Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Cours de "Mathématiques du Signal Déterministe" 11 décembre 2012

Exercices pour la séance numéro 11

Exercice 1) Fourier inverse d'une porte par une sinusoïde
On rappelle que la conjuguée $\overline{\mathcal{F}}$ de la transformée de Fourier est définie pour une fonction f par $(\overline{\mathcal{F}} f)(\omega) = \widehat{f}(-\omega)$. On se donne un réel a strictement positif. Si P_T désigne la porte de largeur T, c'est à dire $P_T(t) = 1$ si $|\, t \,| \leq \frac{T}{2}$ et $P_T(t) = 0$ sinon, montrer que $\big[\, \overline{\mathcal{F}}\big(\exp\,(-i\, k\, a\, \omega)\, P_{\frac{2\pi}{a}}(\omega) \big) \,\big](t) \,=\, \frac{2\pi}{a}\, \mathrm{sinc}\big(\pi \left(\frac{t}{a} - k \right) \big)$.

Exercice 2) Convolution par une masse de Dirac
Soit a un nombre réel et f une fonction continue bornée pour fixer les idées. On note δ_a la masse de Dirac au point a : $< \delta_a \,,\, f > = \, f(a)$ et τ_a l'opérateur de décalage de la valeur a : $\big(\tau_a f \big)(t) = f(t-a)$. Montrer que $f * \delta_a \,=\, \delta_a * f \,=\, \tau_a f$. Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est maintenant une distribution arbitraire et δ la masse de Dirac au point zéro, c'est à dire $< \delta \,,\, \varphi > = \, \varphi(0)$ pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, montrer que $T * \delta \,=\, \delta * T \,=\, T$.

Exercice 3) Convolution et transformée de Fourier
Soient deux fonctions f et g. Montrer que l'on a $\mathcal{F}(f\, g) \,=\, \frac{1}{2\pi}\, (\mathcal{F} f) * (\mathcal{F} g)$. Montrer que le résultat est encore vrai si on remplace $\mathcal{F}$ par $\overline{\mathcal{F}}$ partout dans la relation précédente. Si f est maintenant une fonction "à croissance lente", ce qui signifie que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ infiniment dérivable et à décroissance rapide, $f\, \varphi$ est encore une fonction de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ une distribution, montrer que l'on a : $\mathcal{F}(f\, T) \,=\, \frac{1}{2\pi}\, (\mathcal{F} f) * (\mathcal{F} T)$.