'espace $H^1(0,\,1)$, ce qui donne un sens mathématiquement rigoureux à l'écriture $v(y)(=<\delta_y\,,\,v>)$ et à l'expression $v(0)$ en particulier. Pour montrer cette propriété, on considère d'abord que v est régulière (disons de classe $\mathcal{C}^2$) et on essaie de majorer $v(y)$ par une expression proportionnelle à la norme $H^1(0,\,1)$. On part de l'identité classique $v(y) = v(x) + \int_x^y v'(t)\,\mathrm{d}t$ et on majore le terme de droite par l'intégrale de la valeur absolue prise sur $[0,\,1]$. Il vient donc

$$\mid v(y) \mid \,\leq\, \mid v(x) \mid \,+\, \int_0^1 \mid v'(t) \mid\,\mathrm{d}t\,.$$

On intègre ensuite par rapport à x sur $[0,\,1]$ l'inégalité précédente et on cauchyschwarze les deux intégrales du membre de droite. Nous avons donc établi l'estimation suivante

$$(6) \qquad |<\delta_y\,,\,v>| \,\leq\, \sqrt{2}\;\|\,v\,\|_1 \qquad \text{pour}\;\; v \in \mathcal{C}^2([0,\,1])\,.$$

• On admet [les fanas pourront consulter Lions-Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes, tome 1*, Dunod, Paris, 1968] que l'ensemble de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ est dense dans $H^1(0,\,1)$. On applique ensuite le théorème du prolongement continu qui affirme qu'une application uniformément continue définie sur une partie dense d'un espace métrique et prenant ses valeurs dans un espace complet se prolonge de façon unique en une application continue à l'espace de référence tout entier (ceux qui ont oublié leur cours de topologie générale peuvent consulter le livre de Schwartz, *Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, Paris, 1970) pour conclure que $<\delta_y\,,\,v>$ prend une unique valeur définie par exemple comme la limite des $v_k(y)$ pour une suite v_k de classe $\mathcal{C}^2$ et convergeant vers v dans $H^1(0,\,1)$. De plus, l'estimation (6) est vraie pour toute fonction v de $H^1(0,\,1)$; la masse de Dirac en 0 est donc une forme linéaire continue sur

$H^1(0,\,1)$ et $K(\alpha)$ est par suite une partie fermée de $H^1(0,\,1)$ [les fanas en concluront que les fonctions de $H^1(0,\,1)$ sont continues. Cette propriété reste-t-elle vraie pour les dimensions supérieures à 1 ?] .

3) La fonction J est 1-convexe sur $H^1(0,\,1)$, propriété qu'on tire immédiatement de la relation $\mid (J'(v) - J'(w)) \bullet (v-w) \mid \,\geq\, \|\, v - w \,\|_1^2$ et le problème (4) a donc une solution unique u dans le convexe fermé $K(\alpha)$. Pour calculer effectivement l'unique fonction u solution du problème (4), on la suppose régulière et on intègre par parties le terme contenant des dérivées de la fonction w. Il vient

(7) $$J'(v) \bullet w \;=\; \int_0^1 (-v'' + v - 1)\, w \,\mathrm{d}x \;+\; \big[v'\, w \big]_0^1 \,.$$

L'inéquation d'Euler associée au problème (4) prend la forme

(8) $$J'(u) \bullet w \;=\; 0\,, \qquad \forall\, w \in K(0)\,.$$

Ceci est en particulier vrai pour toute fonction w régulière et nulle en 0 et en 1, ce qui permet dans un premier temps de ne pas prendre en compte le terme tout intégré au second membre de la relation (7). Nous en déduisons :

(9) $$-u'' + u - 1 \;=\; 0.$$

Compte tenu de cette propriété, la relation (8) s'écrit maintenant

(10) $$u'(1)\, w(1) \;=\; 0\,, \qquad \forall\, w \in K(0)\,.$$

puisque $w(0)$ est nul pour w appartenant à $K(0)$. On tire de l'appartenance de u au convexe $K(\alpha)$ et de la relation (10) les deux conditions aux limites satisfaites par la fonction u (conditions mêlées dites de Dirichlet-Neumann) :

(11) $$u(0) \,=\, \alpha\,, \qquad u'(1) \,=\, 0\,.$$

La résolution du système (9) (11) est alors élémentaire. Nous avons pour ce problème monodimensionnel complètement calculé la solution du problème (4), à savoir

(12) $$u(x) \;=\; 1 \,+\, (\alpha - 1)\, \frac{\cosh\,(1-x)}{\cosh\,(1)}\,.$$

• Pour les problèmes plus complexes (équation différentielle impossible à intégrer analytiquement, problème à deux ou trois dimensions d'espace), on suit une démarche contraire à celle de cet exercice : on part du problème à résoudre (équation aux dérivées partielles avec des conditions aux limites appropriées) et on forme un problème de minimisation dont on cherche ensuite une solution approchée dans un sous-espace de dimension finie.

FD, novembre 1993, avril 1995, août 2002.